HAMBURGER BEITRÄGE
ZUR MATHEMATIK

Heft 87

37 elementare axiomatische Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers

Oswald Riemenschneider, Hamburg

37 elementare axiomatische Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers*

Oswald Riemenschneider, Hamburg

Leicht revidierte Fassung vom 3.3.2000

Einleitung

In meinem letzten Erstsemester–Kurs über *Analysis I* im Wintersemester 1997/98 habe ich versucht, die Beweise der grundlegenden Aussagen über Folgen und Reihen reeller Zahlen und über stetige, differenzierbare und integrierbare Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen so anzuordnen, daß man ohne große Mehrarbeit deren Äquivalenz zu der Vollständigkeit des reellen Zahlkörpers einsehen kann. Der Preis, den man (besser gesagt: die/der Studierende) hierfür bezahlen muß, besteht in einer sehr frühen Einführung *topologischer* Konzepte, die der Dozent eines solchen Kurses meines Erachtens aber ohnehin im 2., spätestens aber im 3. Semester bereitzustellen hat. Man verliert durch einen solchen Aufbau also ingesamt keine Zeit, sonder gewinnt sie, ganz im Gegenteil, und zudem, wovon ich fest überzeugt bin, wesentlich tiefere Einsichten in die fundamentalen Zusammenhänge der Mathematik (wohlgemerkt: auf der Seite der Studierenden und damit in deren ureigenstem Interesse). Die notwendige (aber selbstverständlich nicht hinreichende) Bedingung für das Gelingen eines solchen Unterfangens ist die Fähigkeit des Dozenten, den Studierenden einen solchen Zugang mit Kompetenz und Begeisterung auch wirklich „schmackhaft" zu machen.

Ich bin dabei eher en passant, also nicht mit Nachdruck, der Frage nachgegangen, inwieweit die oft zusätzlich geforderte Eigenschaft der „Archimedizität" abgeschwächt werden kann. Wo es mir ohne große Mühe möglich war, habe ich sie völlig eliminiert oder durch die schwächere Forderung ersetzt, daß der Grundkörper *nichttriviale Nullfolgen* besitzt (siehe die Bedingung $(*)$ im Anhang zum ersten Kreis und den Beginn des zweiten Kreises). Da diese Klasse angeordneter Körper echt größer als die der archimedischen ist, Beweise jedoch wie in der klassischen reellen Analysis mittels konvergenter Folgen geführt werden können, scheint sie mir im Rahmen einer axiomatisch geprägten Anfängerausbildung eine auch „didaktisch erlaubte" Oberklasse zu sein.

Das meiste hier Dargelegte dürfte wohlbekannt sein, auch wenn ich einiges (z. B. im Zusammenhang mit differenzierbaren Funktionen und dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung) so nicht explizit in anderen Publikationen gefunden habe. Ich habe mir allerdings nicht die Mühe gemacht, die umfangreiche (teilweise auch nicht leicht zugängliche) Literatur zu diesem Problemkreis intensiv zu studieren (eine Arbeit ähnlichen Inhalts, die ich aber erst nach Abschluß meines Kurses zur Kenntnis genommen habe, ist [7]).

*Wesentlich erweiterte und veränderte deutsche Fassung eines am 9.9.1999 an der Tokyo Metropolitan University gehaltenen Vortrags

Vieles, wenn nicht alles, kann man sich sowieso leicht selbst überlegen. Die vorliegende Note ist somit nur als ein möglicher *Leitfaden* für interessierte Studierende und Kollegen gedacht und bildet - um Mißverständnissen vorzubeugen, sei dies ausdrücklich festgehalten - nur das auf die wesentlichen, d. h. *tragenden* Teile reduzierte Gerüst meiner Vorlesung (von der eine vollständige Ausarbeitung im Entstehen begriffen ist; siehe [6]). Aus diesem Grunde habe ich hier meist auf motivierende Kommentare verzichtet. Es sei noch erwähnt, daß die im Titel genannte Anzahl absolut nichts Mystisches hat. Man kann sie sowohl nach unten korrigieren durch Fortlassen derjenigen Kennzeichnungen, die in der klassischen Analysis tatsächlich nicht benötigt werden, als auch (fast beliebig) nach oben durch Hinzufügen der zahlreichen weit artifizielleren Charakterisierungen der reellen Zahlen.

Über konstruktive Kritik und Hinweise zu weiteren Quellen mit ähnlicher Intention würde ich mich freuen. Mein Dank gilt meinem ehemaligen Mitarbeiter Dr. Andreas Leipelt und meinem Assistenten Dr. Jörg Schürmann für ihre Bereitschaft zur Diskussion über dieses nicht gerade weltbewegende Thema. Mein besonderer Dank gilt Herrn Kollegen Prof. Dr. Alexander Prestel aus Konstanz, der im brieflichen und mündlichen Austausch, insbesondere durch seinen Hinweis auf die η_1–Körper, wesentlich dazu beitrug, mein Wissen über nichtarchimedische Körper zu erweitern, und eine meiner Fragen zur Unabhängigkeit gewisser Axiomensysteme in die richtigen Bahnen lenkte.

1 Der erste Kreis

Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ einen angeordneten Körper. Um sich Arbeit zu ersparen, sollte man die Begriffe der *Konvergenz einer Folge* und einer *Cauchy–Folge* etc. gleich im allgemeineren Rahmen von $\mathbb{K}$*–metrischen Räumen* einführen und die trivialen Folgerungen (z. B.: Konvergente Folgen sind notwendig beschränkte Cauchy–Folgen) vorwegnehmen. Danach kann man die Äquivalenz der folgenden Aussagen (1) bis (5) z. B. durch einen *Rundlauf* (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (1) zeigen. Hierbei bedeutet *Cauchy–Vollständigkeit*, daß jede Cauchy–Folge einen (automatisch eindeutig bestimmten) Grenzwert besitzt. Das *Prinzip der monotonen Konvergenz* besagt, daß jede monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ einen Grenzwert hat. Bei den Intervallschachtelungsprinzipien betrachtet man abgeschlossene Intervalle $I_j = [\,a_j\,,\,b_j\,] \subset \mathbb{K}$ mit $I_j \supset I_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Das *starke* bzw. *schwache* Intervallschachtelungsprinzip fordert, daß deren Durchschnitt nicht leer ist, im zweiten Falle unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Folge $b_j - a_j$ der Längen der Intervalle I_j gegen Null geht. Als *Satz von Bolzano und Weierstraß* bezeichnen wir die Aussage, daß man aus jeder beschränkten Folge in $\mathbb{K}$ ein *konvergente Teilfolge* auswählen kann. Wenn man das sehr frühe Auftreten des Archimedischen Axioms und des Begriffs der Cauchy–Folge vermeiden will, kann man den Kreislauf z. B. an der zweiten Stelle beginnen.

(1) $\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ ist archimedisch} \\ \& \\ \text{Cauchy–vollständig} \end{array}}$

(2) $\boxed{\text{Prinzip der monotonen Konvergenz}}$

(3)
$\mathbb{K}$ ist archimedisch & Starkes Intervall– schachtelungsprinzip

(4)
$\mathbb{K}$ ist archimedisch & Schwaches Intervall– schachtelungsprinzip

(5) $\boxed{\text{Satz von Bolzano und Weierstraß}}$

Die *Beweise* bieten keine besonderen Schwierigkeiten und könnten somit dem Leser überlassen werden. Der Vollständigkeit halber sollen sie angefügt werden.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es genügt zu zeigen: *Jede monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge in einem archimedisch angeordneten Körper ist eine Cauchy–Folge*. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man durch Übergang zu einer Teilfolge eine streng monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_{j+1} - x_j \ge \varepsilon_0$ mit einem festen $\varepsilon_0 > 0$. Somit wäre $x_j \ge x_0 + j\varepsilon_0$ für alle $j \in \mathbb{N}$; wegen der Archimedizität von $\mathbb{K}$ würde die rechte Seite aber jede vorgegebene Schranke für hinreichend große j übertreffen. Widerspruch!

(2) $\Longrightarrow$ (3) Wäre $\mathbb{K}$ nicht archimedisch, so wäre die Folge $(j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also konvergent und damit eine Cauchy–Folge. Dann müßte aber z. B. $(j+1) - j = 1$ für große j kleiner als vorgegebenes $\varepsilon > 0$, also z. B. kleiner als $\varepsilon = 1$ sein. Widerspruch! Das starke Intervallschachtelungsprinzip folgt unmittelbar aus dem Prinzip der monotonen Konvergenz durch Betrachtung der Folge der linken (bzw. rechten) Endpunkte der Intervalle I_j.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Trivial.

(4) $\Longrightarrow$ (5) Wohlbekannt (Intervallhalbierung).

(5) $\Longrightarrow$ (1) Daß aus dem Satz von Bolzano–Weierstraß die Archimedizität von $\mathbb{K}$ folgt, ergibt sich genauso wie im Schluß (2) $\Longrightarrow$ (3); man muß nur zu einer Teilfolge von $(j)_{j\in\mathbb{N}}$ übergehen.

