Hamburger Beiträge zur Mathematik

Nr. 388 , September 2010

Platons ungeschriebene Lehre und die Mathematik von heute

Ernst Kleinert

Platons ungeschriebene Lehre und die Mathematik von heute

1

Platons Wertschätzung der Mathematik ist bekannt. „Kein Nichtgeometrischer (αγεωμετρητος) soll hier eintreten", so soll über dem Eingang zu Platons Athener Akademie gestanden haben, und wenn wir auch für diese Nachricht nur eine einzelne und sehr späte Überlieferung haben [1], paßt sie doch zu allem, was wir über den dortigen Lehrbetrieb wissen. Platon selbst war mathematisch auf der Höhe seiner Zeit; er war bekannt mit führenden Mathematikern, Theaitet, Eudoxos, Archytas; es ist wahrscheinlich, daß er mathematische Entwicklungen angeregt hat (so mahnt er Politeia 528b den Ausbau der Stereometrie an, als Voraussetzung für eine adäquate Astronomie), und immerhin möglich, daß er selbst mathematische Entdeckungen machte. Seine Spätphilosophie, und in besonderem Maße der ungeschriebene Teil seiner Lehre, enthält eine rationale Ontologie, die nicht bloß mathematikfähig erscheint, sondern von Platon selbst schon mit mathematica durchsetzt, vielleicht sogar in einem strikteren Sinne mathematisch formuliert war. Dies geht aus einer anderen Überlieferung hervor, nämlich der von Platons öffentlichem Vortrag „Über das Gute (αγαθον)", der aus eben diesem Grund wenig Anklang bei den Hörern fand:

„Jeder sei nämlich gekommen in der Annahme, er werde etwas erlangen von dem, was man für die menschlichen Güter hält, z.B. Reichtum, Gesundheit, Kraft, überhaupt irgendeine wunderbare Glücklichkeit. Als aber dann die Rede war von Mathematik und Zahlen und Geometrie und Astronomie und schließlich, daß Gutes Eines sei, da kam ihnen das, wie ich glaube, höchst paradox vor, und die einen verloren das Interesse an der Sache, die andern kritisierten sie." [2]

Das würde einem modernen Platon nicht viel anders ergehen. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Gedanken Platons, soweit sie uns faßbar sind, einmal aus der Perspektive unserer heutigen Mathematik zu betrachten (und damit die *series of footnotes* weiterzuschreiben). Philosophen unterschätzen vielleicht, wie nahe die Mathematik heute an einer Prinzipienlehre im Sinne Platons ist, und Mathematiker wissen vielleicht nicht, in welchem Umfang Platon eine Mathematisierung der gesamten Wirklichkeit antizipiert hat. Meine These ist, daß erst die modernen Strukturbegriffe geeignet sind, Platons mathematischen Intentionen gerecht zu werden. In welchem Grad oder Umfang diese durchführbar sind, bleibt eine andere Frage.

2

Daß wir heute für ein solches Unternehmen mathematisch ungleich besser ausgestattet sind, wird als allzu billige Feststellung erscheinen; gleichwohl müssen wir sie wenigstens im Groben erläutern. Sie wäre noch nicht gerechtfertigt dadurch, daß wir heute über Zahlen und Figuren sehr viel mehr wissen als alle Früheren. Was *hier* zählt, ist nicht die Entwicklung „nach oben", zu größerer Komplexität, sondern im Gegenteil die „nach unten", zu den fundamentalia: daß nämlich die Mathematik einfach genug, oder das Einfache Mathematik geworden ist. Erst das ermöglicht uns, platonischen Grundbegriffen (αρχαι) mathematisch näherzutreten. Will man den Unterschied zwischen aller alten Mathematik und der heutigen[3] auf die einfachste Formel bringen, kann man mit Kantischen Termini sagen: jene war eine Mathematik der Anschauungsformen, diese geht aus von Verstandesbegriffen; oder mit Cassirer: jene war am Begriff der Substanz orientiert, diese an dem der Funktion (allgemeiner: der Relation). Zahlen und Figuren können in der Wahrnehmung *repräsentiert* werden, Funktionen und Relationen nur *exemplifiziert*; was sie ausmacht, das Gesetz, ist reiner Begriff. Grundbegriffe heutiger Mathematik sind Menge und Kategorie; der Mengenbegriff hat seinen Ursprung in den theoretischen Operationen des Auswählens und Zusammenfassens; die (mathematische) Kategorientheorie ist eine Mathematik des In-Beziehung-Setzens, mit dem Grundbegriff des Morphismus, der „strukturerhaltenden“ Abbildung. Damit ist die Verstandestätigkeit schlechthin erfaßt, denn alles Erkennen ist ein Beziehen. Indem sich die Mathematik so auf das theoretische Agieren gründet, öffnet sie zugleich den Weg zur Selbstreflexion und damit zu Resultaten, welche die prinzipiellen Möglichkeiten des mathematischen Verfahrens erkennen lassen. Die Griechen haben die mathematische Methode, den ordo geometricus, erfunden, aber ihre Anwendung auf Zahlen und Figuren beschränkt. Heute definiert sich Mathematik durch die Methode allein: Mathematik kann überall sein, wo Objekte und Beziehungen dieser Objekte untereinander begrifflich so scharf gefaßt werden können, daß eine Axiomatik möglich wird, und sie wird überall da von Nutzen sein, wo diese Axiomatik nicht rein deskriptiv bleibt, sondern ein „konstruktiv-deduktives Potential“ aufweist. Indem die Mathematik ihren Ausgang vom theoretischen Agieren nimmt, hat sie den vollen Umfang ihrer Aufgabe erst erschlossen.[4]

3

Damit haben wir präzisiert, was wir eingangs des letzten Abschnitts behauptet haben. Zugleich sind wir in der Lage, einem Vorbehalt Platons entgegenzutreten. Denn trotz seiner Schätzung der Mathematik ordnete Platon die mathematische Denkweise der wahrhaft philosophischen, nämlich der dialektischen, entschieden unter. In Politeia 510c heißt es:

> „Denn ich denke, du weißt, daß die, welche sich mit der Meßkunst und den Rechnungen und dergleichen abgeben, das Gerade und Ungerade und die Gestalten und die drei Arten der Winkel und was dem sonst verwandt ist in jeder Verfahrensart voraussetzend, nachdem sie dies als wissend zugrunde gelegt, keine Rechenschaft weiter darüber weder sich noch andern geben zu müssen glauben, als sei dies schon allen deutlich, sondern hiervon beginnend gleich das Weitere ausführen und dann folgerechterweise bei dem anlangen, auf dessen Untersuchung sie ausgegangen waren“.

Das Gegenstück beschreibt er kurz darauf (511b):

> „So verstehe denn auch, daß ich unter dem andern Teil des Denkbaren dasjenige meine, was die Vernunft selbst ergreift mittels des dialektischen Vermögens, indem sie die Voraussetzungen nicht zu Anfängen (αρχαι), sondern wahrhaft zu Voraussetzungen (υποθεσεις) macht, gleichsam als Zugang (επιβασις) und Anlauf (ορμη), damit sie, bis zum Nichtvoraussetzungshaften an den Anfang von allem gelangend, diesen ergreife, und so wiederum, sich an alles haltend, was mit jenem zusammenhängt, zum Ende hinabsteige, ohne sich überhaupt irgendeines sinnlich Wahrnehmbaren zu bedienen, sondern nur der Ideen selbst und an und für sich, und so bei Ideen endigt.“

Das bloße Folgern aus Voraussetzungen ist Verstandeserkenntnis, erst das Zurückgehen zu den Anfängen aber kann die Vernunfterkenntnis (511d) sein, die der Philosoph anstrebt [5]. Schon im Euthydem fordert Platon geradezu barsch eine Arbeitsteilung von Mathematikern und Philosophen (290b/c), welche die Mathematik als ancilla philosophiae erscheinen läßt:

„Keine Art der Jagd aber...geht doch auf etwas weiteres als eben auf das Erjagen und Einfangen. Haben sie aber etwas eingefangen, was sie jagten, so sind sie selbst nicht imstande, es zu gebrauchen, sondern die Jäger und Fischer übergeben es den Köchen, die Meßkünstler aber und Rechner und Sternkundigen – denn auch diese sind Jagende, weil sie weil sie ja ihre Figuren und Zahlenreihen nicht machen, sondern diese sind schon, sie finden sie nur auf, wie sie sind - ; wie also nun diese auch nicht selbst verstehen, sie zu gebrauchen, sondern nur zu jagen: so übergeben sie, soviel ihrer nicht ganz unverständig sind, ihre Erfindungen den Dialektikern, um Gebrauch davon zu machen.“ [6]

Ob Platon damit den mathematischen Prozeß seiner Zeit adäquat beschrieben hat, lassen wir dahingestellt sein; aber trifft die Beschreibung heute nicht zu? Wir sagten doch eben, daß axiomatisches Denken geradezu ein Erkennungszeichen für Mathematik geworden ist. Aber Axiomatik bedeutet für uns etwas anderes. Für die Griechen, und noch lange danach, waren Axiome evident *wahre* Sätze, die als Grundsätze an den Anfang zu stellen sind. Für uns dagegen sind Axiome solche Sätze, die dazu *brauchbar* sind, die intuitiv evidenten Grundsätze einer Theorie abzuleiten, wobei die Evidenz dem common sense überlassen bleibt; sie werden nirgends als absoluter Anfang gedacht, sondern lediglich als Ausgangspunkt („Zugang und Anlauf“), ganz so wie es Platon vom Dialektiker verlangt, und sind jederzeit revidierbar. Der *working mathematician* in seiner täglichen Arbeit geht natürlich von Voraussetzungen aus, die er nicht in Frage stellt, aber im Gesamtprozeß gibt es nichts, das nicht in Frage gestellt werden kann, und es geschieht immer wieder, daß neue Grundbegriffe eingeführt werden. Die Mathematik, als Ganzes betrachtet, geht heute zurück zum „Nichtvoraussetzungshaften“ (welchen Sinn man immer diesem Ausdruck beilegen will) nicht weniger als die Philosophie; sie tut es nur mit andern Augen und andern Absichten.

4

Der Mathematik obliegt heute nicht nur, das Begründungsgefüge zu erweitern, sondern auch, es nach allen Richtungen durchzuarbeiten. Man will nicht nur aus festen Voraussetzungen Schlüsse ziehen, sondern auch wissen, welche Voraussetzungen welche Schlüsse gestatten [7]; solches Adjustieren von notwendigen und hinreichenden Bedingungen liegt in jeder Frage vom Typ „Gilt der Satz auch noch für...“. Sodann möchte man ein und denselben Sachverhalt von möglichst vielen verschiedenen Seiten her angehen und verstehen; Objekte wie Kurven oder (klassische) Gruppen haben arithmetische, algebraische, analytische und topologische Aspekte, und wenn es ein letztes Ziel des Forschens daran gibt, dann besteht es darin, die gegenseitigen Bedingtheiten dieser Aspekte zu verstehen. Der Mathematiker muß hier „Synoptikter“ sein, eine andere Fähigkeit, die nach Platon den Dialektiker auszeichnet [8]. Summa: die Mathematik bleibt das διαλεγεσθαι im Sinne Platons nicht länger schuldig und leistet es mit aller Gründlichkeit, die man verlangen kann.

