**Hamburger Beiträge zur Mathematik**

**Nr. 954, Dezember 2023**

# Eine Bemerkung zur multiplikativen Struktur der Zahlkörper

**von Ernst Kleinert**

**Eine Bemerkung zur multiplikativen Struktur der Zahlkörper**

**Zahlentheoretischer Hintergrund.** Zu den ersten Phänomenen, welche dem Studenten der Algebraischen Zahlentheorie begegnen, gehört, daß die multiplikative Zerlegung in den Ganzheitsbereichen der Zahlkörper nicht mehr eindeutig ist; das Standardbeispiel ist

$$6 = 2.3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \tag{1}$$

im Ganzheitsbereich des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ ; man zeigt leicht, daß die Faktoren rechts und in der Mitte unzerlegbar und paarweise nicht assoziiert, mithin keine Primelemente sind. Da der fragliche Ring aber noch ein Dedekindring ist, kann man eine idealtheoretische Erklärung geben: definiert man drei Primideale durch

$$P(1) = (2, 1 + \sqrt{-5}), \; P(2) = (3, 1 + \sqrt{-5}), \; P(3) = (3, 1 - \sqrt{-5}),$$

rechnet man nach, daß

$$P(1)^2 = (2), \; P(2)P(3) = (3), \; P(1)P(2) = (1 + \sqrt{-5}) \text{ und } P(1)P(3) = (1 - \sqrt{-5})$$

ist. Die verschiedenen Elementzerlegungen in (1) kommen also dadurch zustande, daß man in der eindeutigen Primidealzerlegung

$$(6) = P(1)^2 P(2)P(3)$$

die Primideale rechts in zwei verschiedenen Weisen zu Hauptidealen zusammenfassen kann.

Der gruppentheoretische Kern dieser Analyse ist natürlich die Tatsache, daß die Idealklassengruppe dieses Rings nur zwei Elemente hat. Sind $P, Q$ (nicht notwendig verschiedene) Primideale in der nichttrivialen Klasse, ist $PQ = (a)$ ein Hauptideal, und das erzeugende Element $a$ ist unzerlegbar, denn wäre $a = bc$ eine nichttriviale Elementzerlegung, so müßte $(b) = P$ und $(c) = Q$ sein, was falsch ist. Wir können das noch ein wenig ausspinnen: es seien $P(1), \dots, P(2n)$ paarweise verschiedene Primideale der nichttrivialen Klasse (bekanntlich sind die Primideale eines solchen Ganzheitsbereichs über die Idealklassen asymptotisch gleichverteilt), so ist das Produkt aller $P(i)$ ein Hauptideal $(a)$, und das Element $a$ hat soviele verschiedene Zerlegungen in unzerlegbare Elemente, wie es Möglichkeiten gibt, die $P(i)$ zu Paaren zusammenzufassen. (Bezeichnet man diese Anzahl mit $f(n)$, so besteht die Rekursionsformel $f(n) = (2n-1)\, f(n-1)$ mit $f(1) = 1$, woraus man ableitet, daß $f(n)$ das Produkt der ersten $n$ ungeraden Zahlen ist.) Schon in diesem einfachsten Fall nichteindeutiger Elementzerlegungen gibt es also keine obere Schranke für die Anzahl wesentlich verschiedener Zerlegungen einzelner Elemente.

Um ein numerisches Maß für die multiplikative Komplexität eines solchen Rings zu definieren, benötigen wir eine kleine gruppentheoretische Vorbereitung. Es sei $A$ eine endliche abelsche Gruppe. Eine *Relation* in $A$ sei einfach eine Gleichung $a(1)...a(r) =$

1 (wir werden den Ausdruck „Relation“ leicht mißbräuchlich auch für die (ungeordnete) Folge der Elemente links verwenden). Die Relation soll *irreduzibel* heißen, wenn kein echtes Teilprodukt $= 1$ ist, insbesondere darf kein $a(i) = 1$ sein (die triviale Relation $1 = 1$ muß natürlich zugelassen werden). Jede Relation setzt sich aus irreduziblen zusammen, aber die Zerlegung ist nicht eindeutig (wofür man leicht Beispiele findet). Wir konstatieren ein paar elementare Sachverhalte:

(a) Eine irreduzible Relation hat höchstens die Länge $r = n = |A|$ . Denn die sukzessiven Produkte $a(1)$, $a(1)a(2)$ usw. sind alle verschieden: aus

$$a(1)...a(i) = a(1)...a(i+j) \quad \text{folgte ja} \quad a(i+1)...a(i+j) = 1$$

mit Widerspruch zur Irreduzibilität; folglich kann $r$ nicht größer als $n$ sein.