Der Rest ist eine Implikation aus der folgenden, leicht zu beweisenden allgemeinen Aussage: *Besitzt eine Cauchy–Folge in einem $\mathbb{K}$–metrischen Raum eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent zum gleichen Limes.* □

Bemerkung. In dem Schritt von (1) nach (2) wurde die übliche Formulierung des Archimedischen Axioms verwendet: *Zu je zwei positiven Elementen $a,\, b \in \mathbb{K}$ gibt es eine natürliche Zahl j, so daß $a < jb$.* Bevor man den Beweis der folgenden Konklusion durchführt, muß man erst zeigen, daß die eben formulierte Bedingung äquivalent ist zu der Unbeschränktheit der Folge $(j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$. Man kann hier gleich ökonomischer vorgehen, indem man in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ den Begriff der *bestimmten Divergenz gegen* ∞ einführt, zeigt, daß eine Folge (a_j) genau dann bestimmt gegen ∞ divergiert, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_j > 0$ für alle $j \ge N$ und

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{a_{j+N}} = 0 \,,$$

und dann den folgenden Satz beweist.

Satz *Für einen angeordneten Körper $\mathbb{K}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *Die Folge $(j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{K}$ unbeschränkt, d. h. es gilt $\lim\limits_{j\to\infty} j = \infty$.*

ii) *Die Folge $\left(\frac{1}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ konvergiert in $\mathbb{K}$ gegen Null.*

iii) *Zu positiven $a,\, b \in \mathbb{K}$ gibt es eine natürliche Zahl j mit $a < jb$.*

iv) *Für jedes $a \in \mathbb{K}$ mit $|\,a\,| < 1$ gilt $\lim\limits_{j\to\infty} a^j = 0$.*

v) *Für jede natürliche Zahl $g \ge 2$ besitzt jedes positive Element $a \in \mathbb{K}$ eine Darstellung* (g–adische Entwicklung)

$$a = \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k\, g^{-k} \,, \quad \ell \in \mathbb{Z} \,, \quad a_k \in \{\,0,\, 1, \ldots, g-1\,\} \subset \mathbb{N} \,.$$

vi) *Jedes Element $a \in \mathbb{K}$ ist Limes einer in $\mathbb{K}$ konvergenten Folge von rationalen Zahlen.*

vii) *In jedem Intervall $[\,a,\, b\,] \subset \mathbb{K}$ mit $a < b$ gibt es Elemente von $\mathbb{Q}$.*

Zusatz *In* vi) *kann die Folge rationaler Zahlen sogar monoton aufsteigend gewählt werden.*

Beweis. Wir führen einen Rundlauf in der angegebenen Reihenfolge durch.

i) $\Longrightarrow$ ii) Dies haben wir weiter oben schon viel allgemeiner begründet.

ii) $\Longrightarrow$ iii) b/a ist eine positive Zahl. Also gibt es ein j mit $1/j < b/a$. Somit ist $a < jb$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Wegen $|\,a\,| < 1$ ist $|\,a^{-1}\,| > 1$ und damit $a^{-1} = 1 + x$ mit positivem $x \in \mathbb{K}$. Mit iii) gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \ge N$ gilt:

$$jx > \varepsilon^{-1} - 1 \,.$$

Die *Bernoulli*sche Ungleichung liefert $(1+x)^j \ge 1 + jx$ und damit

$$| a^j | = | a |^j = \frac{1}{(1+x)^j} \le \frac{1}{1+jx} < \varepsilon .$$

iv) $\Longrightarrow$ v) Wegen $\lim_{j\to\infty} g^j = \infty$ gibt es zu vorgegebenem $a > 0$ eine eindeutig bestimmte ganze Zahl ℓ mit $g^{-\ell} \le a < g^{-\ell+1}$ und weiter eine eindeutig bestimmte Zahl $a_\ell \in \{1, \ldots, g-1\}$, so daß auch $a_\ell g^{-\ell} \le a < (a_\ell + 1) g^{-\ell} \le g^{-\ell+1}$ und also

$$0 \le a - a_\ell g^{-\ell} < g^{-\ell} .$$

Ist $a^{(1)} := a - a_\ell g^{-\ell} = 0$, so sind wir schon fertig. Im anderen Fall gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $k > \ell$ mit $g^{-k} \le a^{(1)} < g^{-k+1}$ und ein Element $a_k \in \{1, \ldots, g-1\}$, so daß $a_k g^{-k} \le a^{(1)} < (a_k + 1) g^{-k} \le g^{-k+1}$ und damit

$$0 \le a^{(2)} := a^{(1)} - a_k g^{-k} = a - \left(a_\ell g^{-\ell} + a_k g^{-k} \right) < g^{-k} .$$

Induktiv fortfahrend gewinnt man die gewünschte g–adische Reihe, die nach Konstruktion und der Voraussetzung iv) gegen a konvergiert.

v) $\Longrightarrow$ vi) Man braucht für positive a nur die Partialsummen einer g–adischen Entwicklung zu wählen. Für negative a betrachtet man die Entwicklung für $-a$.

vi) $\Longrightarrow$ vii) Der Mittelpunkt $m := (a + b)/2$ des Intervalls $[\, a,\, b\,]$ erfüllt $a < m < b$. Da m beliebig genau durch rationale Zahlen approximiert werden kann, gibt es Elemente $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$.

vii) $\Longrightarrow$ i) Es sei $K \in \mathbb{K}$ eine beliebige (positive) Schranke. Dann gibt es eine positive rationale Zahl $q = n_0/m$, $n_0, m \in \mathbb{N}^*$ mit $K < q < K + 1$. Es folgt $K < q \le n$ für alle $n \ge n_0$.

Es bleibt noch der Zusatz zu vi) zu begründen. Für positive Elemente a ist die Behauptung aufgrund des Beweises klar. Ist a negativ, so gibt es, weil $\mathbb{K}$ schon als archimedisch erkannt ist, eine natürliche Zahl n mit $-a < n$. Also ist $a + n$ positiv und damit aufsteigender Limes von rationale Zahlen. Dies ist dann auch für a richtig. □

Bemerkungen. 1. Die g–adische Entwicklung v) ist insbesondere für jede *rationale* Zahl gültig. Es ist wohlbekannt, daß genau die *schließlich periodischen* Entwicklungen die rationalen Zahlen darstellen.

2. Ein Körper $\mathbb{K}$, der die äquivalenten Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, besteht aus *allen* solchen Reihen (und ihren Negativen); siehe auch den letzten Abschnitt. Von daher ist klar (und könnte auch schon hier ausgeführt werden), daß jeder archimedisch angeordnete Körper in einen solchen Körper $\mathbb{K}$ ordnungstreu als Unterkörper eingebettet werden kann und daß der Körper $\mathbb{K}$ (bis auf ordnungserhaltende Körper–Isomorphie) eindeutig bestimmt ist.

Anhang zum ersten Kreis

Wir dokumentieren jetzt an Hand eines Beispiels, daß man zur Charakterisierung der reellen Zahlen vermittels des Vollständigkeitsaxioms und der beiden Intervallschachtelungsprinzipien nicht auf das Archimedische Axiom verzichten kann. Weitere Beispiele zeigen sogar, daß man es weder zu

$(*)$ $\mathbb{K}$ besitzt nichttriviale Nullfolgen

noch zu

$(**)$ $\mathbb{K}$ besitzt analytisch nilpotente Elemente, d. h. Elemente $a \neq 0$ mit $\lim_{j\to\infty} a^j = 0$

abschwächen kann. Man beachte hierbei, daß $(**)$ und damit erst recht $(*)$ tatsächlich in archimedisch angeordneten Körpern erfüllt ist (siehe Punkt iv) in dem obigen Satz).

Die ersten Beispiele sind die sogenannten η_1–*Körper* (siehe z. B. [5]); dies sind angeordnete Körper $\mathbb{K}$ mit der folgenden Eigenschaft: zu je zwei höchstens abzählbar unendlichen (evtl. auch leeren) Teilmengen A, B mit $A < B$ (das bedeutet $a < b$ für alle Elemente $a \in A, b \in B$) gibt es ein Element $x \in \mathbb{K}$ mit $A < \{x\} < B$. Strukturen mit dieser Trennungseigenschaft wurden zuerst von Hausdorff [2] eingeführt. Ein Beispiel eines solchen Körpers ist der Körper ${}^*\mathbb{K}$ der sogenannten *nichtstandard* reellen Zahlen (siehe z. B. [4]). Wendet man diese Trennungseigenschaft auf $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{K}$, $B = \emptyset$ an, so sieht man sofort, daß $\mathbb{K}$ nichtarchimedisch angeordnet ist. Setzt man für eine beliebige Folge (x_k):

$$A = \{0\}, \quad B = \{|x_j - x_k| > 0 : j, k \in \mathbb{N}\},$$

und wählt man ε mit $A < \{\varepsilon\} < B$, so ergibt sich unmittelbar: Jede Cauchy–Folge in $\mathbb{K}$ ist trivial, insbesondere konvergent. Solche η_1–Körper sind also Beispiele von Cauchy–vollständigen Körpern, die keine nichttrivialen Nullfolgen besitzen. Damit genügen sie trivialerweise dem schwachen Intervallschachtelungsprinzip, aber auch dem starken: ist nämlich $I_j = [a_j, b_j]$ eine Intervallfolge mit $I_0 \supset I_1 \supset \cdots$ und, ohne Einschränkung, $a_j < b_j$ für alle j, so wendet man das Trennungsprinzip auf die Mengen

$$A = \{a_j : j \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad B = \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$$

an.