Eine Folge dieses διαλεγεσθαι ist der Drang zur Verallgemeinerung, der wiederum zur Folge hat, daß wir überall schon eine Metatheorie haben, wo die Griechen nur Beispiele kannten (was natürlich einer Nutzbarmachung der Mathematik für die Philosophie entgegenkommt): für die Zahlen die abstrakte Algebra, für die Figuren Topologie und Geometrie. Wichtiger aber ist, daß wir eine Mathematik haben von Dingen, welche bei Platon als Grundbegriffe auftreten, den Griechen aber gar nicht als mathematikfähig erschienen, von gleich und ungleich, ähnlich und unähnlich, mehr und weniger. Ja man darf sagen, daß die Mathematik heute über veritable *ways of worldmaking* verfügt und dabei konsistente Sprachspiele ermöglicht auch von Dingen, die jenseits aller Erfahrbarkeit liegen, wie höhere Dimensionen oder positive Charakteristik, vor allem aber das Unendliche. Die Aufgabe ist, die Autarkie des mathematischen Sprachspiels mit der Nicht-Autarkie der menschlichen Existenz in einen Ausgleich zu bringen.

5

Platons ungeschriebene Lehre (und ein Teil seiner überlieferten Spätphilosophie) kreist um die Begriffspaare des „Einen“ (εν) und der „unbestimmten Zweiheit“ (αοριστος δυας), der Grenze oder Bestimmung (περας) und des Unbegrenzten oder Unbestimmten (απειρον), Begriffe von sichtlich mathematischen Charakter, die Platon, wie wir gehört haben, in der Tat auch mathematisch behandelt wissen wollte. Freilich haben sie für Platon nicht nur einen mathematisch-logischen Aspekt. Insofern das Eine mit dem Guten (αγαθον) gleichzusetzen ist, ist es nicht nur höchstes Eines, sondern auch höchstes Gutes und höchstes Seiendes schlechthin. Der Wertaspekt und der Seinsaspekt werden hier außer Betracht bleiben. Für Platon drückten die μαθηματα, wörtlich: das, was in einem vorzüglichen Sinne zu lernen ist, wahre Sachverhalte aus, nämlich im Reich der Ideen. Wir Heutigen, durch die Vernunftkritik Kants und die mathematische Selbstreflexion hindurchgegangen, sind bescheidener: ein μαθημα, ein mathematischer Satz, ist nicht mehr als ein propositionaler Gehalt, ein Satz, den man anerkennen muß, wenn man bestimmte Voraussetzungen anerkennt.

6

Der logische oder strukturelle Aspekt des höchsten Einen ist höchste Einheit. Wie jeder Allbegriff ist auch dieser selbstreferentiell und damit anfällig für Antinomien oder Paradoxien, wie sie sich namentlich aus der Verbindung von Selbstbezug mit Negation ergeben und wie Platon sie im Parmenides durchdekliniert hat. Wenn je zwei Entitäten unter einer Einheit stehen, dann gibt es auch eine Einheit von Einheit und Nichteinheit, also gibt es keine höchste Einheit. Unübersehbar ist hier die Familienähnlichkeit mit der Russellschen Antinomie in der Mengenlehre. Die Mathematik vermeidet den fatalen Schluß, indem sie das Axiom der Aussonderung auf bereits gegebene Mengen einschränkt, was für (fast) alle mathematischen Zwecke ausreicht, aber zur Folge hat, daß auf den Begriff einer Menge aller Mengen, eine „höchste“ Menge also, verzichtet werden muß [9]. In analoger Weise ist auch eine höchste Einheit kein mathematikfähiger Begriff; Mathematik kann immer nur schon Gegebenes zu mehr Einheit bringen.

Mathematik ist Konstruktion aus Begriffen, ihre Resultate sind Sätze. Ein solcher Satz ist qua Satz Einheitsstiftung, denn er vermehrt den Zusammenhang der Begriffe, die in ihm vorkommen. Es gibt nun verschiedene Arten und Grade begrifflichen Zusammenhangs, von der Mathematik im Begriff der Struktur dingfest und in Gestalt formaler Sprachen zum Gegenstand einer Metamathematik gemacht. Bourbakis „Mutterstrukturen“, von algebraischem, topologischem oder Ordnungstyp, waren eine grobe und heute überholte Einteilung (insofern mindestens noch kombinatorische und kategoriale Strukturen zu berücksichtigen sind); sie bieten zwar immer noch eine erste Orientierung und den „schulgemäßen“ Eingang zur Mathematik, aber es erscheint denkbar, daß einmal ganz andere Begrifflichkeiten die Führung übernehmen. Ein sprechendes Beispiel dafür scheint mir die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen zu sein, eine zunächst recht abstrakt erscheinende Aufgabe, die aber als „strukturellen Kern“ elementare Gebilde kombinatorischen Charakters, die Wurzelsysteme, ans Licht gefördert hat.

Der Unterschied zwischen mathematischer und platonischer Einheitsstiftung ist nun schon erkennbar geworden. Diese postuliert ein höchstes Eines in spekulativem Vorgriff und sucht, von ihm ausgehend, die mannigfaltige Welt begrifflich zu ordnen; man hat Platons Philosophie geradezu ein „Ableitungssystem“ genannt [10] . Jene nähert sich der Einheit sozusagen „von unten“, aus der Welt der Vielheit heraus, indem sie möglichst Vieles auf möglichst Weniges zurückzuführen, oder unter möglichst Weniges zu subsumieren sucht; sie verwirklicht die Einheit schrittweise und weiß, daß es eine höchste Einheit für sie nicht geben kann. Sie kennt auch „universelle“ Objekte, aber die universelle Eigenschaft bezieht sich immer nur auf eine bestimmte (mathematische) Kategorie [11]. Mathematik muß überall erst konstruieren, bevor sie deduzieren kann (was den spekulativen Vorgriff in Form leitender Vermutungen nicht ausschließt). Sie hat dafür freilich stets einen axiomatischen Boden unter sich, den es für die Philosophie nicht geben kann, und wo dieser nicht mehr trägt, kann sie sich einen neuen verschaffen, so wie sie ihn braucht, denn sie braucht sich nicht darum zu kümmern, ob und wie ihre Erzeugnisse in Zusammenhang mit menschlicher Erfahrung stehen. Mathematik hat es leicht, streng zu sein, denn sie hat nur mit *Denkbarem* zu tun; der Philosoph aber muß das *Wirkliche*, also das *Erfahrbare* auf Begriffe bringen [12].

7

Das εν als ein oberster und umfassender Begriff kann natürlich nicht im strengen Sinne definiert werden, was auch Platon klar war [13]. In einer rationalen Philosophie wie der Platonischen muß es aber möglich sein, von ihm begrifflich Rechenschaft zu geben, λογον διδοναι, wie es bei Platon heißt, es sozusagen begrifflich einzukreisen, indem seine Funktionen aufgewiesen werden. Es ist H.J.Krämer gelungen, eine solche Aussage aus aristotelischen Zeugnissen zu rekonstruieren: „Das εν ist genauestes Maß (ακριβεστατον μετρον) von Vielheit (πληθος) und Zahl“[14]. Der mathematische Charakter dieser Funktion des εν ist offensichtlich. Vielleicht darf man paraphrasieren: das εν soll für jede Vielheit leisten, was die Eins für die (natürlichen) Zahlen leistet; das kann wohl als der paradigmatische Fall gelten. Dabei ist zu beachten, daß „μετρον“, wie auch unser „Maß“, nicht von rein quantitativer Konnotation ist; es kann auch der Aspekt von „Richtigkeit“ mitklingen; oft ist ja „Maß“ gleichbedeutend mit „rechtes Maß“. So rückt der Begriff in die Nähe des Strukturbegriffs, aber Quantität ist immer beteiligt: wo das rechte Maß verfehlt wird, ist in irgendeiner Hinsicht zuviel oder zuwenig vorhanden.

Untersuchen wir das Verhältnis von Struktur und Quantität am paradigmatischen Fall. Je zwei (natürliche) Zahlen sind kommensurabel, und die Eins ist das größte gemeinsame Maß (der größte gemeinsame Teiler) *aller* Zahlen. Jede Zahl b ist also ein Vielfaches der Eins, nämlich das b-fache; die Eins geht ohne Rest in jeder Zahl auf, und sie ist die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft. Soweit, so klar. Aber nun kommt ein Problem in Sicht, wenn wir nämlich „dialektisch" zum Anfang zurückgehen und fragen, wie die Zahl b denn eigentlich definiert ist; denn natürlich können wir nicht b definieren als das b-fache der Eins. Untauglich dazu ist die Definition bei Euklid (Elemente VII, Def.2): Eine Zahl ist eine aus Einheiten (μοναδες) zusammengesetzte Menge (συγκειμενον πληθος). Auch wenn wir „aus Einheiten zusammengesetzt" als „endlich" verstehen (statt allgemeiner als „diskret"), ist damit nicht mehr gesagt, als daß jede endliche Menge eine Zahl repräsentiert, nicht aber, wie die Zahlen auseinander hervorgehen und voneinander unterschieden sind, nicht einmal, wann zwei Zahlen gleich sind [15] . Die Mathematik der Griechen läßt uns also im Stich; die heutige Standardtheorie (Peanoarithmetik) arbeitet mit den undefinierten Begriffen der Eins und der Nachfolgerabbildung; die Axiome beziehen sich auf die *Genese* der Zahlen, nicht auf Eigenschaften eines als schon vorliegend gedachten Systems von Zahlen. Aus dieser Genese ergeben sich Addition und Multiplikation, wobei die Sätze, welche den Maßcharakter der Eins aussprechen, tautologisch werden, nämlich daß jede Zahl Summe von Einsen oder ein Vielfaches der Eins ist. Die Definition einzelner Zahlen vollzieht sich sodann positionell: die ersten Zahlen erhalten Eigennamen, größere werden aus diesen unter Benutzung von Addition und Multiplikation auf die bekannte Weise zusammengesetzt; die positionelle Zahlenangabe ist wesentlich operativ. Es ist nicht schwer, einzelne Zahlen „strukturell" zu charakterisieren, die Drei als kleinste ungerade Primzahl, die Sechs als kleinste vollkommene Zahl und so fort; als Definitionen wären solche Kennzeichnungen unbrauchbar, weil sie die fundamentale Zahlstruktur nicht erkennen lassen, das Aufeinanderfolgen.

Wenn wir also verstehen wollen, wie die Eins zum μετρον (zunächst nur im quantitativen Sinn) wird, dann werden wir auf die Peanostruktur geführt, als deren wesentliches Ingrediens die Nachfolgerabbildung erscheint, während „Eins" nur der Name für den Startpunkt ist. So darf man vielleicht im Sinne Platons sagen: das μετρον der Zahlen im vollen, quantitativen *und* strukturellen Sinn, ist die Eins *zusammen mit* der Nachfolgerabbildung. Dies tritt am deutlichsten hervor in der universellen Eigenschaft, die im Rekursionssatz von Dedekind ausgesprochen wird und das System der natürlichen Zahlen charakterisiert: es ist ein Anfangsobjekt in der Kategorie der Mengen mit einem ausgezeichneten Element und einer Selbstabbildung [16].

