HAMBURGER BEITRÄGE
ZUR MATHEMATIK

Heft 113

Über Potenzsummenpolynome

Jörg Feldvoss, Nahrendorf

Februar 2001

Einleitung

Für jede natürliche Zahl n bezeichnen wir mit P_n das n-te Potenzsummenpolynom, welches dadurch gegeben ist, dass es für alle ganzen Zahlen $x \geq 2$ die Gleichung

$$P_n(x) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (x-1)^{n-1}$$

erfüllt.

In [3] wird durch Differentiation einer wohlbekannten expliziten Formel eine Beziehung zwischen den Potenzsummenpolynomen und ihren ersten Ableitungen hergeleitet. Durch Integration ergibt sich dann eine Rekursionsformel für die Potenzsummenpolynome. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, wie man ausgehend von einer sich ganz natürlich aus der Definition der Potenzsummenpolynome ergebenden Funktionalgleichung nur mit Hilfe elementarer Differentialrechnung die oben erwähnte Beziehung und das auch in [3, Satz 2] behandelte Symmetrieverhalten einsehen kann. Hierbei zeigt sich, dass man ohne Mehraufwand auch gleich parallel viele Eigenschaften der Bernoulli-Polynome mit beweisen kann (und sollte), wenn die letzteren als Ableitungen der Potenzsummenpolynome eingeführt werden. Nebenbei korrigieren wir die Ungenauigkeit in [3, Satz 1] für den Fall $n = 1$, welche daher kommt, dass im dortigen Beweis fälschlicherweise $P_1(x) = x$ anstatt $P_1(x) = x - 1$ benutzt wird (siehe [3, S. 119]).

In der vorliegenden Arbeit werden neben elementarer Differentialrechnung nur der schon bei der obigen Definition angewendete Identitätssatz für Polynome und der binomische Lehrsatz verwendet. Eine Ausnahme bilden (2), Korollar 3, die Rekursionsformel aus [3] und (B2) in Satz 5, welche aber schon in ihrer Formulierung Integrale enthalten und nur aufgrund der in [3, Satz 1] enthaltenen Ungenauigkeit bzw. im letzten Fall zum Vergleich der hier benutzten Definition der Bernoulli-Poynome mit den in der Literatur vorhandenen behandelt werden. Da die Differentiation von Polynomen (mit rationalen Koeffizienten) algebraisch definiert ist und die benötigten Spezialfälle der Kettenregel direkt aus dem binomischen Lehrsatz gewonnen werden können, lassen sich die hier vorgestellten Eigenschaften der Potenzsummenpolynome (mit Ausnahme der eben erwähnten) auf rein algebraischem Wege aus ihrer Funktionalgleichung und der Tatsache, dass 1 eine allen gemeinsame Nullstelle ist, herleiten.

1 Eine Rekursionsformel für die Potenzsummenpolynome

Wir beginnen mit einer Rekursionsformel für die Potenzsummenpolynome, aus der sich dann sofort einige ihrer auch für den Fortgang der vorliegenden Arbeit grundlegenden Eigenschaften ergeben.

Satz 1 *Für jede natürliche Zahl n und jede reelle Zahl x gilt:*

$$x^n - 1 = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} P_m(x).$$

Beweis. Aufgrund des Identitätssatzes für Polynome genügt es, die obige Beziehung für ganzzahliges $x = N \geq 2$ zu zeigen. Man schreibe die linke Seite als Teleskopsumme, d.h.

$$N^n - 1 = \sum_{k=1}^{N-1} [(k+1)^n - k^n],$$

benutze den binomischen Lehrsatz

$$(k+1)^n = k^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} k^j$$

und erhält die folgende Doppelsumme:

$$N^n - 1 = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} k^j \right).$$

Durch Vertauschen der beiden Summen und Verschieben des Summationsindexes bekommt man schließlich:

$$N^n - 1 = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} P_{j+1}(N) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} P_m(N). \quad \square$$

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 1 erhalten wir eine entsprechende Rekursionsformel für die Ableitungen der Potenzsummenpolynome, die sich später noch als nützlich erweisen wird.