Nun zu einem Beispiel eines nichtarchimedisch angeordneten Körpers, der dem schwachen Axiom der Intervallschachtelung genügt und analytisch nilpotente Elemente enthält. Wir folgen hierbei stark der Präsentation von Efimow [1]. Es sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger angeordneter Körper. Man sieht unschwer, daß der Ring $\mathbb{L}$ der *formalen Laurentreihen*

$$(+) \qquad p = a_0 T^n + a_1 T^{n+1} + a_2 T^{n+2} + \cdots, \quad a_j \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{Z}$$

einen Körper bildet, da jede formale Potenzreihe $1 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$ eine Inverse besitzt. Ist $p \neq 0$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so daß in der Darstellung $(+)$ der Koeffizient a_0 von 0 verschieden ist. Wir nennen $n = n(p)$ die *Ordnung* von p (für $p = 0$ setzt man $n(p) = -\infty$). Eine Laurentreihe p heiße *positiv*, wenn $n(p) > -\infty$ und $a_0 > 0$. Die Menge P der positiven Elemente erfüllt augenscheinlich

$$P \cup (-P) \cup \{0\} = \mathbb{K}, \quad P \cap (-P) = \emptyset, \quad P + P \subset P \quad \text{und} \quad P \cdot P \subset P$$

und definiert also eine Anordnung auf $\mathbb{L}$. Man überzeugt sich leicht davon, daß

$$\lim_{j\to\infty} T^j = 0,$$

$\mathbb{L}$ besitzt also analytisch nilpotente Elemente. Ferner ist $0 < T < a$ für jedes $a \in \mathbb{K}$, $a > 0$ und folglich $j < T^{-1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Also ist $\mathbb{L}$ nichtarchimedisch angeordnet.

In $\mathbb{L}$ ist bei beliebigem $\mathbb{K}$ das schwache Intervallschachtelungsaxiom gültig. Dies sieht man wie folgt: Es sei $I_j = [\,p_j,\, q_j\,]$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{L}$. Da man zu einer unendlichen Teilfolge übergehen kann, darf man voraussetzen, daß $p_j < p_{j+1} < q_{j+1} < q_j$ für alle j (denn im anderen Fall ist $\bigcap I_j$ trivialerweise nicht leer). Es sei $n_j = n\,(p_j)$. Diese Folge muß nach unten beschränkt sein; denn wäre $\lim n_j = -\infty$ (ohne Einschränkung können wir wieder zu einer Teilfolge übergehen) und, wieder aus demselben Grunde, $n_j > n_{j+1}$ für alle j, so müßten die Anfangskoeffizienten $a_0^{(j)}$ von

$$p_j \;=\; a_0^{(j)}\,T^{n_j} + a_1^{(j)}\,T^{n_j+1} + \cdots\,, \quad j \geq 1$$

positiv sein wegen $p_{j+1} - p_j > 0$. Dann wäre bei vorgegebenem k für hinreichend großes j aber $n_j < n\,(q_k)$ und damit

$$p_j - q_k > 0\,,$$

was nicht sein kann. Mit dem gleichen Argument für $-q_j < -q_{j+1} < -p_k$ erhält man auch die Beschränktheit der Folge $n\,(q_j)$ nach unten. Es gibt folglich eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ derart, daß wir schreiben können

$$p_j \;=\; a_0^{(j)}\,T^m + a_1^{(j)}\,T^{m+1} + \cdots$$

$$q_j \;=\; b_0^{(j)}\,T^m + b_1^{(j)}\,T^{m+1} + \cdots\,,$$

wobei die Anfangskoeffizienten $a_0^{(j)}$ und $b_0^{(j)}$ aber Null sein dürfen. Nun folgt aus $p_j < p_{j+1} < \cdots < q_{j+1} < q_j$:

$$(++) \qquad a_0^{(j)} \leq a_0^{(j+1)} \leq \cdots \leq b_0^{(j+1)} \leq b_0^{(j)}\,.$$

Gilt zusätzlich $\lim\,(q_j - p_j) = 0$, so muß für hinreichend großes $j \geq j_0$ die Ungleichung $q_j - p_j < T^{m+1}$ bestehen, woraus $b_0^{(j)} = a_0^{(j)}$ für alle $j \geq j_0$ folgt. Wir setzen

$$c_0 \;:=\; a_0^{(j)} \;=\; b_0^{(j)}\,, \quad j \geq j_0\,.$$

Induktiv fortfahrend konstruiert man eine aufsteigende Folge

$$j_0 < j_1 < j_2 < \cdots$$

mit

$$c_k \;:=\; a_k^{(j)} \;=\; b_k^{(j)}\,, \quad j \geq j_k\,.$$

Die Reihe $\sum\limits_{k \geq 0} c_k\,T^{k+m}$ liegt in allen Intervallen I_j.

Ist $\mathbb{K}$ speziell ein η_1–Körper, so genügt $\mathbb{L}$ sogar dem starken Intervallschachtelungsprinzip. Die ersten Schritte für den Beweis dieser Aussage stimmen mit den obigen bis einschließlich der Ungleichungen $(++)$ überein. Nun argumentiert man wie folgt weiter: entweder ist $\lim\left(b_0^{(j)} - a_0^{(j)}\right) = 0$ und damit $c_0 = a_0^{(j)} = b_0^{(j)}$ für $j \geq j_0$ und man fährt mit der nächsten Koeffizientenfolge fort, oder es gibt ein c_0 mit

$$a_0^{(j)} < c_0 < b_0^{(j)} \quad \text{für alle} \quad j\,.$$

Dann ist aber schon $p_j < c_0 T^m < q_j$ für alle j.

Ist dagegen $\mathbb{K}$ selbst archimedisch angeordnet, so genügt der Körper $\mathbb{L}$ nicht dem starken Intervallschachtelungsprinzip. Man braucht dazu nur die Folge der Intervalle

$$I_j = [\,jT,\, 1/j\,]$$

zu betrachten, deren Durchschnitt offensichtlich leer ist. (Für ein analoges Argument reicht schon die Voraussetzung, daß $\mathbb{K}$ nichttriviale Nullfolgen besitzt).

Auch bei (1) kann man das Archimedische Axiom nicht abschwächen. Es ist wohlbekannt, daß sich jeder angeordnete Körper $\mathbb{K}$ ordnungserhaltend und *dicht* in einen Cauchy–vollständigen angeordneten Körper $\widetilde{\mathbb{K}}$ als Unterkörper einbetten läßt. Daraus folgt sofort: Besitzt $\mathbb{K}$ analytisch nilpotente Elemente, so auch $\widetilde{\mathbb{K}}$; $\mathbb{K}$ ist genau dann nichtarchimedisch angeordnet, wenn $\widetilde{\mathbb{K}}$ dies ist. Also existieren nichtarchimedisch angeordnete Cauchy–vollständige Körper mit analytisch nilpotenten Elementen. Außerdem folgt mit diesem Argument, daß es tatsächlich einen Körper $\mathbb{K}$ gibt, der alle Eigenschaften (1) bis (5) besitzt, nämlich die Cauchy–Vervollständigung des Körpers $\mathbb{Q}$ der *rationalen Zahlen* (siehe hierzu auch den letzten Abschnitt).

2 Der zweite Kreis

Im zweiten Kreis geht es im wesentlichen um das *Supremumsaxiom* und den *Zwischenwertsatz* und seine logischen Verbindungen zu dem Begriff des *Zusammenhangs*. Um die folgenden Schritte konsistent durchführen zu können, muß man zuerst den Begriff des Supremums einer nichtleeren Teilmenge von $\mathbb{K}$ erläutern. Danach muß man den Begriff der *offenen* Mengen in einem $\mathbb{K}$–metrischen Raum X in der üblichen Weise einführen und zumindest erwähnen, daß nichtleere Teilmengen eines solchen Raumes eine metrische Struktur „erben“. Zusammenhang eines Raumes bedeutet dann die Unmöglichkeit, den Raum in zwei disjunkte nichtleere offene Mengen zu zerlegen. Man nennt einen $\mathbb{K}$–metrischen Raum *total unzusammenhängend*, wenn außer der leeren Menge nur die einpunktigen Teilmengen zusammenhängend sind. Die *Stetigkeit* einer Abbildung zwischen solchen Räumen wird mit der ε–δ–Definition eingeführt. Man sieht leicht, daß dies zur *Folgenstetigkeit* äquivalent ist, wenn der Körper $\mathbb{K}$ dem Axiom $(*)$ genügt (zur Definition siehe den Anhang zum ersten Kreis). Der tiefere Grund für diese Aussage liegt in der einfach zu beweisenden Tatsache, daß $\mathbb{K}$–metrische Räume unter der Voraussetzung $(*)$ dem *1. Abzählbarkeitsaxiom* genügen. Damit sind Teilmengen solcher Räume genau dann abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen sind. Das *Dedekindsche Schnittaxiom* wird in der üblichen Weise verwendet: Ist $\mathbb{K} = A \cup B$ mit nichtleeren Mengen $A \leq B$, so existiert ein $c \in \mathbb{K}$ mit $A \leq \{c\} \leq B$.