8

Trotzdem ist nicht zu leugnen, daß der Quantitätsaspekt des μετρον sich vor den Strukturaspekt drängt, in der Theorie wie in der Praxis. Wo sich die Bewältigung der Welt, mit Brouwer [17] zu sprechen, durch mathematische Betrachtung, gefolgt von mathematischer Handlung vollzieht, stehen am Ende fast ausschließlich Quantitäten. Durch geeignete Kombinationen der Grunddimensionen Länge, Gewicht und Dauer übersetzt die

Physik Eigenschaften in Zahlen, die zunächst von mehr qualitativer als quantitativer Natur erscheinen, wie Dichte, Flüssigkeit (Viskosität), Leitfähigkeit, und macht sie damit zu Beobachtungsgrößen. Dafür gibt es eine mathematische Erklärung: Überall, wo es in irgendeiner Hinsicht ein Mehr und Weniger gibt, ist mathematisch eine partiell geordnete Menge anzusetzen, deren Elemente die möglichen Bestimmungen in der fraglichen Hinsicht sind. Fast immer müssen nun verschiedene Bestimmungen miteinander verrechenbar sein, was eine algebraische, mit der Anordnung kompatible Struktur erfordert (dies wiederum erzwingt, daß die Anordnung total ist); das einfachste Modell dafür ist ein geordneter Halbring. Sollen keine unendlichen Proportionen auftreten, ist die Anordnung archimedisch, und nach einem bekannten Satz ist es nun kein Verlust an Allgemeinheit mehr, die Bestimmungen als reelle Zahlen anzusetzen.

Aber auch die Wissenschaft par excellence von den Strukturen, die Mathematik, sucht diese wo immer möglich durch numerische Invarianten zu charakterisieren, und es gelingt ihr in noch viel ausgedehnterem Maße als der Physik, Qualitäten zu quantifizieren; Beispiele dafür anzugeben, erübrigt sich, da sie allgegenwärtig sind. Bei näherer Betrachtung tritt freilich ein Problem hervor, für das es keine Lösung gibt, nämlich Beschreibung und Kennzeichnung zu unterscheiden (und das betrifft auch die Quantifizierungen der Physik). Eine Kennzeichnung muß nicht mehr enthalten, als zur Identifikation ausreicht, und sagt vielleicht über das Gekennzeichnete gar nichts aus, ist im Extremfall nichts als eine Nummer. Wo nun eine Zahl ausreicht, ein Objekt zu identifizieren, etwa eine geschlossene Fläche durch ihr Geschlecht, ist die strukturelle Information nicht in der Zahl allein enthalten, sondern ebensosehr in dem Prozeß, der vom Objekt zur Zahl führt und wieder zurück. Die Gödelisierung formaler Sprachen zeigt, daß die Zahl alle Strukturen „aufnehmen“ kann, insofern sich alle Strukturverhältnisse in Verhältnisse zwischen Zahlen übersetzen lassen; aber die Verhältnisse zwischen Zahlen *haben* zwar auch eine Gödelzahl, *sind* aber nicht selbst Zahlen. Das Verhältnis von Struktur und Quantität bleibt ungeklärt, der platonische Begriff des μετρον eine unerledigte Aufgabe [18].

9

Unser Gegenstand führt uns zu einem weiteren Beispiel für diese Aufgabe. In seiner Spätphilosophie brachte Platon die Ideen mit den Zahlen in eine wohl nicht mehr ganz aufzuklärende, aber jedenfalls sehr enge Verbindung. Ein Gesichtspunkt, der dabei sicherlich eine Rolle spielte, ist derjenige der Einheit. Nach dem Liniengleichnis [19] stehen die Ideen von allen Entitäten dem εν oder αγαθον am nächsten, sind also auch in besonderer Weise Einheit. Einheitstiftung ist aber gerade die raison d‘etre der Zahl. Sie ist, als wohldefiniertes mathematisches Objekt, selbst Einheit, begreift aber in sich eine Vielheit, und zwar in universeller Weise: eine Eigenschaft, die *allen* n-Heiten von Entitäten zukommt, muß sich durch die *Zahl* n definieren lassen [20]. Damit ist eine Nähe oder Verwandtschaft von Idee und Zahl nahegelegt.

Nun sieht man sofort, daß gerade diese Universalität die Einheit der Zahl zu einer bloß formellen macht, zu schwach jedenfalls, um so etwas wie die Einheit einer Idee mathematisch wiederzugeben. Zum Beispiel vereint die Idee der Gerechtigkeit (mindestens) die drei Momente von Verdienst, Anspruch und Ausgleich, aber sie ist natürlich mehr als nur die formelle Dreiheit dieser Momente (und a fortiori mehr als die *Zahl* drei), sondern sie vereint sie in einer bestimmten Weise, und diese Weise des Vereintseins der Momente macht die Idee aus. Offenbar müßte man, um die Idee mathematisch zu fassen, die Zahl mit weiterer Struktur anreichern; Gaiser spricht von einer „inneren Logos-Struktur“ [21], die auch zur Folge hat, daß sich die „Ideenzahlen“ nicht wie die gewöhnlichen miteinander verrechnen lassen. Es gibt nun eine Stelle bei Platon, aus der besonders klar hervorzugehen scheint, daß er eben das im Sinne hatte. Im Philebos 16c/d sagt Sokrates:

„Deswegen nun müßten wir...immer *einen* Begriff (ιδεα) von allem jedesmal annehmen und suchen; denn finden würden wir ihn gewiß darin. Wenn wir ihn nun ergriffen haben, dann sei nächst dem *einen*, ob etwa *zwei* darin sind, zu betrachten, wo aber nicht, ob drei oder irgendeine andere Zahl, und mit jedem von jenen Eins (εν) ebenso, bis man von dem ursprünglichen Eins nicht nur, daß es Eins und Vieles und Unendliches (απειρον) ist, sieht, sondern auch wie vieles; des Unendlichen Begriff aber dürfe man an die Menge nicht eher anlegen, bis einer die Zahl derselben ganz übersehen hat.“

Jedem Gegenstand wohnt also eine Idee inne, oder auch mehrere, und zu jeder dieser Ideen gehört ein spezifisches εν, das wir mit Krämer als μετρον verstehen dürfen, und das uns immer auffordert, nach den Zahlen zu sehen. Sokrates erläutert dies am Beispiel der Tonkunst: im Begriff des Tons liegt das Hohe, Tiefe und Einstimmige. Wer aber nicht mehr weiß als das, wird noch kein Kenner der Tonkunst sein:

„Aber, Freund, wenn du die Zwischenräume der Töne aufgefaßt hast, wieviel deren sind der Zahl nach und welcherlei an Höhe und Tiefe, und die Erklärungen dieser Zwischenräume, und wie viele Verbindungen wieder aus ihnen entstehen, welche eben die Älteren erkannt und uns, ihren Nachfolgern, überliefert haben, sie Tonarten zu nennen, und ebenso ähnliche Verhältnisse, die sich in den Bewegungen des Leibes finden, welche man in Zahlen gemessen, wie sie sagen, wiederum Takte und Maß nennen muß, und zugleich bedenken, daß man eben so jedes, was Eins und Vieles ist, untersuchen muß: wenn du dies so aufgefaßt hast, dann bist du der Sache kundig geworden...Das Unendliche aber jedes Begriffes und in jeglichem Dinge macht jedesmal, daß du in der Kenntnis auch nicht zu Ende kommst und nicht zu nennen bist in der Sache und mitzuzählen, da du in keiner Sache jemals irgend auf die Zahl siehst.“

Es kommt also nicht auf die Zahlen allein an, sondern auf die Verhältnisse, in denen sie zueinander stehen, nämlich (in erster Einteilung) den „vertikalen“ der Harmonie und den „horizontalen“ der zeitlichen Sukzession [22]. Die ganzzahligen Verhältnisse, welche die Harmonie ausmachen, kannte Platon natürlich von den Pythagoreern; für zeitliche Sukzession gab es damals noch keine Mathematik; der Begriff der Periodizität gehört der Gruppentheorie an. Die „Bewegung der Leiber“, die Platon offenbar der Tonkunst adjungiert, wäre auch heute nicht leicht zu Mathematik zu machen. Hier kommt eine Gruppe von Strukturen kombinatorischen Charakters in Sicht, die nach Platon also zur Idee der Tonkunst gehören [23].

10

Wollen wir die Einheit der Idee als Einheit einer Struktur fassen, so bietet uns die Begrifflichkeit der heutigen Mathematik eine reiche Varietät von Einheitlichkeit in allen

Arten und Graden. Ein Maß für die Einheitlichkeit, oder „innere Einheit“ eines Objekts hat man in den Beziehungen zu suchen, in welchen dieses Objekt zu andern, gleichartigen Objekten stehen kann. Die Zahlen bieten sogleich den Doppelaspekt der additiven und der multiplikativen Struktur. Additiv gesehen ist jede Zahl umso weniger Einheit, je größer sie ist, weil die Zahl der Partitionen rapide wächst, nur die Eins ist völlig „einig“; multiplikativ dagegen gibt es immer wieder echte Einheit, nämlich bei den Primzahlen, und das „Einheitsverhalten“ zwischen diesen ist erratisch [24].

Eine Zahl „mit weiterer Struktur anreichern“ wird man mathematisch verstehen als Konstruktion eines Objekts vom Typ „Menge plus Struktur“, welches die gegebene Zahl als Anzahl hat; die Zahl erscheint dann als Bild des Objekts unter einem Funktor, der von der zusätzlichen Struktur absieht („Vergißfunktor“). Kriterien für die Einheitlichkeit dieses Objekts werden von der (mathematischen) Kategorie abhängen, der man es zuzurechnen hat. Als besonders einheitlich wird ein Objekt erscheinen, wenn es keine echten Unterobjekte hat wie einfache Moduln; die Primzahlen sorgen auch hier für fundamentale Beispiele, nämlich die Primkörper und die Gruppen ohne echte Untergruppen. Sehr deutliche, dabei völlig elementare Beispiele bietet die Geometrie. Eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve kann keine andere solche enthalten (und folglich auch nicht in einer andern enthalten sein), und dasselbe gilt für geschlossene Flächen, die dafür nicht glatt sein müssen, wie die Oberflächen von Polyedern. Solche Objekte sind also in viel stärkerem Sinne Einheit als eine Zahl. Jedoch brachte Platon die nach ihm benannten Körper nicht mit der Ideenlehre in Verbindung, sondern benutzte sie in seiner Kosmologie (Timaios).