Die maximale Länge einer irreduziblen Relation bezeichnen wir mit $r(A)$ und nennen sie den *Relationenrang* von A.

(b) *Jede* Folge der Länge $r = r(A)$ *enthält* eine Relation. Denn ist $a(1),...,a(r)$ eine Folge, die nicht selbst schon eine Relation ist, setze $b = a(1)...a(r)$ ; dann ist $a(1),...,a(r), b^{-1}$ eine Relation der Länge $r(A) + 1$, kann also nicht irreduzibel sein und hat demnach eine Teilration, die $b^{-1}$ nicht enthält; dies ist also eine Teilrelation der gegebenen Folge.

Zum Beispiel hat jede Folge von $n$ natürlichen Zahlen eine Teilfolge, deren Summe durch $n$ teilbar ist.

(c) Die maximale Länge einer relationenfreien Folge ist $r(A) - 1$ . Das ist klar nach dem Vorhergehenden. Es läuft also auf dasselbe hinaus, eine maximale relationenfreie Folge und eine maximale irreduzible Relation zu konstruieren.

Den Prototyp bieten die zyklischen Gruppen $A = C(n)$ mit $r(C(n)) = n$ . (Ich habe einen Beweis, daß umgekehrt aus $r(A) = n$ schon die Zyklizität von $A$ folgt; was wir aber jetzt nicht benötigen.)

(d) Eine maximale irreduzible Relation (im Folgenden mit MIR abgekürzt) in $C(n)$ hat die Form $e...e$ (n Faktoren), wobei e ein Erzeuger von $C(n)$ ist. Zum Beweis können wir annehmen, daß eine MIR mit zwei verschiedenen Elementen $a(1)$, $a(2)$ beginnt (die Reihenfolge der Faktoren ist ja gleichgültig). Nun ist allgemein klar, daß man eine relationenfreie Folge maximaler Länge nur gewinnen kann, wenn man bei jedem Schritt die Anzahl der im Weiteren auszuschließenden Elemente minimiert. Ist aber $a(1) \neq a(2)$ (und beide natürlich $\neq 1$), so sind nach dem zweiten Schritt bereits vier Elemente ausgeschlossen, nämlich die Inversen von $a(1)$, $a(2)$ und $a(1)a(2)$, dazu die Eins, während bei $a(1) = a(2)$ nur drei ausgeschlossen sind. Nun wird bei jedem Schritt mindestens *ein* weiteres Element ausgeschlossen. Wenn nämlich das Inverse von $a(1)...a(k+1)$ schon gleich dem Inversen eines Teilprodukts von $a(1)...a(k)$ wäre (und das sind genau die nach dem k-ten Schritt ausgeschlossenen Elemente)), dann müßte ein Teilprodukt von $a(1)...a(k+1)$ bereits $= 1$ sein, diese Folge wäre also nicht mehr relationenfrei. Demnach sind nach höchstens $n - 2$ Schritten schon alle Elemente ausgeschlossen, und die erhaltene Folge hat nur die Länge $n - 2$ und nicht die maximale Länge. Die gegebene Folge muß also konstant sein, und es ist klar, daß die Konstante ein Erzeuger sein muß. Allgemeiner ergibt sich aus dieser Überlegung, daß man jede maximale relationenfreie Folge gewinnen kann, indem man ein Element maximaler Ordnung $s$ einfach $s - 1$ mal wiederholt und auch weiterhin möglichst wenig verschiedene Elemente heranzieht (davon werden wir unten Gebrauch machen).

Das Verhalten von $r(A)$ unter Morphismen ist etwas undurchsichtig; allgemein gehen natürlich Relationen in Relationen über, aber weder die Irreduzibilität noch die Maximalität müssen erhalten bleiben; wohl aber gilt dies natürlich für Isomorphismen.