Korollar 1 *Für jede natürliche Zahl n und jede reelle Zahl x gilt:*

$$nx^{n-1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} P'_m(x).$$

Außerdem lassen sich aus Satz 1 die folgenden bekannten Eigenschaften der Potenzsummenpolynome herleiten:

Korollar 2 *Das n-te Potenzsummenpolynom P_n ist ein Polynom n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten. Überdies gilt:*

(a) $P_n(0) = 0$ *für jede natürliche Zahl $n \geq 2$.*

(b) $P_n(1) = 0$ *für jede natürliche Zahl n.*

Beweis. Durch Umstellen bekommt man aus Satz 1 die folgende Rekursionsformel für das n-te Potenzsummenpolynom:

$$(1) \quad P_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \left[(x^n - 1) - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m-1} P_m(x) \right] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergeben sich durch vollständige Induktion nach n sofort der Grad von P_n, die Natur seiner Koeffizienten und (b).

Wegen $P_1(x) = x - 1$ erhält man aus (1) eine weitere Rekursionsformel für das n-te Potenzsummenpolynom:

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \left[(x^n - x) - \sum_{m=2}^{n-1} \binom{n}{m-1} P_m(x) \right] \qquad \forall\, n \geq 2, x \in \mathbb{R},$$

woraus sich (a) wiederum durch vollständige Induktion nach n ablesen lässt. □

2 Charakterisierung der Potenzsummenpolynome durch eine Funktionalgleichung

Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie man jedes Potenzsummenpolynom durch eine sich sofort aus ihrer Definition ergebende Funktionalgleichung bis auf die Wahl einer Konstanten kennzeichnen kann.

Satz 2 *Für jede natürliche Zahl n ist das n-te Potenzsummenpolynom das eindeutig bestimmte Polynom P_n mit*

(PS1) $P_n(x+1) - P_n(x) = x^{n-1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(PS2) $P_n(1) = 0.$

Beweis. Dass das n-te Potenzsummenpolynom (PS1) erfüllt, ist eine unmittelbare Folge seiner Definition und dem Identitätssatz für Polynome, wogegen die ebenfalls wohlbekannte Eigenschaft (PS2) schon in Korollar 2(b) bewiesen wurde.

Sei nun P ein Polynom, welches (PS1) und (PS2) erfüllt. Betrachte das Polynom $D := P - P_n$. Da P und P_n die Eigenschaft (PS1) besitzen, ist $D(x+1) = D(x)$ für jede reelle Zahl x. Angenommen, D wäre nicht konstant. Dann könnte man durch Differenzieren ein *lineares* Polynom Δ bekommen, welches auch $\Delta(x+1) = \Delta(x)$ für jede reelle Zahl x erfüllte, was aber offenbar nicht richtig sein kann. Also ist D eine Konstante, die aber verschwinden muss, da P und P_n auch die Eigenschaft (PS2) besitzen. □

Anmerkung. Aus (PS1) folgt natürlich sofort, dass $P_n(0) = P_n(1)$ für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ (vgl. Korollar 2), wogegen $P_n(0) = -1 \neq 0 = P_n(1)$ für $n = 1$.

3 Das Symmetrieverhalten der Potenzsummenpolynome

In diesem kurzen Abschnitt zeigen wir, wie man die Charakterisierung der Potenzsummenpolynome aus dem vorigen Abschnitt verwenden kann, um ohne Benutzung von Integralrechnung (vgl. [3, §4]) ihr Symmetrieverhalten einzusehen.

Satz 3 *Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt:*

$$P_n(1-x) = (-1)^n \cdot P_n(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Betrachte das durch $Q(x) := (-1)^n \cdot P_n(1-x)$ definierte Polynom Q. Mit Blick auf Satz 2 ist nur nachzuweisen, dass Q die Eigenschaften (PS1) und (PS2) erfüllt. Da wir $n \geq 2$ vorausgesetzt haben, ergibt sich aus Korollar 2(a), dass $Q(1) = (-1)^n \cdot P_n(0) = 0$. Überdies erhält man durch Anwenden von (PS1) auf P_n für jede reelle Zahl x:

$$\begin{aligned} Q(x+1) - Q(x) &= (-1)^n \cdot P_n(-x) - (-1)^n \cdot P_n(1-x) \\ &= (-1)^{n-1} \cdot [P_n(-x+1) - P_n(-x)] \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (-x)^{n-1} \\ &= x^{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 3 bedeutet, dass die Potenzsummenpolynome geraden Grades *achsensymmetrisch* zu $x = \frac{1}{2}$ sind; wogegen die Potenzsummenpolynome ungeraden Grades ≥ 3 *punktsymmetrisch* zu $(\frac{1}{2}, 0)$ sind (siehe [3, Satz 2]). Insbesondere ist

$$\int_0^1 P_{2m+1}(t)dt = 0 \qquad \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