Dual zu der gerade besprochenen Eigenschaft ist diejenige, daß das Objekt keine echten Bilder hat (technisch gesprochen: jeder vom Objekt ausgehende Morphismus ist monomorph), wodurch eine Art Rigidität oder Nicht-Deformierbarkeit zum Ausdruck kommt. In abelschen Kategorien fallen beide zusammen, weil die Unterobjekte die Kerne der Morphismen sind. Eine einfache Gruppe kann viele echte Untergruppen haben, aber keine echten Bilder; bei den Flächen verhält es sich anders: eine Torusfläche kann (holomorph) auf eine Kugel abgebildet werden, eine Kugel aber wieder nur auf eine Kugel (oder natürlich trivial auf einen Punkt) [25]. Man bedenke dabei, daß Objekte, welche die Mathematik in einem technischen Sinn „einfach“ nennt, beliebig komplexe Struktur haben können

11

Dem Einen stellte Platon die unbegrenzte Zweiheit (αοριστος δυας) gegenüber; wie jenes, hat auch diese mathematisch-logische, ontologische und Wertaspekte, und auch hier werden wir die letzteren außer Betracht lassen. Während aber beim εν wenigstens der Begriffssinn halbwegs deutlich zu sein scheint, kann man das von der δυας nicht mehr sagen. Den Aussagen späterer Kommentatoren ist zu entnehmen, daß Platon mit diesem Ausdruck (der in seinen überlieferten Schriften nicht vorkommt [26]) all das bezeichnete, was ein Mehr (μαλλον) oder Weniger (ηττον) zuläßt, vorzugsweise groß (μεγα) und klein (μικρον), auch Überschuß (υπεροχη) und Mangel (ελλειψις). Anders als die Griechen haben wir hier a limine einen mathematischen Begriff, den der (partiell) geordneten

Menge. Das zuletzt genannte Begriffspaar suggeriert aber, daß die Ordnungsstruktur allein nicht ausreicht, denn von Mangel oder Überschuß kann nur gesprochen werden, wo inmitten des Mehr und Weniger ausgezeichnete, eine Norm (μετρον) darstellende Punkte gegeben sind.

Noch unklarer ist, wie sich Platon das Verhältnis beider zueinander dachte. Eine Liste von Begriffspaaren, die das Verhältnis von εν und δυας exemplifizieren sollen, enthält Einheit/Vielheit, Gleichheit/Verschiedenheit, Ähnlichkeit/Unähnlichkeit, Geformtheit/ Ungeformtheit, Grenze/Ausdehnung [27]. Nach Gaiser ging es Platon darum, den gesamten Weltprozeß aus dem Antagonismus der beiden Prinzipien zu verstehen. „Der Versuch einer systematischen Welterklärung und Ontologie beruht also auf dieser einfachen Grundkonzeption: da sich alles aus der Spannung zweier Grundprinzipien ergibt, erhebt sich die Forderung, *überall das Ineinanderwirken und Auseinandertreten der gegensätzlichen Kräfte einheitlich zu begreifen*“ [28]. Wie das εν selbst, erscheinen auch die δυας und das Schema von εν und δυας zu allgemein, als daß ein einzelner mathematischer Begriff es ausschöpfen könnte; was natürlich nicht davon abhalten sollte, auf diesem Weg soweit wie möglich vorzudringen. Die griechische Mathematik konnte das kaum leisten. Toeplitz hat vorgeschlagen, die αοριστος δυας als unbestimmte Proportion a:b zu deuten, wie sie in der Proportionenlehre von Eudoxos auftritt [29]. Auch an die Grundbegriffe „Punkt“ und „Gerade“ ließe sich denken; der Punkt ist sicher in besonderer Weise εν, Eines, die Gerade tatsächlich αοριστος, unbegrenzt, und sie enthält in sich auch das Mehr und Weniger. Hierin kann man sicher Beispiele für jene Begriffe sehen. Aber eine Mathematisierung, die Anspruch auf philosophische Kenntnisnahme erheben will, erfordert eine gewisse begriffliche Spannweite, wofür die Mathematik von Zahlen und Figuren keinen Raum bietet. Wir gehen nun durch einige der Grundbegriffe und der Aspekte von εν und δυας, sub specie mathematica.

12

Für alles „Mehr oder Weniger“ hat die Mathematik heute, wie schon erwähnt, den Grundbegriff der partiell geordneten Menge, i.e. eine Menge mit einer antisymmetrischen und transitiven Relation. Der Begriff kombiniert das „lineare“ Mehr und Weniger mit der Möglichkeit „hierarchischer“ Verzweigung, also das quantitative mit einem kombinatorischen Moment. Sind je zwei Elemente vergleichbar, heißt die Ordnung linear (auch total); es ist aber auch möglich, daß es zu einem Element zwei nächste gibt, die untereinander unvergleichbar sind; in solchen Fällen wird man die Menge eher als gerichteten Graphen denken. Damit kann jede Situation gefaßt werden, in der einzelne Entitäten paarweise untereinander verbunden sind, wobei jede Verbindung von zweien eine ausgezeichnete Richtung hat. Das zeigt die große Allgemeinheit des Begriffs, die ihn sicher in die Nähe einer platonischen αρχη rückt. Zum Beispiel ist leicht zu sehen, wie die Folge der Zahlen in Ordnungstermini beschrieben werden kann; weniger bekannt ist, daß sich ein topologischer Raum (unter einer milden Regularitätsvoraussetzung) aus dem Verband seiner offenen Teilmengen rekonstruieren läßt [29a].

Die allgemeinste Bedeutung von „Gleichheit“ faßt die Mathematik heute im Begriff der Äquivalenzrelation, typischerweise definiert als „gleich in irgendeiner Hinsicht“. Ist ein

Gegenstandsbereich als Menge M gegeben, entsprechen die Äquivalenzrelationen auf M den Partitionen von M. Diese bilden einen Verband, in dem die Gleichheit als „feinste“ Partition das kleinste Element ist; das größte ist die gröbste Partition, die alle Elemente zusammenfaßt („Vor dem Gesetz sind alle gleich“). Sind die Elemente von M selbst Mengen, so erscheint die Gleichheit der Elemente von M als Äquivalenzrelation auf der Vereinigung der Elemente von M. Eine Mengentheorie ohne „Urelemente“ eröffnet damit die Möglichkeit, den Leibnizschen Gedanken, daß jede Monade weitere in sich enthält in unendlicher Schachtelung, mathematisch zu realisieren [30]. Es ist ohne weiteres denkbar, daß alles, was uns als „individuum“ erscheint, eine Äquivalenzklasse von Objekten ist, die zu unterscheiden uns die Optik fehlt (im Bereich physischen Sehens längst geläufig).

13

Auch den platonischen Grundbegriff der Ähnlichkeit (eine Verallgemeinerung von „gleich“) kann man natürlich mit klassischer (mengentheoretischer) Relationenlogik angehen (wie es Carnap getan hat, s.u.). Eine Ähnlichkeitsrelation wird dann stets reflexiv und symmetrisch sein, aber nicht notwendig transitiv (in welchem Fall eine Äquivalenzrelation vorliegt). Transitiv ist Ähnlichkeit als Gleichheit in, oder Gleichheit unter Absehung von bestimmten Hinsichten; intransitiv ist Ähnlichkeit als „von geringer Verschiedenheit in bestimmten Hinsichten“; was natürlich eine Quantifizierung der Bestimmungen in den fraglichen Hinsichten voraussetzt.

Die „eigentlich zuständige“ Mathematisierung dieses Begriffs aber liegt im Grundbegriff der mathematischen Kategorienlehre, dem Begriff des Morphismus (wie oben bei der Diskussion von Einheit schon deutlich wurde). Jeder Morphismus f kann als eine Ähnlichkeit aufgefaßt werden, wie das ja schon im Begriff liegt (μορφη = Gestalt; Morphismus = gestalterhaltende Abbildung); sie ist maximal, wenn f ein Isomorphismus ist, minimal, wenn f durch ein End- oder Anfangsobjekt faktorisiert; die „maximale Unähnlichkeit“ von Objekten A und B, der Gegenpol von Isomorphie, wäre dann dadurch zu definieren, daß zwischen A und B nur solche „trivialen“ Morphismen möglich sind, zum Beispiel zwischen Gruppen mit teilerfremden Ordnungen oder Moduln mit verschiedenen Kompositionsfaktoren. Allgemeiner kann Hom(A,B) als ein Maß für die Ähnlichkeit von A und B dienen. In abelschen Kategorien kann Ähnlichkeit relativ zu einer Unterkategorie C definiert werden: A und B sind C-isomorph, wenn es einen Morphismus $A \rightarrow B$ gibt, dessen Kern und Cokern in C liegen (in manchen Fällen spricht man dann von „Quasiisomorphismus“). Das entspricht dem Verständnis von Ähnlichkeit als „Gleichheit bis auf...“ oder „Gleichheit *in Absehung* von bestimmten Hinsichten“. Sozusagen dual dazu ist Ähnlichkeit als “Gleichheit *in* bestimmten Hinsichten“. Dies läßt sich fassen, indem man Ähnlichkeit durch gemeinsame Unterobjekte definiert; Grade von Ähnlichkeit lassen sich dann durch Forderungen an die Quotienten definieren. Die befriedigendste Realisierung aber geschieht durch Funktoren; ein Funktor isoliert eine bestimmte Hinsicht, unter der die Objekte betrachtet werden können. Ein klassisches Beispiel ist Kleins Erlanger Programm für die Geometrie; damit verwandt ist die vierfache Abstufung isometrisch-diffeomorph-homöomorph-homotopieäquivalent in der Topologie.

14

Welchen Gewinn bringt nun eine solche Mathematisierung platonischer Grundbegriffe? Denn in der Allgemeinheit, in der sich unsere Diskussion notwendigerweise bewegt, können aussagekräftige Resultate nicht erwartet werden. Der Gewinn ist erstens, daß mathematische Begriffe *als solche* eine geregelte Verwendung haben: es ist jederzeit leicht entscheidbar, ob ein Satz, in dem sie figurieren, *sinnvoll* ist oder nicht (ob er *wahr* ist, ist noch eine andere Frage). Die Mathematisierung ist die Kur gegen die „Verhexungen durch die Sprache“; sie verhindert das Sich-Abarbeiten an Scheinproblemen. Zweitens bilden die mathematisierten Grundbegriffe ein System (und in diesem Sinne eine Einheit), sind untereinander in mannigfacher Weise verbunden und kombinierbar. Und drittens können sie, wenn der Anlaß es gestattet oder fordert, spezialisiert, also mit Struktur angereichert werden, und je stärker diese Spezialisierung, desto stärker werden auch die Aussagen sein, die man von der Theorie erwarten kann. Dabei sind die strukturellen Anreicherungen von überaus großer Varietät und Flexibilität, so daß die Reglementierung des Sprachspiels kaum mehr als Einschränkung erscheint. Der Preis, der für diese Vorzüge bezahlt werden muß, ist ein anderer: wir wissen nicht mehr *von vornherein*, was dieses Sprachspiel über die erfahrbare Wirklichkeit aussagt. Es gestattet die Bildung von Modellen, mit denen wir Objekte oder Prozesse mathematisch beschreiben können, aber ob oder in welchem Umfang die Beschreibung zutrifft, muß die Erfahrung zeigen.