Wir kehren jetzt zur Zahlentheorie zurück; es sei (etwas allgemeiner) $R$ ein Dedekindring mit endlicher Idealklassengruppe $A$. Es sei $a(1)...a(r) = 1$ eine irreduzible Relation in $A$, und es seien $P(i)$ Primideale in $a(i)$; wir lassen ausdrücklich zu, daß $P(i) \neq P(j)$, auch wenn $a(i) = a(j)$ ist. Es ist dann $P(1)...P(r) = (a)$ ein Hauptideal, und ein Erzeuger $a$ muß irreduzibel sein, denn eine echte Elementzerlegung von $a$ hätte zur Folge, daß ein Teilprodukt der Primideale ein Hauptideal ist, und das würde nach Übergang zu den Idealklassen der Irreduzibilität der gegebenen Relation widersprechen. Der Schluß kann ohne weiteres umgekehrt werden: ist $a$ ein irreduzibles Element, $(a) = P(1)...P(r)$ die Primidealzerlegung des von $a$ erzeugten Hauptideals und $a(i)$ die Klasse von $P(i)$ in $A$, so ist $a(1)...a(r) = 1$ eine irreduzible Relation in $A$. Der Relationenrang von $A$ ist demnach die kleinste obere Schranke für die Anzahl der Primidealteiler irreduzibler Elemente (mit Vielfachheiten gezählt), und dies kann als ein Maß für die multiplikative Komplexität von $R$ angesehen werden, genauer: für die Komplexität modulo Assoziiertheit; aber die Einheitenstruktur ist ja (im Zahlkörperfall) durch den Dirichletschen Satz hinreichend gut bekannt.

**Ein gruppentheoretisches Problem.** Für ein völlig befriedigendes Resultat hätten wir nun gern eine Formel für $r(A)$ in Terminis der Strukturkonstanten von $A$; das ist ein rein gruppentheoretisches Problem. Hierfür scheinen die *Elementarteiler* von $A$ am meisten geeignet zu sein, die wir folgendermaßen definieren. Wird $A$ von $m$ Elementen erzeugt, erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \to L \to \mathbb{Z}^m \to A \to 0,$$

wobei wir jetzt $A$ als additiv geschrieben denken. Der Elementarteilersatz liefert eine Basis $\{v(1),...,v(m)\}$ von $\mathbb{Z}^m$ und natürliche Zahlen $d(1),...,d(m)$ mit der Eigenschaft $d(i) \mid d(i+1)$, $i = 1,..., m-1$, derart daß $\{d(1)v(1),...,d(m)v(m)\}$ eine Basis von $L$ ist. Hat zum Beispiel $A$ zwei Erzeuger mit den Ordnungen $2$ und $3$, erhält man $L = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$; eine geeignete Basis von $\mathbb{Z}^2$ ist $\{(1, 1), (2, 3)\}$, und die Elementarteiler sind $1$ und $6$. Das Erscheinen der $1$ hier weist darauf hin, daß wir keine Minimalzahl von Erzeugern verwendet haben; in der Tat ist ja $C(2) \times C(3) = C(6)$. Wir legen uns darauf fest, daß stets eine solche Minimalzahl zugrundeliege; es ist dann $d(1) \geq 2$, und die so erhaltenen $d(i)$ nennen wir die Elementarteiler von $A$. Man kann sie aus einer direkten Produktzerlegung gemäß dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen auch so erhalten: für jeden Primteiler $p$ der Gruppenordnung $|A|$ wählen wir im p-primären Faktor von $A$ einen zyklischen Faktor maximaler Ordnung; das Produkt all dieser

Faktoren ist dann selbst ein zyklischer Faktor von $A$, und seine Ordnung ist ein größter Elementarteiler von $A$; mit dem Rest verfahren wir ebenso, bis alle Faktoren „abgearbeitet“ sind. Das Resultat ist eine direkte Produktzerlegung

$$A = C(d(m)) \times \dots \times C(d(1)) \text{ mit } d(i) \mid d(i+1),$$

und $m$ ist die minimale Erzeugendenzahl von $A$. Zum Beispiel hat $A = C(n)$ den einzigen Elementarteiler $n$; ist $A = C(n) \times C(m)$ und $d = \mathrm{ggT}(n,m) > 1$, so hat $A$ die Elementarteiler $d$ und $mn/d$ und eine entsprechende Produktzerlegung.