4 Die Ableitungen der Potenzsummenpolynome

Durch Differenzieren von (PS1) für P_{n+1} bekommt man für jede reelle Zahl x:

$$P'_{n+1}(x+1) - P'_{n+1}(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Daher erfüllt das Polynom

$$A_n := \frac{1}{n} \cdot [P'_{n+1} - P'_{n+1}(1)]$$

die beiden Eigenschaften aus Satz 2 und stimmt folglich mit dem n-ten Potenzsummenpolynom P_n überein, d.h.

$$P'_{n+1}(x) = n \cdot P_n(x) + P'_{n+1}(1)$$

für jede reelle Zahl x. Wenn man nun $\overline{B}_n := P'_{n+1}(1)$ für jede natürliche Zahl n setzt, so ergibt sich aus Korollar 2, dass $\overline{B}_n \in \mathbb{Q}$, womit das nächste Resultat vollständig bewiesen ist.

Satz 4 *Für jede natürliche Zahl n gibt es eine eindeutig bestimmte rationale Zahl* $\overline{B}_n$ *mit*

$$P'_{n+1}(x) = n \cdot P_n(x) + \overline{B}_n \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

In Satz 4 traten die ,,Potenzsummenzahlen" $\overline{B}_n$ als *Tangentensteigungen* der Graphen der Potenzsummenpolynome im Punkt $(1, 0)$ auf. Im folgenden geben wir noch eine weitere geometrische Deutung der ,,Potenzsummenzahlen" als *Fläche* zwischen dem Graphen der Potenzsummenpolynome und den Geraden $x = 0$ und $x = 1$ (für $n > 1$ siehe auch [3, Satz 1]):

Korollar 3 *Für jede natürliche Zahl n gilt:* $\int\limits_0^1 P_n(t)dt = -\dfrac{\overline{B}_n}{n}$.

Beweis. Aus dem Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung folgt unter Verwendung von Satz 4 und Korollar 2(a) für jede reelle Zahl x:

$$P_{n+1}(x) = n \cdot \int\limits_0^x P_n(t)dt + \overline{B}_n \cdot x. \tag{3}$$

Setzt man in (3) insbesondere $x := 1$, so erhält man aus Korollar 2(b)

$$0 = n \cdot \int\limits_0^1 P_n(t)dt + \overline{B}_n,$$

d.h. nach Umstellen ergibt sich die Behauptung. □

Aus Korollar 3 und (2) bekommt man sofort:

Korollar 4 $\overline{B}_{2m+1} = 0$ *für jede natürliche Zahl m.*

Man beachte aber, dass aus $P_1(x) = x - 1$ und Korollar 3 folgt:

$$\overline{B}_1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Natürlich lässt sich der Wert von $\overline{B}_1$ durch Differentiation von $P_2(x) = \frac{1}{2} \cdot x(x-1)$ auf direktem Wege erhalten. Es sei außerdem angemerkt, dass man Korollar 4 auch *ohne Integralrechnung* durch Differenzieren der Symmetriebeziehung für $n + 1$ in Satz 3 und Anwendung von Satz 4 sowie Korollar

2 herleiten kann. Dies ist eine der wenigen Stellen, wo man einen Spezialfall der Kettenregel benötigt, um den Vorzeichenwechsel berücksichtigen zu können. Allerdings lässt sich der hier zur Anwendung kommende Spezialfall der Kettenregel auch direkt aus dem binomischen Lehrsatz gewinnen.