15

Eine mögliche Interpretation des εν−δυας−Schemas ist das Gegenüber von formgebendem Prinzip (εν) und geformtem Stoff (δυας), und mit einer sehr konkreten Realisierung dieses Verhältnisses befaßt sich die Theorie der dynamischen Systeme. Das formgebende oder einwirkende Prinzip ist ein Operator, dessen Einwirkung periodisch (diskret) oder kontinuierlich gedacht werden kann, der Stoff eine Menge mit weiterer Struktur, ein metrischer oder Maßraum. Ziel der Theorie ist stets, die langfristige Entwicklung zu verstehen, sei es des Ganzen oder einzelner Teile; einschlägig sind Begriffe wie Stabilität, Gleichgewicht, Chaos. Unter erstaunlich schwachen Voraussetzungen gilt der Wiederkehrsatz von Poincaré: ist der Maßraum endlich, kehren fast alle Elemente einer jeden Teilmenge unendlich oft in diese zurück (eine kleine mathematische Hilfestellung zur Lehre von der ewigen Wiederkehr). Ein „universales Paar“ von εν und δυας zu postulieren bedeutet, so verstanden, den Weltprozeß als dynamisches System zu begreifen; für Teilprozesse wie das Verhalten des Sonnensystems sicher eine adäquate Betrachtungsweise.

Eine Variante dieses Prinzips von Stoff und Form besteht darin, daß der Stoff durch das Formprinzip nicht verändert, sondern strukturiert wird. In größerem Stil durchgeführt ist dies in Carnaps „Logische[m] Aufbau der Welt“. Als das εν, das einheitliche Formprinzip tritt der Grundbegriff der „Ähnlichkeitserinnerung“ auf, als die zu ordnende δυας die Menge der „Elementarerlebnisse“, auf der die Ähnlichkeitserinnerung eine reflexive und symmetrische, aber nicht durchweg transitive Relation ist. Die „Quasianalyse“ der zunächst amorphen Erlebnismenge vollzieht sich durch Bildung von „Ähnlichkeitskreisen“ (der Ersatz für die Äquivalenzklassen); ihnen entsprechen wiederkehrende Erfahrungs- oder

Erlebniskomplexe, die wir zu Begriff bringen können. Natürlich ist dieses Modell viel zu simpel, um dem menschlichen Erfahrungsganzen gerecht werden zu können; aber es bleibt erstaunlich, wie hoch man auf so schmaler Basis bauen kann.

Die reinste Gegenüberstellung von Stoff und Form aber vollzieht die Mathematik auf der Metaebene, nämlich in der Modelltheorie, indem sie die „reine Theorie", ein syntaktisches Gebilde, von dem trennt, worauf sie sich bezieht, ihre Modelle. Damit ist ein Rahmen geschaffen für einen mathematischen Begriff von Wahrheit und die fundamentalen Einsichten der mathematischen Logik, über die hier nicht berichtet werden muß; aber auch für die Varianten und Weiterungen der „Nichtstandardmathematik" und kategorialen Logik, die im mathematischen Diskurs wohl noch nicht die ihr zukommende Rolle spielt. Wenn es eine mathematische Erscheinungsform der platonischen Idee gibt, dann ist es eine Axiomatik mit ihren undefinierten Grundbegriffen und -Relationen, in denen die „Idee" (im informellen Sinn) ihre einfachste und zugleich strengste Fassung findet. Der χωρισμος erscheint als die Trennung von Syntax und Semantik, und die μεθεξις liegt einfach in der Erfüllung der Grundrelationen gemäß der Definition des Modellbegriffs.

16

In einer anderen Erscheinungsform des εν–δυας–Schemas liegt die Zweiheit im gestaltenden Prinzip selbst, welches rein schöpferisch wirkt und keinen zu bearbeitenden Stoff vor sich hat [31]. Bekanntlich hat Dedekind das reelle Kontinuum konstruiert als Menge von disjunkten Zweiteilungen („Schnitten") $\mathbb{Q} = U \cup V$ des rationalen Zahlkörpers, wobei alle v größer sind als alle u und V kein kleinstes Element hat (die rationalen q werden identifiziert mit dem Schnitt, in dem q das größte Element von U ist). In seinem Buch über Zahlen und Spiele [32] hat Conway diese Konstruktion auf den größten denkbaren Bereich ausgedehnt. Sind x^L und x^R disjunkte Mengen von Zahlen, derart daß keine Zahl in x^L größer als eine Zahl in x^R ist, kann man eine neue Zahl $x = (x^L \mid x^R)$ bilden, das geordnete Paar von x^L und x^R (man denke sich x als eine „kanonisch" zwischen x^L und x^R liegende Zahl). Die Konstruktion, wie auch die Definition der Anordnung und der algebraischen Grundoperationen, ist rekursiv und beginnt mit $x^L = x^R = \emptyset$; die ersten Zahlen sind

$$0 := (\emptyset \mid \emptyset), \quad 1 := (0 \mid \emptyset), \quad -1 := (\emptyset \mid 0) .$$

Endliche Iteration ergibt alle rationalen Zahlen, in deren Nenner höchstens 2 steckt; transfinite Iteration einen Körper, der $\mathbb{R}$ enthält, aber auch unendlich große und kleine Zahlen. Läßt man die Bedingung an x^L und x^R fallen, ergibt sich eine größere Klasse von Objekten, die man als Spiele interpretieren kann. Das ganze, sehr ausgebreitete Gebilde entsteht also durch ein einziges Erzeugungsprinzip (εν), welches in fortgesetzter dyadischer Synthese besteht, diese dabei in der einfachsten denkbaren Form, nämlich durch bloßes Hintereinanderschreiben.

Wie aus dieser Beschreibung hervorgeht, setzt das Verfahren ein „umgebendes" Mengenuniversum voraus. Das beeindruckendste Beispiel für das gerade exemplifizierte εν–δυας–Schema, das dyadische εν als Erzeuger mathematischer Vielfalt, ist natürlich die Mengenlehre selbst. Eine einzige undefinierte Grundrelation, die binäre Elementrelation, reicht (zusammen mit der Gleichheit) aus, durch eine Reihe ingeniöser Konstruktionen alle bekannte Mathematik auszudrücken; und diese Mathematik reicht aus, die Gesetze der Naturvorgänge wie auch unseres Denkens darüber zu fassen. Das ist zwar allbekannt, verdient aber doch von Zeit zu Zeit erwähnt zu werden.

17

Eine weitere Spezialisierung von εν und δυας, wenn nicht überhaupt ihnen gleichzusetzen, ist das Paar von περας und απειρον, Grenze oder Bestimmung und das dem Entzogene, das Unbegrenzte oder Unbestimmte. Hierfür findet sich eine ausführliche Erörterung in Platons überliefertem Werk, nämlich im Philebos (24 ff). Sokrates faßt sie so zusammen:

„Alles, woran wir sehen, daß es mehr oder weniger wird, und das Stark und Schwach und Sehr und alles dergleichen annimmt, dies alles müssen wir unter die Gattung des Unbegrenzten als unter Eins zusammenstellen nach unserer vorigen Rede, da wir sagten, daß wir alles Zerspaltene und Zerrissene nach Vermögen müßten unter e*inen* Begriff einzuzeichnen suchen, wenn du dich erinnerst." „Wohl erinnere ich mich." „Also was nun dieses nicht annimmt, zuerst das Gleiche und die Gleichheit, und nach dem Gleichen das Zwiefache und was sonst Zahl ist im Verhältnis zu Zahl und Maß im Verhältnis zu Maß, wenn wir dies alles unter die Grenze rechneten, würden wir wohl ganz recht daran tun. Oder wie meinst du?" „Ganz vortrefflich, o Sokrates".

Απειρον findet sich demnach in Qualitäten wie Stärke, Wärme, Größe, oder, mit dem modernen Ausdruck, Beobachtungsgrößen, deren Werte in einem *offenen* Intervall zu denken sind: zu jeder wahrgenommenen solchen Größe ist eine größere oder kleinere denkbar[33]. Περας ist jede Bestimmung dieser Qualität durch Zahl oder Maß (Proportion), also (zumindest vorzugsweise) mathematische Bestimmung, απειρον der Bereich möglicher Bestimmung. Und erst wenn man die der jeweiligen Sache angemessenen Bestimmungen vorgenommen hat, so hat Sokrates zuvor (16e) im selben Dialog gesagt, kann man das Übrige im απειρον belassen.

18

Es ist mit Händen zu greifen, daß das Kontinuum ein Hauptbeispiel für ein απειρον darstellt. Ernsthaft angegangen wurde es zum ersten Mal von zwei Mitgliedern der platonischen Akademie, nämlich von Aristoteles auf begrifflichem, von Eudoxos auf mathematischem Wege. Aristoles fragt nach dem Wesen des Kontinuierlichen (συνεχες) und findet es in der besonderen Weise, in der seine Teile untereinander zusammenhängen (und die viel später durch Dedekind mathematischen Ausdruck erhielt) [34]. Für Eudoxos manifestiert sich das Kontinuum in Proportionen ausgedehnter Größen wie Strecken, Flächen und Winkeln. Hier begegnet man dem απειρον in Gestalt irrationaler Proportionen wie die der Quadratseite zur Diagonale (deren Irrationalität, ja quadratischen Charakter man kannte) oder der Fläche des Einheitskreises zu der des Einheitsquadrats (die ebenfalls viel später als irrational nachgewiesen wurde). All diese sind natürlich wohldefinierte mathematische Objekte; was dunkel bleibt, ist ihre Bestimmung durch die Zahl. Eudoxos fand einen Weg, sie auch ohne dieses περας mathematikfähig zu machen.

Die erste und schwierigste Aufgabe dabei ist, zu erklären, wann zwei Proportionen als gleich gelten sollen. Das ist leicht, wenn sie rational sind; den allgemeinen Fall löst Eudoxos durch eine geniale Vorwegnahme dessen, was wir heute als Dichtigkeit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ kennen. In unsere Termini übersetzt, läuft seine Definition darauf hinaus, daß zwei Proportionen r und s gleich sind, wenn für alle rationalen p und q gilt, daß

$$p < r < q \text{ genau dann, wenn } p < s < q$$ [35].

Das απειρον des Kontinuums ist sozusagen nach innen gerichtet; es besteht in einer Verdichtung, die sich der begrifflichen Erfassung nicht ohne weiteres erschließt. Die einzelnen Stellen im Kontinuum könne nicht (alle) durch rationale Zahlen dargestellt werden, aber sie können stets charakterisiert werden durch die Weisen, in denen sie sich rational eingrenzen lassen. Methodisch bemerkenswert ist, daß Eudoxos nicht definiert, was eine Proportion *sein* soll. Für unsere Begriffe ist es von der Definition der Gleichheit nur ein Schritt zu einer *Definition* der reellen Zahlen durch Äquivalenzklassen von geordneten Paaren von Größen; aber das, so scheint es, lag außerhalb antiker Denkmöglichkeiten [36].