Angestrebt wird nun eine Formel für $r(A)$ in Termini der Elementarteiler. Für $A = C(n)$ ist $r(A) = n$ der einzige Elementarteiler. Das ungewöhnliche Verhalten der Funktion $r$ bei Produktbildung wird durch die beiden folgenden Beispiele illustriert: sind $m$ und $n$ teilerfremd, so ist $r(C(n) \times C(m)) = r(C(mn)) = mn = r(C(n))r(C(m))$, $r$ verhält sich also rein multiplikativ. Für den „gegenteiligen“ Fall $m|n$ führen wir zunächst eine allgemeine Konstruktion ein, die eine fundamentale Rolle spielen wird. Es seien $A$ und $B$ beliebig, $a(1)+\dots+a(r)$ eine irreduzible Relation in $A$, $b(1)+\dots+b(s)$ eine solche in $B$. Dann ist

$$(a(1),0)+\dots+(a(r-1),0)+(a(r),b(1))+(0,b(2))+\dots+(0,b(s))$$

eine irreduzible Relation in $A \times B$, die wir die V*erkettung* der gegebenen Relationen nennen können; sie zeigt, daß stets

$$r(A \times B) \geq r(A) + r(B) - 1 \qquad (2)$$

gilt. Wir notieren die Elemente von $A \times B$ im folgenden als Spalten, so daß die Verkettung die Form

$$\begin{array}{ll} B: & (0\dots\dots 0\ b(1)\dots\dots b(s)) \\ A: & (a(1)\dots\dots a(r)\ 0\dots\dots 0) \end{array}$$

annimmt. Es ist klar, wie sie auf eine beliebige Zahl von Faktoren verallgemeinert werden kann, und daß die Verkettung irreduzibler Relationen wieder irreduzibel ist. Für $A = C(d(n)) \times \dots \times C(d(1))$ verallgemeinert sich (2) zu der Ungleichung

$$r(A) \geq d(n) + (d(n-1)-1) + \dots + (d(1)-1) = \Sigma\, d(i) - (n-1). \qquad (3)$$

Im folgenden identifizieren wir, um etwas Konkretes vor Augen zu haben, $C(n)$ mit $\mathbb{Z} \bmod n\mathbb{Z}$; als Standard-MIR in $C(n)$ verwenden wir $1 + 1 + \dots + 1$ ($n$ Summanden, wobei $1$ für die Restklasse $1 \bmod n$ steht). Eine Relation der Länge $r$ in $A$ stellen wir durch eine $n \times r$ – Matrix dar, in deren i-ter Zeile Elemente von $C(d(i))$ stehen, repräsentiert durch das kleinste nichtnegative Restsystem $\{0, \dots, d(i)-1\} \bmod d(i)$; die Spalten sind dann die Elemente von $A$. Die Relationseigenschaft ist, daß für alle $i$ die i-te Zeilensumme ein Vielfaches von $d(i)$ ist, und die Irreduzibilität besagt, daß keine Teilsumme der Spalten diese Eigenschaft hat. Das Problem ist jetzt also: gegeben natürliche Zahlen $d(1),\dots,d(n)$ mit $d(1) > 1$ und $d(i) \mid d(i+1)$; was ist die maximale

Spaltenzahl $r$ einer $n \times r$ – Matrix mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten, derart, daß für alle $i$ die i-te Zeilensumme ein Vielfaches von $d(i)$ ist, aber keine Teilsumme der Spalten diese Eigenschaft hat? (Ähnlich wie man bei einem Zahlenschloß die Rädchen so drehen muß, daß alle gleichzeitig den Bolzen freigeben.)