Der zweite „Halbkreis“, der sich aber aufgrund des ersten Kreises tatsächlich zu einem vollständigen Kreis schließt, hat die folgende Gestalt: (4) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (7) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (9) $\Longrightarrow$ (10) $\Longrightarrow$ (11) $\Longrightarrow$ (12) $\Longrightarrow$ (2). Hierbei bedeutet:

(6) Existenz von Suprema für nach oben beschränkte, nicht leere Mengen

(7) $[\,0,\,1\,]$ ist zusammenhängend

(8) $\boxed{\mathbb{K} \text{ ist nicht total unzusammenhängend}}$

(9) $\boxed{\begin{array}{c}\text{Alle Intervalle} \\ \text{sind zusammenhängend}\end{array}}$

(10) $\boxed{\begin{array}{c}\text{Satz von Bolzano} \\ \text{(Zwischenwertsatz)}\end{array}}$

(11) $\boxed{\mathbb{K} \text{ ist zusammenhängend}}$

(12) $\boxed{\text{Dedekindsches Schnittaxiom}}$

Bemerkung. Wenn man will, kann man leicht einige Zwischenschritte fortlassen. Insbesondere ist das Dedekindsche Axiom für den Kurs völlig überflüssig, sollte aber aus historischen Gründen nicht außer Betracht bleiben.

Beweis. (4) $\Longrightarrow$ (6) Wir reproduzieren den üblichen Beweis. Da die vorgegebene Menge $A \subset \mathbb{K}$ nicht leer ist und eine obere Schranke besitzt, gibt es mindestens ein Element $a_0 \in A$ und eine obere Schranke $b_0 \in \mathbb{K}$ von A. Ist zufällig $a_0 = b_0$, so sind wir schon fertig; denn dann ist $a_0 = b_0$ ein *größtes* Element von A, also insbesondere ein Supremum. Wir können daher annehmen, daß das Intervall $I_0 = [\,a_0,\, b_0\,]$ nicht nur aus einem Punkt besteht. Wir konstruieren nun induktiv eine Intervallschachtelung $I_j = [\,a_j,\, b_j\,]$ mit der folgenden Eigenschaft: $I_j \cap A \neq \emptyset$, b_j ist obere Schranke von A, und die Länge von I_j ist die Hälfte der Länge von I_{j-1}. Dies ist, außer der letzten Aussage, insbesondere für I_0 erfüllt. Ist schon I_j konstruiert, so betrachtet man den Mittelpunkt $m_j = (a_j + b_j)/2$ des Intervalls I_j. Ist m_j eine obere Schranke, so setzt man $a_{j+1} = a_j,\, b_{j+1} = m_j$. Im anderen Fall setzt man $a_{j+1} = m_j,\, b_{j+1} = b_j$. Auf jeden Fall erfüllt dann $I_{j+1} = [\,a_{j+1},\, b_{j+1}\,]$ die geforderten Eigenschaften. Es sei K das einzige Element im Durchschnitt dieser Intervalle. Ist $a \in A$ beliebig, so ist $a \leq b_j$ für alle j und damit $a \leq \lim\limits_{j\to\infty} b_j = K$. Somit ist K eine obere Schranke von A. Ist umgekehrt $K' < K$, so gibt es wegen $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = K$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_k > K'$. Wegen $I_k \cap A \neq \emptyset$ gibt es dann Elemente $a \in A$, die größer als K' sind. Somit ist K' keine obere Schranke von A. Mit anderen Worten: K ist die kleinste obere Schranke von A.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Es seien U_0, U_1 offene Mengen in $\mathbb{K}$ mit $I_0 \cup I_1 = I = [\,0,\, 1\,]$ und $I_0 \cap I_1 = \emptyset$, wobei $I_j := I \cap U_j$, $j = 0, 1$. Ohne Einschränkung sei $0 \in I_0$. Wir setzen dann $A := \{a \in I : [\,0,\, a\,] \subset I_0\}$. Wegen $0 \in A$ ist A nicht leer und wegen $A \subset I$ nach oben beschränkt.

Folglich existiert das Supremum α von A. Es ist zu zeigen, daß α zu A gehört und $\alpha = 1$ ist; denn dann ist $I = I_0$ und $I_1 = \emptyset$. Würde α nicht zu A gehören, so auch nicht zu I_0, denn wegen der Offenheit von U_0 wäre ein ganzes Intervall $(\alpha - \varepsilon, \alpha]$ mit positivem ε in I_0 enthalten und damit auch $[0, \alpha] = [0, a] \cup [a, \alpha]$ für geeignetes $a \in A$ mit $\alpha - \varepsilon < a < \alpha$. Also ist bei $\alpha \notin A$ notwendig $\alpha \in I_1$, was wegen der Offenheit von U_1 aber sofort zu einem Widerspruch zu der Tatsache führt, daß α das Supremum von A ist. Somit ist $\alpha \in A$ und folglich $[0, \alpha] \subset I_0$. Wäre nun $\alpha \neq 1$, so könnte man wegen der Offenheit von U_0 ein größeres α' mit dieser Eigenschaft finden. Widerspruch!

Bei (7) $\Longrightarrow$ (8) ist nichts zu zeigen.

(8) $\Longrightarrow$ (9) Wir nehmen zunächst an, daß es ein nichttriviales zusammenhängendes *Intervall* $I = [a, b]$ gibt. Für $c \leq d$ ist die affine Abbildung

$$\alpha(x) := c + \frac{d - c}{b - a}(x - a), \quad x \in \mathbb{K}$$

stetig und bildet I auf das Intervall $[c, d]$ ab. Da nach einem leicht zu beweisenden Lemma stetige Bilder von zusammenhängenden Mengen wieder zusammenhängend sind, besitzt also auch das letztere die gewünschte Zusammenhangs–Eigenschaft. Hat man ein beliebiges Intervall J vorgegeben, so schließt man wie folgt: Ist J nicht zusammenhängend, so schreibe man J als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Mengen J_0, J_1, die Durchschnitte von J mit offenen Mengen in $\mathbb{K}$ sind. Wähle nun $c \in J_0$ und $d \in J_1$ und nehme ohne Einschränkung $c < d$ an. Aus der Annahme über J folgt dann aber sofort, daß das Intervall $[c, d]$ nicht zusammenhängend ist, was im krassen Widerspruch zum ersten Teil des vorstehenden Beweises steht. Wir müssen also nur noch unsere erste Annahme rechtfertigen. Es sei $Z \subset \mathbb{K}$ eine nichttriviale zusammenhängende Teilmenge, und es seien a, b Elemente in Z mit $a < b$. Wir setzen $I = [a, b]$. Gäbe es ein $c \in I$, das nicht in Z enthalten ist, so wäre $Z = \{x \in Z : x < c\} \cup \{x \in Z : x > c\}$ im Gegensatz zur Voraussetzung des Zusammenhangs von Z; somit ist $I \subset Z$. Wäre I nicht zusammenhängend, so würde eine stetige Funktion f auf I existieren, die genau die Werte 0 und 1 annimmt: Läßt sich nämlich I nichttrivial als disjunkte Vereinigung $I_0 \cup I_1$ schreiben mit $I_j = I \cap U_j$, U_j offen in $\mathbb{K}$, so ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in I_0 \\ 1, & x \in I_1 \end{cases}$$

stetig auf I. Dann ist aber die durch $f(x) := f(a)$, $x \leq a$, $x \in Z$, $f(x) := f(b)$, $x \geq b$, $x \in Z$ definierte Funktion stetig auf Z und somit Z nicht zusammenhängend, da die Bildmenge $f(Z) = \{0, 1\}$ nicht zusammenhängend ist.

(9) $\Longrightarrow$ (10) Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{K}$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Es sei ohne Einschränkung $f(a) < f(b)$ und c mit $f(a) < c < f(b)$ fest gewählt. Dann sind die Mengen $\{x \in I : f(x) < c\}$ und $\{x \in I : f(x) > c\}$ offen in I, disjunkt und nicht leer. Wäre $f(x) \neq c$ für alle $x \in I$, so wäre I Vereinigung dieser beiden Mengen. Widerspruch!