19

Falsch wäre übrigens die Meinung, wir hätten (in unserer Standardtheorie der reellen Zahlen) das απειρον elimiert. Bekanntlich zeigt Cantors Diagonalargument, wie man zu jeder vorgelegten Folge reeller Zahlen eine Zahl aufweisen kann, die in dieser Folge nicht vorkommt; das Kontinuum ist nicht abzählbar. In einer Sprache mit abzählbarem Alphabet sind aber nur abzählbar viele Definitionen möglich. Unser mathematisches Sprachspiel vom Kontinuum postuliert also die Existenz einer überabzählbaren Zahlenmasse, auf die nie das Licht eines menschlichen Gedankens fallen wird; ein απειρον im stärksten Sinn, denn natürlich kann man keine Zahl angeben, die man nicht definieren kann [37]. Unsere Mathematik hat das απειρον nicht zurückgedrängt, sondern im Gegenteil vereinnahmt, und dies ermöglicht unserm Sprachspiel glatte Existenzaussagen wie den Zwischen- und Mittelwertsatz. Es bleibt auch nicht in jedem Sinne απειρον, denn es gestattet ein Maß (im technischen Sinn), es läßt sich verrechnen. Auch lassen sich „Grade der Irrationalität" definieren; die algebraischen Zahlen gehören für uns nicht mehr, wie für die Griechen, zum απειρον, und die transzendenten gestatten immerhin noch Mahlers Einteilung [37a]. Wahrscheinlichkeits- und Chaostheorie bieten geradezu eine Mathematik des απειρον; um eine solche treiben zu können, muß man es erst „formell" in Besitz nehmen. Werkzeuge der Vereinnahmung aber sind, in letzter Instanz, die nichtkonstruktiven Axiome der Mengenlehre, das Komprehensions- und Auswahlaxiom mitsamt dem Axiom des Unendlichen, ohne die keine der bekannten Konstruktionen von $\mathbb{R}$ möglich ist.

20

Ein Paradigma von großer Verbreitung in der Antike war der rechte Winkel [38]: er gestattet keinerlei Verrückung, während ein spitzer Winkel geringfügig verändert werden kann und immer noch spitz bleibt. Logisch betrachtet, ist die Sachlage durchsichtig: der Ausdruck „Rechter Winkel" bezeichnet einen *bestimmten* Winkel, „spitzer Winkel" dagegen eine

Klasse von Winkeln, genauer einen Winkelraum, der durch offenes Intervall repräsentiert werden kann. Natürlich ist auch der siebzehnte Teil eines rechten Winkels ebenso wohlbestimmt wie jener; die Wohlbestimmtheit hängt nicht von der Komplexität der Definition ab, sondern nur von ihrer Korrektheit. Das Beispiel scheint jedoch darauf hinzuweisen, daß im Begriff des περας etwas mehr liegt als Bestimmtheit im Sinne mathematischer Wohldefiniertheit, nämlich irgendwie *ausgezeichnete* Bestimmung, ähnlich wie auch μετρον nicht rein quantitativ sein muß, sondern ein Strukturmoment aufweisen kann. Der Dialog bestätigt das in der Folge; περας ist mehr als irgendeine Festlegung, sondern eine solche, die „das Angemessene und Ebenmäßige bewirkt“ (26a) sowie „alles, was schön ist“ (26b). Im Fall des rechten Winkels liegt die Auszeichnung in seiner Symmetrieeigenschaft; ebenfalls durch Symmetrien würden wir andere geometrische Gebilde charakterisieren, in denen die antike Tradition das περας verkörpert sah, nämlich gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke und den Kreis. Aber Symmetrie war für die Griechen kein *mathematischer* Begriff. Hier zeigt sich, wie wichtig es ist, mit jeder Klasse von Objekten auch die ihnen zukommenden Morphismen ins Spiel zu bringen, ein fundamentaler Glaubensartikel der heutigen Mathematik [39]. Die griechische Mathematik hatte natürlich Resultate, in denen Größen als Funktionen anderer Objekte auftreten, wie Formeln für Volumina, aber sie machte den Funktionsbegriff als solchen nicht zum Gegenstand; sie kannte Kongruenz von Figuren, aber nicht die affinen Abbildungen, die sie vermitteln.

21

Verweist περας auf Struktur, so muß das Analoge auch für das απειρον gelten, und so begegnen in der Mathematik neben dem quantitativen (?) απειρον des Kontinuums sozusagen strukturelle απειρα; Bereiche, in denen wir uns, und zwar aus prinzipiellen Gründen, nie völlig auskennen werden. Naiv gestellte Klassifikationsprobleme (alle Gruppen, Graphen, topologische Räume) sind unschwer als hoffnungslos zu erkennen; aber die Arbeit der Grundlagenforschung hat ans Licht gebracht, daß auch sachgemäß gestellte Probleme, wie Hilberts 10. Problem oder das Wortproblem der Gruppentheorie, in einem präzisierbaren Sinne intraktabel sein können. Newtons Wort, was wir wüßten, sei ein Tropfen, was wir nicht wüßten, ein Ozean, wird so von einer Metapher zu einer mathematischen Tatsache. Von einem απειρον kann auch gesprochen werden, wo die Komplexität alle algorithmischen Möglichkeiten übersteigt. Man wird nie eine Rechnung ausführen können, die mehr Schritte erfordert, als es Elementarteilchen im Universum gibt[40]. Auch die Komplexität kann strukturell sein; vor einer Aussage mit zuvielen alternierenden Quantoren kapituliert der menschliche Intellekt. Wer garantiert uns, daß es nicht solche Aussagen sind, die den Schlüssel enthalten zu dem, was uns wichtig ist?

Freilich hat der Mathematiker zahlreiche Strategien, dem απειρον zu begegnen. Wo Klassifikation nicht möglich ist, hilft vielleicht eine gröbere Einteilung, oder man hofft, daß wenigstens die „relevanten“ Fälle klassifizierbar sind. Wo wir keine exakte Formel haben, gibt es vielleicht eine asymptotische. Wo ein Algorithmus, der ein exaktes Ergebnis liefern würde, zu aufwendig ist, gibt es vielleicht einen handhabbaren, der ein angenähertes liefert. Wo die Komplexität zu groß wird, sucht man nach höherstufigen Begriffen, die sozusagen Schneisen in den Urwald legen. Aber es ist klar, daß all diese Strategien das Problem nur weiterschieben. Die „Wissenschaft vom Unendlichen", wie Hermann Weyl die Mathematik nannte, wird immer unausgeschöpfte απειρα enthalten.

22

Breiten Raum widmet Gaiser dem Gedanken, daß die Folge der Dimensionen, vom Punkt bis zum dreidimensionalen Körper, von Platon ontologisch gedeutet worden sei. Das ausführlichste Zeugnis dafür findet sich im Kommentar des Alexander von Aphrodisias zur aristotelischen Metaphysik:

„Als Prinzipien des Seienden legten Platon und die Pythagoreer die Zahlen zugrunde, denn sie waren der Ansicht, daß das Ursprüngliche (Erste) und das Nichtzusammengesetzte Prinzip sei, vor den Körpern aber seien ursprünglich die Flächen – sofern das, was einfacher ist und nicht mitaufgehoben wird, von Natur ursprünglich ist -, vor den Flächen die Linien nach dem gleichen Verhältnis und vor den Linien die Punkte, die die Mathematiker σημεια, sie selbst aber Einheiten (μοναδες) nannten und die ja nun ganz und gar unzusammengesetzt sind und nichts (Ursprünglicheres) vor sich haben. Die Einheiten aber sind Zahlen, und so sind die Zahlen das Ursprünglichste (Erste) des Seienden. Und da nach Platon die Formen (ειδη) das Ursprünglichste und die Ideen (ιδεαι) das Erste sind in bezug auf die Dinge, die von ihnen auch das Sein haben – was er auf vielerlei Art zu beweisen suchte – , nannte er die Ideen Zahlen." [41]

Gaiser übernimmt die Zuschreibung dieser Lehre an Platon und folgert: „Da die ganze „dimensional-ontologische" Reduktion offenbar einen Übergang zwischen den (körperlichen) Erscheinungen und den Ideen sichtbar machen soll, ist anzunehmen, daß *die Folge der Dimensionen (Zahl-Linie-Fläche-Körper) den ganzen Seinszusammenhang bis zu den Erscheinungen repräsentieren soll."* [42] Was diesem Gedanken eine gewisse Plausibilität verleiht, ist der Umstand, daß die Dimensionenfolge den Charakter eines Schichtenbaus hat: jede Schicht setzt die voraufgegangene voraus, kann aber ohne die folgenden gedacht werden; so entsteht eine Ordnung, die das Einfache mit dem Mannigfaltigen vermittelt. Dasselbe gilt nun auch für Platons ontologische Grundvorstellung, wie er sie im Liniengleichnis entwickelt (Politeia 509/510). Die Gesamtheit des Seienden wird dort zunächst unterteilt in die Bereiche des Denkbaren und des Wahrnehmbaren; der erstere sodann weiter in die Ideen und die mathematica, der zweite in die (physischen) Gegenstände und ihre Abbilder. Den vier Bereichen entsprechen ihnen angemessene Erkenntnisweisen, von „oben nach unten" die unmittelbare Einsicht (νοεσις), die diskursive Erkenntnis (διανοια), empirisches Wissen und schließlich bloßes Meinen (δοξα) [43]. Auch dies ist ein vierstufiger Schichtenbau, denn es ist klar, daß Abbilder nicht denkbar sind ohne Gegenstände, Gegenstände nicht ohne mathematica und Ideen; wohl aber umgekehrt.

23

Über diese schwache Analogie kommt man aber kaum hinaus. Schon das angeführte Zitat von Alexander offenbart in der fehlerhaften Gleichsetzung Punkte - μοναδες - Zahlen eine Erschleichung: das Einfachste in der (platonischen) Ontologie sind die Ideen, diese sind Zahlen, also muß das dimensional Einfachste, der Punkt, ebenfalls Zahl sein. Aber Punkte haben mit Zahlen nicht mehr zu tun als Linien oder Flächen (wenn man die Zahl Drei geometrisch darstellen will, kann man ebensogut drei Striche zeichnen wie drei Punkte); ein Punkt kann nicht Maßeinheit sein noch Einheit in einem strukturellen Sinn. Gaiser jedoch macht sich das zu eigen, geht auf den offensichtlichen Fehler nicht ein [43a] und spricht in der Folge durchgängig von „Zahl-Linie-Fläche-Körper“ als der Dimensionenfolge.

Eine weitere Analogie soll darin liegen, daß die Dimensionenfolge wie die Seinsstufen eine Art Auflösung vom Bestimmten ins Unbestimmte aufweise, von εν und περας zur δυας und zum απειρον. Das paradigmatische απειρον war für die griechische Mathematik das Irrationale (Inkommensurable), und in der Tat begegnet das quadratisch Irrationale in der Fläche (Diagonale in Fünfeck und Quadrat), das kubisch Irrationale im Raum (Diagonale im Würfel); die Zunahme der Irrationalität mit der Dimension suggeriert Gaiser in einem Diagramm (S.24), und S.159 behauptet er, das Irrationale beruhe für Platon auf einem „Spannungsverhältnis“ zwischen den Dimensionen. Dies scheint vielleicht auf den ersten Blick plausibel, hält aber näherer Betrachtung nicht stand. Das Irrationale begegnet nicht erst in der Fläche, sondern schon auf der Geraden, nämlich in der Proportion des Goldenen Schnitts, und es ist nicht schwer, durch entsprechende Dreiteilung eines Intervalls eine kubische Irrationalität zu erzeugen (man beachte, daß sich dieses Argument in den Grenzen griechischer Begrifflichkeit hält). In der Ebene begegnet nicht bloß quadratische Irrationalität, sondern solche beliebigen Grades, nämlich bei der elementaren (im allgemeinen nicht lösbaren) Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges n-Eck zu konstruieren (was die besten Griechen vielleicht geahnt haben), schließlich die Kreiszahl π, deren „Rationalitätsgrad“ für die Griechen allerdings απειρον bleiben mußte [44]. Jede Irrationalität manifestiert sich geometrisch als eine Proportion, ist also „mathematisch existent“ schon auf einer Geraden.