Aus (3) und Korollar 3 folgt nun auch die folgende

Rekursionsformel (D. Treiber [3]) *Für jede natürliche Zahl n und jede reelle Zahl x gilt:*

$$P_{n+1}(x) = n \cdot \left[\int_0^x P_n(t)dt - x \cdot \int_0^1 P_n(t)dt \right].$$

Anmerkung. Eine analoge Rekursionsformel lässt sich auch für die im nächsten Abschnitt einzuführenden Bernoulli-Polynome herleiten (vgl. [2, (2), S. 164]).

Im Gegensatz zur Rekursionsformel in Satz 1 benötigt man hier nur P_n, um P_{n+1} zu bestimmen. Man beachte, dass wegen (2) für jede *ungerade* natürliche Zahl $n \geq 3$ sogar gilt:

$$P_{n+1}(x) = n \cdot \int_0^x P_n(t)dt \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

5 Potenzsummen- und Bernoulli-Polynome

Durch endliche Induktion nach m ergibt sich aus Satz 4 für die höheren Ableitungen der Potenzsummenpolynome:

Korollar 5 *Für alle natürlichen Zahlen $1 \leq m \leq n$ und jede reelle Zahl x gilt:*

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!} P'_{n-m+1}(x).$$

Mit Blick auf Korollar 5 erscheint es sinnvoll, für die erste Ableitung des $(n+1)$-ten Potenzsummenpolynoms eine eigene Bezeichnung einzuführen.

Wir definieren das n-te *Bernoulli-Polynom* B_n für jede nicht-negative ganze Zahl n durch

$$B_n(x) := P'_{n+1}(x) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt aus Korollar 2 und (1), dass das n-te Bernoulli-Polynom B_n ein normiertes Polynom n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten ist. Überdies lässt sich nun Satz 4 folgendermaßen formulieren:

$$B_n(x) = n \cdot P_n(x) + \overline{B}_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Diese Beziehung ermöglicht es, (ohne explizite Integration) Ergebnisse für Bernoulli-Polynome auf analoge Ergebnisse für Potenzsummenploynome zu übertragen (und umgekehrt). Insbesondere ergibt sich aus (4) und Korollar 4, dass das n-te Bernoulli-Polynom mit dem n-ten Potenzsummenpolynom für *ungerades* $n \geq 3$ bis auf einen Faktor n übereinstimmt.

Aus unserer Definition der Bernoulli-Polynome bekommt man mit Satz 2 sofort die Funktionalgleichung der Bernoulli-Polynome (vgl. [2, Satz VI.1.2, a), S. 166]). Außerdem folgt aus Satz 3 die Symmetriebeziehung der Bernoulli-Polynome (vgl. [2, Korollar VI.1.2.1, S. 166]). Es sei angemerkt, dass die Beweise dieser beiden Resultate für die Bernoulli-Polynome erst unseren Zugang zu den Potenzsummenpolynomen motiviert haben. Überdies erhält man für die Bernoulli-Polynome aus den bisher hergeleiteten Resultaten:

Satz 5 *Die Bernoulli-Polynome B_n besitzen die folgenden Eigenschaften:*

(B0) $B_0(x) = 1$ *für jede reelle Zahl x.*

(B1) $B'_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x)$ *für jede natürliche Zahl n und jede reelle Zahl x.*

(B2) $\int\limits_0^1 B_n(t)dt = 0$ *für jede natürliche Zahl n.*

Beweis. (B0) folgt sofort aus $P_1(x) = x - 1$ für alle reellen x; (B1) ist eine unmittelbare Konsequenz aus (4) und der Definition der Bernoulli-Polynome; (B2) ergibt sich schließlich aus dem Zusammenspiel von (4) und Korollar 3 (oder direkt aus einer Anwendung des Fundamentalsatzes der Infinitesimalrechnung auf die Definition von B_n und Korollar 2). □

Anmerkung. Durch die drei Eigenschaften in Satz 5 sind die B_n eindeutig bestimmt und es folgt, dass sie mit den üblicherweise als Bernoulli-Polynome bezeichneten Polynomen übereinstimmen (siehe z. B. [2, S. 163/164 und S. 175/176]).