(10) $\Longrightarrow$ (11) Ist $\mathbb{K}$ nicht zusammenhängend, so schreibt sich $\mathbb{K}$ in der Form $U_0 \cup U_1$ mit nichtleeren, offenen, disjunkten Mengen U_0, U_1. Wähle dann $a \in U_0$ und $b \in U_1$ und setze

ohne Einschränkung $a < b$ voraus. Definiere ferner $I_j := [a, b] \cap U_j$, $j = 0, 1$. Dann ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in I_0 \\ 1, & x \in I_1 \end{cases}$$

stetig auf I, nimmt aber den zwischen $f(a) = -1$ und $f(b) = 1$ liegenden Wert 0 nicht an.

(11) $\Longrightarrow$ (12) Es seien A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit $A \cup B = \mathbb{K}$ und $A \le B$. Wären A und B offen, so müßte $A \cap B = \emptyset$ gelten (anderenfalls gäbe es Elemente $a \in A$, $b \in B$ mit $a > b$), was dem Zusammenhang von $\mathbb{K}$ widerspräche. Also ist eine der beiden Mengen nicht offen; sei diese ohne Einschränkung A. Dann gibt es einen nicht inneren Punkt $c \in A$. Da alle kleineren Werte zu A gehören müssen, ist dann notwendig $[c, c + \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$. Daraus folgt sofort $A \le \{c\} \le B$.

(12) $\Longrightarrow$ (2) Es sei $a_j \in \mathbb{K}$ eine monoton aufsteigende, nach oben beschränkte Folge. Man setzt dann

$$A := \{ x \in \mathbb{K} : x \le a_j \text{ für ein } j \}, \quad B := \{ x \in \mathbb{K} : x > a_j \text{ für alle } j \}.$$

Sei c der durch $A \le B$ bestimmte Schnitt. Nach Voraussetzung ist $a_j \le c$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wird nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es ein j_0, so daß $a_{j_0} > c - \varepsilon$ (denn sonst wäre $c - \varepsilon/2 \in B$). Da die Folge a_j monoton aufsteigt, ist sie gegen c konvergent. $\square$

Wir schließen noch eine Charakterisierung der reellen Zahlen vermittels des Begriffs des *wegweisen Zusammenhangs* an. Ein $\mathbb{K}$–metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : I \to X$, $I := [0, 1] \subset \mathbb{K}$, gibt mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Wir behaupten die Äquivalenz der letzten Axiome mit

(13)

Wegzusammenhängende $\mathbb{K}$–metrische Räume sind zusammenhängend

Dies sieht man z. B. via (7) $\Longleftrightarrow$ (13) Es sei zunächst X ein wegweise zusammenhängender Raum, und es gelte $X = U_0 \cup U_1$ mit nichtleeren offenen Mengen U_0, U_1, so daß $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Wähle dann $x_0 \in U_0$, $x_1 \in U_1$ und einen stetigen Weg $\gamma : I \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Dann sind $I_j := \gamma^{-1}(U_j)$, $j = 0, 1$, disjunkte offene Teilmengen von I mit $I = I_0 \cup I_1$. Widerspruch! Umgekehrt ist das Einheitsintervall I wegzusammenhängend, da für alle $a, b \in I$ das Bild des stetigen Weges $\gamma : I \to I$ mit $\gamma(t) := a + t(b - a)$ in I liegt.

Bemerkung. Da aus der Existenz des Supremums das Archimedische Axiom und das Intervallschachtelungsprinzip folgt, kann man (6) auch ersetzen durch die folgende Aussage.

(6)′

Zu jeder nichtleeren, nach oben beschränkten Menge $A \subset \mathbb{K}$ gibt es eine aufsteigende Folge (a_j) mit $a_j \in A$ und $\lim a_j = \sup A$

Der dritte Kreis

Es sei im folgenden weiterhin $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, und $f : I := [a, b] \to \mathbb{K}$ sei eine Funktion. Zur Definition der *Differenzierbarkeit* an einer Stelle $c \in I$ betrachten wir den *Differenzenquotienten*

$$(\Delta f)(x) \ = \ \frac{f(x) \ - \ f(c)}{x \ - \ c} \ , \quad x \in I \ , \quad x \neq c$$

und fordern, daß es eine (notwendig eindeutig bestimmte) Zahl A gibt, die wir die (erste) *Ableitung* oder den *Differentialquotienten* $f'(c)$ von f an der Stelle c nennen, so daß es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|(\Delta f)(x) \ - \ A| \ < \ \varepsilon$$

für alle $x \in I$ mit $0 \ < \ |x \ - \ c| \ < \ \delta$.

Bemerkung. Genügt der Körper dem Axiom $(*)$, so stimmt die Definition der Ableitung mit der folgenden (a priori *formalen*) Definition überein:

$$f'(c) \ := \ \lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x) \ - \ f(c)}{x \ - \ c} \ ,$$

wobei die Existenz des darin vorkommenden Grenzwertes bedeutet, daß der Grenzwert

$$\lim_{j \to \infty} \frac{f(x_j) \ - \ f(c)}{x_j \ - \ c}$$

für alle Folgen (x_j) mit $x_j \in I$, $x_j \neq c$ und $\lim x_j = c$ existiert und von der speziellen Auswahl der Folge (x_j) unabhängig ist. Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir voraussetzen, daß es solche Folgen tatsächlich gibt, d. h. daß der Körper $\mathbb{K}$ der Bedingung $(*)$ genügt.

Man sieht unmittelbar, daß differenzierbare Funktionen auch stetig sind. Aus der Definition folgt nämlich zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$|f(x) \ - \ f(c)| \ < \ (\varepsilon \ + \ |f'(c)|)\,|x \ - \ c|$$

für alle $x \in I$ mit $x \neq c$ und $|x \ - \ c| < \delta$.

Wir sagen weiter, f erfülle die Bedingung $(+)_n$, $n \in \mathbb{N}$ fest, wenn f auf $I := [a, b]$ n–mal stetig differenzierbar und die n–te Ableitung $f^{(n)}$ noch auf (a, b) differenzierbar ist. Die in den nachstehenden Axiomen auftretenden Sätze haben die folgende Bedeutung.

(15) Satz von Rolle. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ eine Funktion mit $(+)_0$ und $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

(16) Verallgemeinerter (oder 2.) Mittelwertsatz. Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen mit $(+)_0$ und ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

(17) Mittelwertsatz. Erfüllt $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ die Bedingung $(+)_0$, so existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) .$$

(18) Satz von der Taylorentwicklung. Erfüllt $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ die Bedingung $(+)_n$, so gibt es für jedes $x \in (a, b]$ ein c mit $a < c < x$, so daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x) ,$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

(Restglied in der Form von Lagrange).

(19) Erfüllt f $(+)_n$ und ist $f^{(n+1)} = 0$ auf (a, b), so ist f eine polynomiale Funktion von höchstens n–tem Grad, also eine Funktion der Gestalt

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n , \quad a_j \in \mathbb{K} .$$

(20) Erfüllt f $(+)_0$ und ist $f' = 0$ auf (a, b), so ist f konstant.

Der dritte „Kreis“ besteht aus den Implikationen (4) $\Longrightarrow$ (14) $\Longrightarrow$ (15) $\Longrightarrow$ (16) $\Longrightarrow$ (17) $\Longrightarrow$ (18) $\Longrightarrow$ (19) $\Longrightarrow$ (20) $\Longrightarrow$ (7) mit:

(14) Stetige Funktionen auf $[a, b]$ nehmen ihr Maximum an

(15) Satz von Rolle

(16) Verallgemeinerter Mittelwertsatz

(17) $\boxed{\text{Mittelwertsatz}}$

(18) $\boxed{\text{Taylor Entwicklung mit Lagrange Restglied}}$

(19) $\boxed{\begin{array}{c}\text{Charakterisierung von}\\ \text{polynomialen Funktionen}\\ \text{durch } f^{(n+1)} \equiv 0\end{array}}$

(20) $\boxed{f' \equiv 0 \implies f = \text{const.}}$

Beweis. (4) $\Longrightarrow$ (14) Mit (4) sind auch (5), (6) und $(6)'$ erfüllt. Es sei nun $K := \sup f(I) \in \mathbb{K}$, wenn die Menge $f(I)$ nach oben beschränkt ist. Im anderen Fall setzen wir $K = \infty$. Es gibt dann mit Sicherheit eine Folge $x_j \in I$ mit $\lim_{j\to\infty} f(x_j) = K$. Wegen (5) können wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, daß der Grenzwert $c \in I$ der Folge (x_j) existiert. Da f (folgen–)stetig ist, ergibt sich sofort

$$K = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = f(c) .$$

Somit nimmt die Funktion f an der Stelle c ihr Maximum an.