24

Ein weiterer Umstand scheint mir der Zuschreibung dieser Lehre an Platon im Wege zu stehen. Wenn Platon die Dimensionenfolge als eine Art Modell für seine Ontologie ansah, dann, so sollte man annehmen, müßten sich die Dimensionen mit den im Liniengleichnis aufgeführten Schichten (Idee – mathematica – Gegenstände – Abbilder) sozusagen „zur Deckung“ bringen lassen. Jedoch paßt die Dimensionenfolge ganz und gar nicht auf diese Einteilung. Daß man Ideen allenfalls mit Zahlen, keinesfalls aber mit Punkten identifizieren kann, ist schon klar geworden. Weiter müßten den Abbildern der Gegenstände die Körper, den Gegenständen selbst die Flächen entsprechen sollen, was absurd ist und die Phänomene auf den Kopf stellt. Der Schnitt zwischen dem Denkbaren und dem Wahrnehmbaren müßte bei der Dimensionenfolge per analogiam zwischen die Linien und die Flächen fallen, was ganz willkürlich ist; ein wirklicher Schnitt fällt zwischen die Flächen und die Körper, denn Punkte, Linien und Flächen sind als mathematische Gebilde stricto sensu nur denkbar; wirklich sehen können wir nur Körper.

Die Dimensionenfolge scheint mir daher ungeeignet, die Platonische Ontologie darzustellen. Gaiser spricht S.22 von der Mathematik als einem „Vergewisserungsbereich" für die Philosophie. Ein Mathematiker würde von einem Modell sprechen; aber nur dann, wenn zwischen dem Modell und dem Modellierten signifikante strukturelle Ähnlichkeiten bestehen, kann man die Mathematik als Garantin für Sachhaltigkeit und Konsistenz der modellierten Theorie heranziehen. Doch die Analogisierung bleibt willkürlich, die Ähnlichkeiten vage und oberflächlich, das Ganze hat kein tragfähiges fundamentum in re [45]. Was aber die wahre Natur dieser Folge betrifft, die tieferen Gesetze und Unterschiede der Dimensionen, wie sie Infinitesimalrechnung, Algebra und Topologie erforscht haben, so sind schon die Fragestellungen weit jenseits griechischer Begrifflichkeit. Bereits die allereinfachste Frage, ob denn die Dimensionen wirklich „strukturell" verschieden sind, erfordert einen abstrakten Begriff von Topologie; sie läuft darauf hinaus, ob offene Kugeln in Räumen verschiedener Dimension homöomorph sein können. Die (wie erwartet negative) Antwort wurde erst von Brouwer mit algebraisch-topologischen Mitteln bewiesen [46].

25

Platon wollte seine rationale Metaphysik auf Mathematik stützen, aber diejenige, die er vorfand, und wohl auch die, die er wollen oder ahnen konnte, war einer solchen Aufgabe nicht annähernd gewachsen. Unsere heutige wäre dies in weit höherem Grade; sie ist überhaupt jeder (sachgemäß gestellten) Aufgabe gewachsen, denn (um etwas oben schon Gesagtes mit Worten von Hilbert zu wiederholen) alles, was zur Bildung einer Wissenschaft reif wird, verfällt der axiomatischen Methode und damit der Mathematik. Aber die Zeit für rationale Metaphysik, so wird man sagen, ist vorbei. Unsere Lehre vom Seienden heißt Wissenschaft, und sie deduziert nicht aus höchsten Prinzipien (αρχαι), sondern befragt die Natur selbst im Experiment, stimmt die Theorie mit den Befunden ab und arbeitet sich langsam zum Grund der Dinge. So die gängige Meinung. Indessen dürfte eine Prise Relativismus im Sinne von Spengler angebracht sein. Wenn heute ein Philosoph, ohne mathematische Begriffe zu benutzen, von einer feinsten Grundschicht alles Seienden sprechen würde, die aus ausdehnungs- und qualitätslosen Elementen bestehe, dann würde man ihn kaum ernstnehmen; aber eben das tut der Mathematiker, der seine Objekte als Mengen mit aufgeprägten Strukturen denkt; und mit ihm der Physiker, der aus solcher Mathematik seine Weltmodelle zimmert. Das mathematische Sprachspiel, das unsere Physik trägt, hat seine Absonderlichkeiten nicht weniger als irgendein spekulativ-philosophisches; so natürlich es ist, Mengen zu Gegenständen von Mathematik zu machen, so wenig natürlich ist es, alle mathematischen Gegenstände als Mengen zu konstruieren; worüber der handgreifliche Erfolg leicht hinwegtäuscht [47]. Im Begriff der Mannigfaltigkeit wird die Substanz als Menge von Zahlen (genauer: Koordinatenvektoren) gefaßt; so bringt uns - welche Ironie! - der moderne Begriff zurück zur Lehre der Pythagoreer, wonach alles Zahl sei. Mit ein bißchen Bosheit könnte man sagen, daß mathematische Naturwissenschaft die moderne Form rationaler Metaphysik ist.

Das kann man einräumen und erwidern: Nun gut, streiten wir uns nicht um Worte; was zählt, ist der Erfolg, die Bewährung der Theorie. Offensichtlich sind wir erfolgreicher in der Bewältigung der Welt, der „Ermächtigung" über sie. Aber den Grund dafür wird man darin zu suchen haben, daß die Antike andere Prioritäten hatte, als Folge davon die

Mathematik, wie auch andere Wissenschaften, nicht so nachdrücklich vorantrieb, wie es für uns selbstverständlich ist [48]. Der Mangel an Systematik und Konsequenz fällt auf Schritt und Tritt ins Auge; die genialen Leistungen – an denen es nicht fehlte, die aber naturgemäß vereinzelt blieben – haben nicht Schule gemacht. Die Griechen hatten eine Axiomatik für die Geometrie, aber sie sahen offenbar nicht, daß man auch für die Arithmetik eine braucht; sie wußten, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, aber wir wissen nichts von einem Versuch, deren Folge, eins der stärksten Faszinosa aller Mathematik, zu verstehen; Eudoxos hatte einen entscheidenden Schritt zu einer brauchbaren Theorie der reellen Zahlen getan, aber die nächsten Schritte, obwohl einfacher, blieben aus; die Exhaustionsbeweise des Eudoxos und Archimedes stehen an der Schwelle zu einer Infinitesimalrechnung, aber diese kam erst mit Newton und Leibniz. Die Antike war offenbar auch wenig daran interessiert, mathematisches Wissen technisch nutzbar zu machen; andernfalls hätten 1000 Jahre antiker Kultur mehr Fortschritte in diesem Bereich erbracht. Man gab sich mit einem technischen Gesamtniveau zufrieden, wie es im Grunde schon bei Homer zu finden ist, und das natürlich Entwicklungen und Verbesserungen, aber nie eine echte Revolution erlebte. Was die Griechen erreicht hätten, wenn sie hier mit „faustischer" Energie vorgegangen wären, darüber können wir wenig sagen; zu behaupten, dann wäre sie eben, abgesehen von Stilistischem, eher als wir da angekommen, wo wir heute stehen, wäre nichts weiter als eine petitio principii.

Platons Vision, eine mathematische Lehre von allem Seienden, scheint mir weniger überholt als vielmehr „aus den Startlöchern heraus" und eigentlich unterwegs zu sein. Die Preisgabe ontologischer Ansprüche war notwendig für die Freiheit, die dieses Unternehmen voraussetzt und die Mathematik heute genießt, nämlich nur ihrem eigenen Gesetz folgen zu müssen. Hier bleibt ein unüberbrückbarer Unterschied: für uns ist Mathematik nicht mehr Mittlerin zum Ideenreich, vielmehr lehrt sie uns nach und nach die Eigenart unserer Endlichkeit zu verstehen. Aber wir können εν und δυας als absolute Entitäten ohne Schaden verabschieden; es bleibt immer noch sinnvoll (und nicht nur in der Mathematik), überall nach dem zu fragen, was ihnen entspricht, und die Dinge unter diesen Gesichtspunkten zu durchdenken. Daß für Platon dieses Durchdenken, das διαλεγεσθαι, das war, worauf es ankommt, wissen wir von ihm selbst [49].

Anmerkungen und Nachweise

Abkürzungen:

PUL = K.Gaiser, Platons ungeschriebene Lehre, Stuttgart 1963;
P = J. Wippern (Hrsg.), Das Problem der ungeschriebenen Lehre Platons, Darmstadt 1972.

Platon wird in der Übersetzung von Schleiermacher zitiert.

1 Bei dem Byzantiner Tzetzes, siehe Wilamowitz, Platon (Berlin 1959) S.390.

2 Simplikios, Phys. 453, 16ff; zitiert nach W.Bröcker, Platon über das Gute, P S.217.

3 Ich verstehe darunter die durch die Grundlagendiskussion (und Selbstreflexion in der Logik) der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts hindurchgegangene, von der Dominanz des Strukturbegriffs geprägte Mathematik, also die Mathematik im Zeitalter ihres Erwachsenseins.

4 Näheres in meiner Arbeit „Das kategoriale System und der Ort der Mathematik", Hamburger Beiträge zur Mathematik 246 (2006), und in meinem Buch „Mathematik für Philosophen", Leipziger Universitätsverlag 2005 (Einleitung).

5 Das war auch die Auffassung Kants, der im Verstand das „Vermögen der Regeln", in der Vernunft aber das „Vermögen der Prinzipien" erblickte.

6 Zu wünschen wäre allerdings, daß die Philosophie von den gewaltigen Leistungen der Mathematik etwas mehr zur Kenntnis nimmt, „um davon Gebrauch zu machen". In „Mathematik für Philosophen" (Anm. 4) habe ich versucht, einen gangbaren Weg dahin zu anzulegen.

7 Die Grundlagenforschung untersucht unter anderem, was für Axiome in einer Theorie der reellen Zahlen benötigt werden, um klassische Existenzsätze der Analysis zu beweisen. Siehe dazu R.Murawski, Reverse Mathematics, Math.Sem.Ber. 1993.

8 Politeia 537c.

9 Die Mathematik kann ihn retten durch Übergang zu Klassen (mit schwächerer Axiomatik); es gibt dann die Klasse der Mengen. Für die „gewöhnliche" Mathematik ist die Klassentheorie von keiner großen Bedeutung.

10 Vgl. H.Gomperz über Platons System, in P.

11 Die einfachsten sind Anfangs- oder Endobjekte von Kategorien; auch andere Objekte mit universellen Abbildungseigenschaften, wie freie Gruppen oder direkte Produkte, lassen sich so verstehen. Die Mathematik kennt auch den Ausdruck „absolut", wie in „absolut irreduzibel" oder „absolut konvergent", aber natürlich mit einer wohldefinierten technischen Bedeutung.