Nun können wir auch Korollar 5 folgendermaßen umformulieren:

Satz 6 *Für alle natürlichen Zahlen $1 \le m \le n$ und jede reelle Zahl x gilt:*

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!} B_{n-m}(x).$$

Hieraus erhält man sofort für die höheren Ableitungen der Bernoulli-Polynome:

Satz 7 *Für alle natürlichen Zahlen $0 \le m \le n$ und jede reelle Zahl x gilt:*

$$B_n^{(m)}(x) = \frac{n!}{(n-m)!} B_{n-m}(x).$$

Setze $\underline{B}_n := B_n(0) = P'_{n+1}(0)$ für jede nicht-negative ganze Zahl n. Wegen $\overline{B}_n := B_n(1) = P'_{n+1}(1)$ bekommt man durch Differenzieren der Symmetriebeziehung für $n+1$ in Satz 3 für jede natürliche Zahl n:

$$\underline{B}_n = (-1)^n \cdot \overline{B}_n. \tag{5}$$

Da außerdem $\underline{B}_0 = P'_1(0) = 1 = P'_1(1) = \overline{B}_0$ gilt, ergibt sich aus (5) mit Korollar 4 bzw. der nachfolgenden Bemerkung:

Satz 8 *Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \neq 1$ gilt:*

$$\underline{B}_n = \overline{B}_n.$$

Überdies ist $\underline{B}_1 = -\frac{1}{2}$ und $\overline{B}_1 = \frac{1}{2}$.

Es ist üblich, $\underline{B}_n$ als n-te *Bernoulli-Zahl* zu bezeichnen und sie durch B_n abzukürzen. (Man beachte, dass man bei dieser Schreibweise genau zwischen den Zahlen B_n und den Polynomen $B_n = B_n(x)$ unterscheiden muss!)

Durch „Taylor-Entwicklung" um 0 erhält man dann die folgende explizite Formel für die Potenzsummenpolynome (siehe z. B. [1, (71.8), S. 412]):

Satz 9 *Für jede natürliche Zahl $n \ge 2$ und jede reelle Zahl x gilt:*

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} x^m.$$

Beweis. Da P_n vom Grad n ist, ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{P_n^{(m)}(0)}{m!} x^m.$$

Da wir $n \geq 2$ vorausgesetzt haben, folgt aus Satz 6 zusammen mit Korollar 2(a), dass

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(0) + \sum_{m=1}^{n} \frac{P_n^{(m)}(0)}{m!} x^m \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} x^m. \quad \square \end{aligned}$$

Als unmittelbare Konsequenz ergibt sich aus Satz 9 die folgende explizite Formel für die Bernoulli-Polynome (siehe [1, Aufgabe 71.1, S. 413] oder [2, (3), S. 164]):

Satz 10 *Für jede nicht-negative Zahl n und jede reelle Zahl x gilt:*

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m} x^m.$$

Anmerkung. Natürlich lässt sich Satz 10 auch ganz analog zum Beweis von Satz 9 aus Satz 7 auf direktem Wege herleiten.

Insbesondere liefert Satz 10 auch eine Rekursionsformel für die Bernoulli-Zahlen (siehe [1, (71.2), S. 410] oder [2, (7), S. 165]):

Korollar 6 *Für jede nicht-negative ganze Zahl $n \neq 1$ gilt:*

$$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_m = 0.$$

Beweis. Für $n = 0$ ist die zu beweisende Formel trivial. Im Fall $n > 1$ setze man $x := 1$ in der Formel aus Satz 10 und wende Satz 8 an. $\square$

Neben der expliziten Formel aus Satz 10 erhält man aus Korollar 1 die folgende Rekursionsformel für die Bernoulli-Polynome:

Satz 11 *Für jede natürliche Zahl n und jede reelle Zahl x gilt:*

$$nx^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_m(x).$$

Hieraus ergibt sich dann schließlich noch eine Rekursionsformel für die „Potenzsummenzahlen" $\overline{B}_n$:

Korollar 7 *Für jede nicht-negative ganze Zahl n gilt:*

$$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} \overline{B}_m = n.$$

Anmerkung. Anwenden der Rekursionsformel in Satz 11 für $x := 1$ anstatt für $x := 0$ liefert einen weiteren Beweis von Korollar 6.

Literatur

[1] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1980.

[2] M. Koecher: *Klassische elementare Analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel/Boston, 1987.

[3] D. Treiber: Zur Kurvendiskussion der Potenzsummenpolynome, *Elem. Math.* **53** (1998), 119–125.