(14) $\Longrightarrow$ (15) Wir zeigen als erstes, daß aus der Bedingungen (14) folgt, daß $\mathbb{K}$ sogar archimedisch angeordnet ist; oder anders ausgedrückt: ist $\mathbb{K}$ nichtarchimedisch, so ist (14) nicht erfüllt. In diesem Fall gibt es „unendlich kleine" positive Elemente in $\mathbb{K}$, also Elemente $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, und damit auch „unendlich große" Elemente K, d. h. $K > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen

$$U_m := \{x \in \mathbb{K} : x = m \text{ oder } |x - m| \text{ unendlich klein}\} , \quad m \in \mathbb{N}^* ,$$

sind offen (und paarweise disjunkt), da mit ε und ε' auch $\varepsilon + \varepsilon'$ unendlich klein ist: Ist nämlich $x \in U_m$ und $|x - x'| < \varepsilon$ für ein unendlich kleines positives ε, so ist auch $x' \in U_m$. Wir behaupten, daß die (notwendig offene) Vereinigung der U_m aber auch *abgeschlossen* ist, also die Offenheit des Komplementes

$$U_0 := \mathbb{K} \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} U_m .$$

Ist nämlich $x \in U_0$ und $\varepsilon > 0$ unendlich klein, so sieht man wie oben, daß das gesamte Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ in U_0 enthalten sein muß.

Für jedes unendlich große $K > 0$ ist somit $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$ eine offene Überdeckung von $[0, K]$, aus der man kein einziges Element fortlassen darf. Definiert man

$$f(x) := \begin{cases} m, & x \in U_m \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

so ist f stetig, nimmt aber auf dem Intervall $[0, K]$ kein Maximum an.

Wir zeigen nun, daß der Satz von Rolle gültig ist. Nach Voraussetzung ist die Funktion f stetig auf $[a, b] \subset \mathbb{K}$, nimmt also ihr Maximum und Minimum an. Wir können annehmen, daß eine der Extremalstellen c im offenen Intervall (a, b) liegt, denn sonst ist $f(x) \equiv f(a)$ und $f' = 0$. Es liege ohne Einschränkung bei c ein Maximum vor (sonst betrachte man die Funktion $-f$). Dann gilt für den Differenzenquotienten von f:

$$(\Delta f)(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \begin{cases} \geq 0, & x < c \\ \leq 0, & x > c. \end{cases}$$

Aus der Definition des Differentialquotienten folgt dann für alle $x > c$, die hinreichend nahe bei c liegen:

$$f'(c) < \varepsilon + (\Delta f)(x) \leq \varepsilon .$$

Somit ist $f'(c) \leq 0$. Entsprechend ergibt sich für hinreichend nahe bei c liegende $x \in I$ mit $x < c$, daß

$$f'(c) > -\varepsilon + (\Delta f)(x) \geq -\varepsilon$$

und damit $f'(c) \geq 0$.

(15) $\Longrightarrow$ (16) Betrachte die Funktion

$$F(x) := (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) .$$

F erfüllt $(+)_0$ und $F(a) = F(b) = 0$. Somit existiert ein $c \in (a, b)$ mit $F'(c) = 0$, also

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)) .$$

Wäre $g(a) = g(b)$, so müßte es ein $\eta \in (a, b)$ geben mit $g'(\eta) = 0$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung an g.

(16) $\Longrightarrow$ (17) Setze $g(x) = x$.

(17) $\Longrightarrow$ (18) Zu jedem $a < x \leq b$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\rho(x) \in \mathbb{K}$ mit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \rho(x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Setze nun bei festem x mit $a < x \leq b$:

$$F(t) := f(x) + \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j + \rho(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Nach Voraussetzung an f ist F stetig für $t \in [a, x]$ und differenzierbar auf (a, x). Ferner ist $F(x) = 0$ und $F(a) = 0$ nach Definition von $\rho(x)$. Somit existiert ein c zwischen a und x, s. d. $F'(c) = 0$. Nun ist

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j - \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x-t)^{j-1} \right\} - \rho(x)\frac{(x-t)^n}{n!}$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \rho(x)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Wegen $a < c < x$ folgt $\rho(x) = f^{(n+1)}(c)$.

(18) $\Longrightarrow$ (19) Nach Voraussetzung ist $R_{n+1}(x) = 0$ für alle $x > a$. Somit gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j, \quad x \in [a, b].$$

(19) $\Longrightarrow$ (20) Trivial, da polynomiale Funktionen vom Grad ≤ 0 Konstanten sind.

(20) $\Longrightarrow$ (7) Ist $[0, 1]$ nicht zusammenhängend, so gibt es offensichtlich lokal konstante Funktionen, die aber nicht konstant sind. □

Bemerkung. Den Trick im Beweisschritt (17) $\Longrightarrow$ (18) findet man z. B. bei Heuser [3].

Die vorstehenden Axiome sind auch äquivalent zu den folgenden beiden Aussagen. Hierbei heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$, I ein beliebiges Intervall, *konvex*, wenn für alle $a, b \in I$, $a < b$, gilt:

$$f(x) \leq f(a) + (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$

$$\text{(21)} \quad \boxed{f' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ monoton wachsend}}$$

$$\text{(22)} \quad \boxed{f'' \geq 0 \Longrightarrow f \text{ konvex}}$$

Denn offensichtlich wird (21) von dem Mittelwertsatz (17) impliziert. Aus (21) folgt aber mit $f' = 0$ auch $f' \geq 0$ und $(-f)' \geq 0$ und daraus die wachsende Monotonie von f und $-f$. Also muß f konstant sein, d. h. (20) ist erfüllt. Auch (22) gewinnt man auf bekannte Weise aus den bisher abgeleiteten Aussagen. Ist umgekehrt (22) erfüllt und f eine differenzierbare Funktion mit $f' = 0$, so ist f auch zweimal differenzierbar mit $f'' = 0$. Nach (22) muß dann sowohl f als auch $-f$ konvex sein; also ist f eine affin–lineare Funktion: $f(x) = dx + c$. Da aber auch die erste Ableitung verschwindet, ist notwendig $d = 0$ und damit $f = c$ konstant. Somit ist auch (20) erfüllt. □

Bemerkung. Verlangt man die Richtigkeit z. B. des Zwischenwertsatzes oder des Mittelwertsatzes nur für *Polynome* anstelle von stetigen oder differenzierbaren Funktionen, so stößt man auf die weit größere Klasse der von Emil Artin und Otto Schreier eingeführten und intensiv studierten *reell abgeschlossenen Körper*.

Der vierte Kreis

Der vierte Kreis beinhaltet *Kompaktheitsaussagen* im Sinne von Eigenschaften offener Überdeckungen von Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{K}$. Man beachte hierbei, daß es sogar eine Klassifikation aller (nicht notwendig angeordneten) *lokalkompakten* Körper gibt. Das *Lebesguesche Lemma* wird in der folgenden Formulierung verwendet: Zu jeder offenen Überdeckung

$$[a, b] \subset \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$$

gibt es eine Zahl $\delta > 0$, die auch *Lebesguesche Zahl der Überdeckung* genannt wird, s. d. es zu je zwei Elementen $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $|x_1 - x_2| \leq \delta$ ein $\iota \in I$ gibt mit $x_1, x_2 \in U_\iota$. Wir beweisen die folgenden Implikationen: (4) $\Longrightarrow$ (23) $\Longrightarrow$ (24) $\Longrightarrow$ (25) $\Longrightarrow$ (26) $\Longrightarrow$ (27) $\Longrightarrow$ (2).

(23) $[0, 1]$ ist kompakt

(24) $\mathbb{K}$ ist archimedisch
&
Lebesguesches Lemma

(25) $\mathbb{K}$ ist archimedisch
&
Stetige Funktionen auf $[a, b]$
sind gleichmäßig stetig

(26) Stetige Funktionen auf $[a, b]$
können durch Treppenfunktionen
beliebig genau approximiert werden

(27) $\mathbb{K}$ erfüllt $(*)$
&
Stetige Funktionen auf $[a, b]$
sind beschränkt

Bemerkung. Mit $[0, 1]$ ist natürlich auch jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{K}$ kompakt.

Bemerkung. Die Aussagen (24), (25), (26) und (27) habe ich nicht explizit als Charakterisierungen der reellen Zahlen in der Literatur gefunden. Es ist klar, daß man (27) auch durch

(28) $\boxed{\text{Stetige Funktionen auf } [a, b] \text{ sind durch eine natürliche Zahl } n \text{ nach oben beschränkt}}$

ersetzen kann, da man hieraus sofort ableiten kann, daß $\mathbb{K}$ archimedisch sein muß. (Für positives a ist die Funktion $f(x) = ax$ stetig auf dem Intervall $[0, 1]$; folglich ist $a = f(1) \leq n$ mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$). Man findet dieses Axiom z. B. bei Steiner [7].

Beweis. Wir zeigen als erstes, daß aus den Bedingungen (23) und (26) folgt, daß $\mathbb{K}$ (sogar) archimedisch angeordnet ist; oder anders ausgedrückt: ist $\mathbb{K}$ nichtarchimedisch, so gilt weder (23) noch (26). Im Falle von (23) haben wir dies schon im Beweis der Implikation (14) $\Longrightarrow$ (15) gesehen, wo wir in jedem nichtarchimedisch angeordneten Körper ein Intervall $[0, K]$ mit einer abzählbar unendlichen offenen Überdeckung konstruierten, aus der man kein Element fortlassen kann. Somit ist dieses Intervall und damit auch das Standardintervall nicht kompakt.