12 Zum Verhältnis von Mathematik und Philosophie hat Kant (KrV B 758) das Nötige gesagt. Insbesondere ist es töricht, ein philosophisches System zu befragen, wie man es beweisen könne. Mehr als eine umfassende und konsistente Ordnung der Begriffe kann man von Philosophie nicht erwarten; und diese kann nie mehr sein als ein Vorschlag.

13 Siehe dazu Krämer, in P S.433.

14 Krämer P S.434/435, 439.

15 Erst im 19.Jahrhundert hat man entdeckt, wie sich Mengen als gleichzahlig definieren lassen, ohne daß der Zahlbegriff vorausgesetzt wird, nämlich durch bijektive Beziehbarkeit.

16 Siehe „Mathematik für Philosophen“ (Anm. 4), Kap.5.

17 L.E.J.Brouwer, Coll.Papers (ed. A. Heyting), Amsterdam 1975, Vol.I

18 Die Kategorientheorie ist der entschlossenste Versuch, Mathematik auf „reine Beziehungen“ zu gründen. Sie kommt natürlich auch zu Quantitätsbegriffen, aber erst nach einem langen Weg, während diese vom Mengenbegriff sozusagen mitgebracht werden, denn jede Menge bestimmt eine Kardinalzahl (Mächtigkeit). Näheres bei S.Maclane/I.Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer 1992.

19 Siehe unten (Abschn. 22), auch das Diagramm in PUL, S.21.

20 Bei Frege wird dann n *definiert* als Klasse aller n-Heiten.

21 PUL S.119.

22 Heute könnten wir hinzufügen, daß schon der einzelne Ton als Frequenz Zahl ist.

23 Siehe G.Mazzola, Gruppen und Kategorien in der Musik, Berlin 1985. Weniger extrem vom selben Verfasser: Geometrie der Töne, Birkhäuser 1990.

24 So scheint es immer wieder vorzukommen, daß auf eine Primzahl eine Zahl folgt, die relativ zu ihrer Größe die größtmögliche Zahl von Teilern hat, nämlich eine Potenz von zwei, wogegen für den umgekehrten Fall nur fünf Beispiele bekannt sind.

25 Das ist allerdings nur mühsam zu veranschaulichen; man braucht schon etwas Wissen über kompakte Riemannsche Flächen.

26 Siehe dazu de Vogel, P S.59.

27 Siehe Gaiser PUL S.19, auch Krämer, P S.411 (Fußnote).

28 Gaiser PUL S.9, Kursivierung original.

29 O.Toeplitz, in O.Becker (Hrsg.), Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965, S.52.

29a In einer partiell geordneten Menge heiße y ein *nächstes* Element zu x, wenn $x < y$ und es kein z gibt mit $x < z < y$. Ein Modell für die Peanoarithmetik ist dann eine solche Menge mit einem Anfangselement, in der jedes Element genau ein nächstes hat und die das Induktionsaxiom erfüllt: eine Teilmenge, die das Anfangselement sowie mit jedem Element sein nächstes enthält, ist schon die ganze Menge. Der Unterschied zur gewöhnlichen Peanoaxiomatik ist nur, daß die Anordnung schon in die Axiome eingebaut ist, während man sie gewöhnlich aus diesen ableitet. Für die Rekonstruktion eines Raums aus dem Verband der offenen Mengen siehe Maclane/Moerdijk (Anm. 18).

30 Leibniz, Monadologie §§ 64 ff.

31 Zugegeben, daß hier eine gewisse Weitherzigkeit in der Auslegung gefordert wird.

32 J.Conway, On Numbers and Games, dt. Über Zahlen und Spiele, Braunschweig 1983.

33 Vgl. Kants Antizipationen der Wahrnehmung, KrV B 207.

34 Eine Diskussion der aristotelischen Theorie des Kontinuums findet man bei W.Wieland, Die Naturphilosophie des Aristoteles, Darmstadt 1975. Siehe auch meine Vorlesungen über mathematische Modelle des Kontinuums, Hamburger Beiträge zur Mathematik, Heft 86, (2000).

35 Seien $K \subset L$ angeordnete Körper. K heißt dicht in L, wenn es für Elemente $r < s$ von L stets ein p in K gibt mit $r < p < s$. Der Leser beweise das Kriterium von Eudoxos: K ist dicht in L genau dann, wenn für Elemente r, s von L stets gilt, daß

$r = s$ genau dann, wenn für alle p,q aus K gilt: $p < r < q$ genau dann, wenn $p < s < q$.

Beachte: ist L archimedisch, dann ist o.B.d.A. L ein Teilkörper von $\mathbb{R}$, und beide Aussagen sind richtig, ihre Äquivalenz also trivial. Es sollte auch bemerkt werden, daß die gegebene Paraphrase eine Vergröberung ist, insofern bei Eudoxos auch Größen verschiedener Art (physikalischer Dimension) dieselbe Proportion bestimmen können; es ging mir hier nur um das Dichteprinzip.

36 Nicht außerhalb dieser Möglichkeiten, so scheint mir, hätte es gelegen, die rationalen Proportionen nach Wahl einer Einheitsstrecke in die Gesamtheit der Proportionen einzubetten und die Rechenoperationen auf diese auszudehnen. Was die Griechen daran gehindert hat, bleibt eine offene Frage.

37 Chaitin hat eine Zahl definiert, von der man keine einzige Dezimalstelle berechnen kann; die Konstruktion benutzt eine Abzählung aller Turingmaschinen und die Unlösbarkeit des Halteproblems für diese. Siehe G.Chaitin, The Limits of Mathematics, London 2003.

37a Siehe dazu A.Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge 1975. Bemerkenswert ist, daß für die Kreiszahl π keine arithmetische Spezifikation bekannt zu sein scheint; die Berechnung von Abermillionen Dezimalstellen ist ein recht hilflos erscheinender Versuch, einer Gesetzmäßigkeit auf die Spur zu kommen.

38 Siehe dazu Z.Markovic, in dem Sammelband Anm. 29, S.310 ff.

39 Für weitere Ausführungen siehe meinen Aufsatz „Vom Vorrang der Morphismen über die Objekte“, in: Beiträge zu einer Philosophie der Mathematik, Leipziger Universitätsverlag 2002.

40 Diese Schranke (eine Schätzung ist 10^{70}) wird schon beim travelling-salesman-Problem für $n = 70$ überschritten.

41 Zitiert nach Gaiser, PUL S. 49. Zur Erklärung von „mitaufgehoben“: man kann sich keine Körper denken ohne Flächen, wohl aber umgekehrt; hebt man die Flächen auf, dann also auch die Körper.

42 Gaiser a.a.O. (Kursivierung original).

43 Vgl. auch W.Röd, der Weg der Philosophie, München Bd.1 S. 116.

43a Siehe die Begründung PUL S.46.

44 Nicht *ganz* falsch wäre die Behauptung, daß mit der Dimension die Komplexität zunehme (aber wir erinnern uns, daß erst *zu große* Komplexität als απειρον gelten kann). Wenn eine Klasse von Objekten oder Problemen Dimension als Parameter hat, wird man im allgemeinen erwarten können, daß die Komplexität mit dieser wächst. Das ist aber nicht immer so, und es gibt sogar Gegenbeispiele; darunter eines, das in diesem Kontext besonders bemerkenswert ist, nämlich die Folge der platonischen Körper. In der Ebene sind dies alle regulären n-Ecke, also unendlich viele; im Raum die bekannten fünf; in vier Dimensionen gibt es sechs, von da ab immer nur drei.

45 Gaisers Rekonstruktion in Zweifel zu ziehen, bin ich nicht kompetent; es wäre aber schmerzlich, denken zu müssen, daß Platon sich bei einer (für ihn) so wichtigen Sache solche Ungereimtheiten erlaubt hätte.

46 Wie beweist man, daß ein offenes Intervall und eine offene Kreisscheibe nicht homöomorph sein können? Angenommen, es gäbe einen Homöomorphismus zwischen ihnen. Entfernen wir einen Punkt aus dem Intervall und seinen Bildpunkt in der Kreisscheibe, dann müßten die Restmengen immer noch homöomorph sein. Aber ein offenes Intervall ohne einen Punkt ist unzusammenhängend, eine Kreisscheibe ohne einen Punkt immer noch zusammenhängend, und Zusammenhang ist eine Eigenschaft, die bei einem Homöomorphismus erhalten bleibt. In höheren Dimensionen führt dieser Gedanke auf die Homotopie- und Homologiegruppen. Man sieht, daß der Beweis nicht schwer ist, wenn man nur die richtigen Begriffe hat. Trotzdem ist in einem tieferem Sinne angemessen, daß wir griechische Termini haben für mathematica, denen griechisches Denken fern war.

47 Zum Beispiel die (extensive) Definition von Funktionen als spezielle Relationen. Etwa eine Bewegung erscheint so, wörtlich verstanden, als Teilmenge einer Produktmenge, deren Faktoren eine Menge von Zeit- und eine Menge von Ortskoordinaten sind. Hier wird man geneigt, Spengler recht zu geben, wenn er schreibt: „Ein feiner Kopf aus der Zeit des Archimedes würde nach gründlichem Studium der modernen theoretischen Physik versichert haben, es sei ihm unbegreiflich, wie jemand so willkürliche, groteske und verworrene Vorstellungen als Wissenschaft und noch dazu als notwendige Folgerungen aus den vorliegenden Tatsachen ansprechen könne. Wissenschaftlich gerechtfertigt Folgerungen seien vielmehr – und er würde seinerseits auf Grund derselben „Tatsachen“, der mit seinem Auge gesehenen und in seinem Geist gestalteten Tatsachen nämlich, Theorien entwickelt haben, denen unsere Physiker mit erstauntem Lächeln zugehört hätten.“ (Der Untergang des Abendlandes, München 1963, S.486). Die Mathematik ist

übrigens zur Mengentheorie keineswegs dazu genötigt; die Kategorientheoretiker haben längst den Beweis erbracht, daß auch dieser Begriff als Grundlage aller Mathematik dienen kann. Man lese auch das Plädoyer für eine „Freiheitsbewegung der Mathematik“ in dem Buch von Conway, S.194.

48 Freilich ist die Rolle, die Platon im Euthydem der Mathematik zuweist, nicht geeignet, den Enthusiasmus zu wecken, den sie braucht.

49 Vielleicht lag darin auch der Grund, aus dem Platon seine Prinzipienlehre nicht ins große Publikum bringen wollte: daß sie eben nur der Leitfaden zum Philosophieren, aber nicht schon der Gehalt der Philosophie sei, und daß es der Anleitung im Gespräch bedürfe, um die Anwendung der Prinzipien zu lernen (vgl. dazu Krämer, P S. 440ff). Etwas Ähnliches gilt auch in der Mathematik, wie Hegel einmal feststellt: nicht der ist schon Mathematiker, der die Sätze auswendig, viel eher der, der ihre Beweise inwendig kennt. Aber ist das wirklich ein Grund, die Sätze nicht zu veröffentlichen?