Gilt (26), so gibt es insbesondere für die Funktion $f(x) = x$ auf $[0, 1]$ und unendlich kleinem $\varepsilon > 0$ eine Unterteilung $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ und Elemente $c_j \in \mathbb{K}$ mit

$$|x - c_j| < \varepsilon, \quad a_j \leq x \leq a_{j+1}.$$

Hieraus folgt sofort, daß alle a_j und c_j unendlich klein sein müßten, was wegen $a_n = 1$ nicht der Fall sein kann.

Wir sind nun in der Lage, die angegebenen Implikationen zu beweisen. (4) $\Longrightarrow$ (23). Es sei $\cup_{\iota \in I} U_\iota \supset [0, 1]$ eine offene Überdeckung, aus der man keine endliche Teilüberdeckung auswählen kann. Dies bleibt dann richtig für eines der beiden Intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\frac{1}{2}, 1]$. So fortfahrend findet man eine Intervallschachtelung $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, so daß kein I_j von endlich vielen U_ι überdeckt wird. Es sei nun $x_0 \in \cap_{j=0}^{\infty} I_j$. Dann gibt es ein $\iota_0 \in I$ mit $x_0 \in U_{\iota_0}$ und damit auch ein j_0 mit $I_{j_0} \subset U_{\iota_0}$. Widerspruch !

(23) $\Longrightarrow$ (24) Jedes U_ι ist Vereinigung von Intervallen $\{|x - x_0| < \delta_0\}$ mit

$$\{|x - x_0| < 2\delta_0\} \subset U_\iota.$$

Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, wird es von endlich vielen solchen Intervallen überdeckt:

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{|x - x_j| < \delta_j\}, \quad \{|x - x_j| < 2\delta_j\} \subset U_{\iota_j}.$$

Es sei nun $\delta := \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ und $x \in [a, b]$, also $|x - x_j| < \delta_j$ für ein j, und x' ein weiteres Element mit $|x - x'| \leq \delta$. Dann folgt $|x' - x_j| \leq |x' - x| + |x - x_j| < \delta + \delta_j \leq 2\delta_j$, und insbesondere $x, x' \in U_{\iota_j}$.

(24) $\Longrightarrow$ (25) Wir zeigen genauer: Zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche (sogar äquidistante) Unterteilung von $[a, b] : a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$, s. d. für alle x_j, ξ_j mit $a_j \leq x_j, \xi_j \leq a_{j+1}$ gilt:

$$| f(x_j) - f(\xi_j) | < \varepsilon .$$

Dies ist, wie man leicht sieht, äquivalent zur gleichmäßigen Stetigkeit von f unter der Zusatzannahme der Gültigkeit des Archimedischen Axioms. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in [a, b]$ ein $\delta_0 = \delta(x_0)$, s. d. aus $|x - x_0| < \delta_0$, $x \in [a, b]$ die Ungleichung $| f(x) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt. Es sei $\delta > 0$ die Lebesguesche Zahl zu der Überdeckung

$$\bigcup_{x_0 \in [a,b]} \{ |x - x_0| < \delta_0 \} ,$$

und $n \in \mathbb{N}$ sei so gewählt, daß

$$\frac{1}{n}(b - a) \leq \frac{\delta}{2} .$$

Für die Zerlegung $a_j = a + \dfrac{j}{n}(b - a)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, ist die Behauptung erfüllt.

(25) $\Longrightarrow$ (26) Trivial wegen der im vorigen Schritt benutzten äquivalenten Formulierung der Voraussetzung.

(26) $\Longrightarrow$ (27) ist trivial aufgrund unserer Vorbemerkung.

(27) $\Longrightarrow$ (2) Wir nehmen dazu an, daß der Körper $\mathbb{K}$ die Bedingung $(*)$ erfüllt, nicht aber (2), und konstruieren dann eine stetige Funktion f auf einem Intervall $[0, K]$, die nicht beschränkt ist. Da (2) nicht gilt, gibt es eine (ohne Einschränkung streng) monoton wachsende Folge $a_0 < a_1 < \cdots$, die nach oben beschränkt ist, aber nicht konvergiert. Wir definieren

$$I_0 = \{ x \in \mathbb{K} : x \leq a_0 \} , \quad I_j = \{ x \in \mathbb{K} : a_{j-1} \leq x \leq a_j \} , \quad j \geq 1 ,$$

und $A = \cup_{j=0}^{\infty} I_j$. Offensichtlich ist A auch Vereinigung der offenen Intervalle $(-\infty, a_{j+1})$ und damit selbst eine *offene* Menge. Wegen des nicht existierenden Limes der Folge $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist aber leicht einzusehen, daß die Menge A in $\mathbb{K}$ auch *folgenabgeschlossen* ist.

Es sei nämlich (b_k) eine Folge in A mit Grenzwert $b \in \mathbb{K}$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es ein j, so daß $b_k \leq a_j$ für fast alle k. Dann ist auch $b \leq a_j$ und damit $b \in A$. Oder es gibt zu jedem j unendlich viele k mit $b_k > a_j$. Hieraus folgt dann $b \geq a_j$ für alle j. Wähle nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein k, so daß $b_k > b - \varepsilon$, und ein j_0 mit $b_k \leq a_{j_0}$. Dann hat man für alle $j \geq j_0$:

$$0 \leq b - a_j \leq b - a_{j_0} \leq b - b_k < \varepsilon$$

im Gegensatz zu der Voraussetzung, daß die Folge (a_j) nicht konvergiert.

Wegen der Bedingung $(*)$ ist die Menge A sogar *abgeschlossen* und damit

$$\mathbb{K} \setminus A = \{ x \in \mathbb{K} : x > a_j \text{ für alle } j \}$$

offen (und nach Voraussetzung nicht leer). Es sei weiter eine (ebenfalls nach $(*)$ existierende) Folge $c_j \in \mathbb{K}$ mit $c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \cdots$ und $\lim_{j\to\infty} c_j = \infty$ gegeben. Man definiere nun $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in I_0 \\ c_{j-1} + \dfrac{x - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}}\,(c_j - c_{j-1}), & x \in I_j\,, \quad j \geq 1 \\ 0, & x \notin A\,. \end{cases}$$

Offensichtlich ist f stetig, aber unbeschränkt auf jedem Intervall $[\,0,\, K\,]$ mit $K \in \mathbb{K} \setminus A$. $\square$

Der fünfte Kreis

Der fünfte Kreis beschäftigt sich mit der (Riemannschen) *Integrationstheorie* und dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*. Wir zeigen die Äquivalenz der folgenden Aussagen zu den früheren. Es ist stets f eine stetige Funktion $f : [\,a,\, b\,] \to \mathbb{K}$. Der Hauptsatz hat hierbei die folgende Formulierung: *Jede stetige Funktion $f : [\,a,\, b\,] \to \mathbb{K}$ besitzt eine Stammfunktion, und je zwei Stammfunktionen unterscheiden sich additiv um eine Konstante.*

(29)

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ erfüllt } (*) \\ \& \\ \text{Für stetiges } f \text{ existiert das Oberintegral} \\ \displaystyle\int_a^{*b} f(x)\,dx \end{array}}$$

(30)

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ erfüllt } (*) \\ \& \\ \text{Für stetiges } f \text{ existiert das Riemannsche Integral} \\ \displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx \end{array}}$$

(31)

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ erfüllt } (*) \\ \& \\ \text{Für stetiges } f \geq 0 \text{ existiert eine Stammfunktion,} \\ \text{und jede Stammfunktion ist monoton wachsend} \end{array}}$$

$$(32) \qquad \boxed{\begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ erfüllt } (*) \\ \& \\ \text{Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung} \end{array}}$$

Beweis. Aus dem Axiom (26) folgt, daß es zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{K}$ mit $\varphi \le f \le \psi$ gibt. Damit ist die Menge

$$\left\{ \int_a^b \psi(x)\, dx : f \le \psi \text{ Treppenfunktion} \right\}$$

nicht leer und nach unten durch

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

mit einer beliebigen Treppenfunktion $\varphi \le f$ beschränkt. Also existiert wegen (6)

$$\int_a^{*b} f(x)\, dx = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\, dx : f \le \psi ,\ \psi \text{ Treppenfunktion} \right\} .$$

Ist umgekehrt (29) oder (30) erfüllt, so ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ notwendig (nach oben) beschränkt, also (27) erfüllt. Insbesondere gibt es wegen (26) zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ und jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \le f \le \psi$ und $\sup_{[a,b]} (\psi - \varphi) \le \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Folglich ist

$$0 \le \int_a^b \psi(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx \le \varepsilon ,$$

und es folgt aus (29) sofort

$$\int_a^{*b} f(x)\, dx = \int_{*a}^b f(x)\, dx ,$$

also (30).

Von (30) nach (31) schließt man wie folgt: Nach Voraussetzung existiert für alle $x \in [a, b]$ das Integral

$$F(x) := \int_a^x f(\xi)\, d\xi .$$

Mit dem üblichen Beweis ergibt sich die Differenzierbarkeit von F mit $F' = f$. Da das Integral additiv ist, gilt für $x_1 < x_2$:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{*x_1}^{x_2} f(x)\, dx \ge 0 ,$$

da $\varphi : [x_1, x_2] \to \mathbb{K}$ mit $\varphi(x) = 0$ eine Treppenfunktion mit $\varphi \le f|[x_1, x_2]$ ist. Ist G eine weitere Stammfunktion, so ist $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ und wegen (20) $G - F =$ const. Insbesondere ist auch G monoton wachsend.

(31) $\Longrightarrow$ (32) Jede stetige Funktion f schreibt sich in der Form $f = f_+ - f_-$ mit den stetigen Funktionen

$$f_+ = \max(f, 0) , \quad f_- = -\min(f, 0) .$$

Da f_+ und f_- nichtnegativ sind, besitzen sie Stammfunktionen F_+ und F_-, und $F := F_+ - F_-$ ist eine Stammfunktion von f. Sei G eine weitere Stammfunktion von f, so ist $H := G - F$ eine Stammfunktion von 0. Also ist $H' = 0 \geq 0$ und $(-H)' = 0 \geq 0$. Nach (31) müssen dann sowohl H als auch $-H$ monoton aufsteigend sein, woraus sofort $H = \text{const.}$ folgt.

Ist schließlich (32) erfüllt, so folgt aus $f' = 0 = 0'$, daß $f = \text{const.}$ Dies ist aber gerade die Aussage (20). $\square$

Andere Charakterisierungen der reellen Zahlen

Bisher haben wir nirgends benutzt, daß durch die vorhergehend als äquivalent erkannten Axiome tatsächlich ein (bis auf ordnungserhaltende Körper–Isomorphie eindeutig bestimmter) Körper charakterisiert ist. Die *Existenz* wird, wie im Anhang zum ersten Kreis schon erwähnt, z. B. durch die allgemeine Theorie der Cauchy–Vervollständigung von $\mathbb{K}$–metrischen Räumen geliefert, womit man sich also auf das Axiom (1) als Leitmotiv für die Konstruktion stützt. (Siehe hierzu auch [6]). Selbstverständlich sollte in jedem Kurs, der die hier angesprochenen Probleme behandelt, auch die (historisch zu belegende) Begründung der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen mit Hilfe der Axiome (2), (3) bzw. (12) erörtert werden.

Wir haben früher (am Ende des ersten Kreises) schon erwähnt, daß sich jeder beliebige archimedisch angeordnete Körper ordnungserhaltend in einen vorgegebenen archimedisch angeordneten, Cauchy–vollständigen Körper einbetten läßt. Dies folgt recht einfach aus dem dort bewiesenen Satz und dem Axiom (2) und impliziert die oben formulierte *Eindeutigkeitsaussage*. Die letzteren lassen sich also auch durch das Axiom der *Maximalität* unter den archimedisch angeordneten Körpern charakterisieren (der Körper $\mathbb{Q}$ der *rationalen* Zahlen ist gerade der *minimale* archimedisch angeordnete Körper). Auch diese Aussage wurde in den früheren Kreisen nicht verwendet.

(33)

$\mathbb{K}$ ist archimedisch & Jeder archimedisch angeordnete Körper läßt sich in $\mathbb{K}$ einbetten

Eine andere Manifestation für die Eindeutigkeit ist das *Axiom der g–adischen Entwicklung*, welches ebenfalls äquivalent zu allen anderen ist.

(34)

g–adische Entwicklung

Hierunter verstehen wir genauer die folgende Aussage: *Für jede natürliche Zahl $g \geq 2$ sind die g–adischen Reihen*

$$\sum_{\ell \leq k} a_k g^{-k} , \quad \ell \in \mathbb{Z} , \quad a_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$$

konvergent in $\mathbb{K}$, und jedes nichtnegative Element in $\mathbb{K}$ läßt sich durch eine solche Reihe darstellen.

Beweis. Die Partialsummen

$$x_j := \sum_{\ell \leq k \leq j} a_k g^{-k}$$

solcher g–adischen Reihen bilden eine monoton aufsteigende Folge. Setzen wir (2) voraus, so ist unter Verwendung von (3) $(g^{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit

$$x_j \leq \sum_{\ell \leq k} (g-1)\, g^{-k} = g^{\ell}\,(g-1)\,\frac{1}{1 - g^{-1}} = g^{\ell+1} .$$

Also ist die gegebene g–adische Reihe konvergent. Die Darstellung jedes positiven Elementes vermittels solcher Reihen ergibt sich, wie wir früher schon gezeigt haben, ganz allgemein für archimedisch angeordnete Körper.

Ist umgekehrt jede g–adische Reihe konvergent, so folgt insbesondere aus der Konvergenz der Reihe $\sum_k g^{-k}$, daß das Element $1/g$ analytisch nilpotent, also die Folge $(g^k)_{k \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen in $\mathbb{K}$ unbeschränkt ist; also ist $\mathbb{K}$ archimedisch und läßt sich somit in einen maximalen archimedisch angeordneten Körper einbetten. Da dessen Elemente ebenfalls durch g–adische Reihen dargestellt werden, muß $\mathbb{K}$ mit dem maximalen Körper übereinstimmen. □

Nehmen wir (33) als gegeben an, so lassen sich leicht weitere äquivalente Aussagen über die reellen Zahlen herleiten; hierzu gehören Aussagen über Reihen wie das Majorantenkriterium, der große Umordnungssatz und die Konklusion „absolut konvergent $\Longrightarrow$ konvergent“.

Warnung Dies ist nicht richtig für die *Kommutativität* von unendlichen Reihen. Man mache sich klar, daß der *kleine Umordnungssatz* in jedem archimedisch angeordneten Körper aufgrund der Maximalitätsaussage (33) gilt.

Wir behaupten also die Äquivalenz unserer bisherigen Axiome zu den folgenden.

(35) $\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ ist archimedisch} \\ \& \\ \text{Majorantenkriterium} \end{array}}$

(36) $\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ ist archimedisch} \\ \& \\ \text{Großer Umordnungssatz} \end{array}}$

(37)

$\mathbb{K}$ ist archimedisch & Absolut konvergente Reihen sind konvergent

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{K}$ Unterkörper eines *maximalen* Körpers $\widetilde{\mathbb{K}}$. Es bleibt zu zeigen, daß für $\mathbb{K} \neq \widetilde{\mathbb{K}}$ keine der Aussagen (35), (36) und (37) richtig ist. Es genügt dazu, eine in $\mathbb{K}$ nicht konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{K}$, zu konstruieren, für die aber $\sum_{k=0}^{\infty} |\, a_k \,|$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. (Im Falle von (36) definiere man dann $a_{0k} = a_k$, $a_{1k} = -a_k$, $a_{jk} = 0$ sonst).

Es sei also $\mathbb{K} \neq \widetilde{\mathbb{K}}$ und ohne Einschränkung das Element $a \in [0,\, 1] \subset \widetilde{\mathbb{K}}$ nicht in $\mathbb{K}$ enthalten. Wir schreiben a als Dualzahl:

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2^k}\,, \quad c_k \in \{0,\, 1\}\,.$$

Da für alle $j < \ell$ gilt:

$$\frac{0}{2^j} + \frac{0}{2^{j+1}} + \cdots + \frac{0}{2^{\ell-1}} + \frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{j+1}} - \cdots - \frac{1}{2^\ell}\,,$$

kann man a auch schreiben in der Form

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k = \pm \frac{1}{2^k} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}\,.$$

Die Reihe $\sum |\, a_k \,|$ ist aber in $\mathbb{Q}$ (und damit auch in $\mathbb{K}$) konvergent gegen 1. $\square$

Literatur

[1] Efimow, N.W.: Höhere Geometrie I. Über die Grundlagen der Geometrie. Vieweg/C.F.Winter: Braunschweig/Basel 1970.

[2] Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre. Reprint: Chelsea Publishing Company: New York 1949.

[3] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. (2., durchgesehene Auflage). B.G.Teubner: Stuttgart 1982.

[4] Prestel, A.: Model Theory for the Real Algebraic Geometer. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali: Pisa · Roma 1998.

[5] Prieß–Crampe, S.: Angeordnete Strukturen. Gruppen, Körper, projektive Ebenen. Springer: Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983.

[6] Riemenschneider, O.: Grundkurs der Analysis (mit Einschluß der Linearen Algebra und Elementen der Topologie, Differentialgeometrie und Funktionentheorie). Band 1. Manuskript: Hamburg 2000 (in Vorbereitung).

[7] Steiner, H. G.: Äquivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms für die reellen Zahlen. Math. Phys. Sem. Ber. 13, 1966.