Die iterierte Verkettung der Standard-MIRs für alle $C(d(i))$ kann man sich so entstanden denken: zu Anfang seien alle Einsen am linken Rand versammelt, so daß eine irreduzible Relation der Länge $d(n)$ entsteht; bei der iterierten Verkettung werden diese Folgen von Einsen teleskopartig auseinandergezogen, derart, daß die Irreduzibilität „gerade eben noch" erhalten bleibt (das „Teleskop" zusammenhängt). Es erscheint plausibel, daß man so die maximale Länge und damit eine MIR erreicht, aber dieser Schein ist trügerisch, denn ohne die Teilbarkeitsbedingung erhält man so im allgemeinen keine MIR (s.u.). Sie ist gleichbedeutend damit, daß jeder Faktor von $A$ ein homomorphes Bild jedes größeren Faktors ist; wir werden gleich sehen, wie man diesen Umstand effizient ins Spiel bringen kann. Eine Variante zur Verkettung ist übrigens

$$\text{(4)}\qquad \begin{array}{llll} C(d(1)): & 1....10.... & & 1 \\ C(d(2)): & \quad 11....10... & & 1 \\ \quad . & & & \\ \quad . & & & \\ C(d(n)): & 0...... & & ...01....1 \end{array}$$

ebenfalls mit genau $d(i)$ Einsen in der i-ten Zeile, irreduzibel und von derselben Länge, aber mit einer kleineren Zahl verschiedener Spalten, in gewissem Sinne also die sparsamste: erst die letzte Spalte sorgt für die Relationseigenschaft und gleichzeitig die Irreduzibilität. Nur für $n = 2$ stimmt die Variante mit der Verkettung überein, bis auf Vertauschung der Spalten. Für $n > 2$ kann die Variante auch nicht durch einen Automorphismus von $A$ aus der Verkettung hervorgehen, weil ein Automorphismus natürlich die Anzahl verschiedener Spalten erhält. Die Antwort auf unser Problem lautet nun:

(5) Unter den angegebenen Bedingungen gilt in (3) stets die Gleichheit.

Vor dem Beweis noch eine Bemerkung zu den Automorphismen solcher Produkte: sind $A$, $B$ beliebige abelscher Gruppen und $f: B \to A$ irgendein Homomorphismus, so ist die Abbildung

$(a, b) \to (a + f(b), b)$ ein Automorphismus von $A \times B$ mit dem Inversen $(a, b) \to (a - f(b), b)$ .

Das entspricht matrizentheoretisch den Elementarmatrizen der Linearen Algebra; weitere Automorphismen des Produkts entstehen natürlich durch die Automorphismen der Faktoren. Ich bin der Frage nicht weiter nachgegangen, ob auf solche Weise stets alle Automorphismen eines Produkts entstehen; im vorliegenden Fall scheint das aber plausibel.

Der Beweis von (5) geschieht nun durch Induktion nach $n$ ; für $n = 1$ ist nichts zu beweisen. Gelte nun (5) für $n-1$, $A = C(d(n)) \times \ldots \times C(d(1))$, $B = C(d(n-1)) \times \ldots \times C(d(1))$ ; wir zeigen, daß jede Folge der Länge $d(n) - 1 + r(B)$ eine Relation enthält. Da $r(A)$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist, folgt $r(A) \leq d(n) - 1 + r(B)$ und mit (3) die Behauptung. Nach den Überlegungen in Abschnitt 1 kann man für eine relationenfreie Folge maximaler Länge mit einem Element maximaler Ordnung s beginnen und dieses $(s - 1)$ mal wiederholen. In unserem Fall ist die maximale Elementordnung $d(n)$, und eine Spalte v von A mit dieser Ordnung hat in der d(n)-ten Komponente einen Erzeuger von $C(d(n))$ ; einen Automorphismus von $C(d(n))$ anwendend, können wir annehmen, daß dieser = 1 ist. Indem wir sukzessive geeignete Vielfache von 1 von den übrigen Zeilen subtrahieren (siehe die vorangestellte Bemerkung über Automorphismen), können wir annehmen, daß $v = (0,...,0,1)^t$ ist. Wir denken uns nun $d(n) - 1$ Exemplare von v wiederholt und die Folge mit weiteren $r(B)$ Spalten fortgesetzt, so daß wir sie durch

$$\begin{array}{rl} B: & 0 \ldots 0\ x(1) \ldots x(r) \\ C(d(n)): & 1 \ldots 1\ y(1) \ldots y(r) \end{array}$$

visualisieren können, mit $r = r(B)$. Nach Induktionsannahme enthält die Folge der $x(i)$ eine Relation von B, wir können sie als $x(1),...,x(s)$ annehmen. Wenn die $y(1),...,y(s)$ ebenfalls eine Relation bilden, sind wir fertig. Wenn nicht, nehmen wir von den $d(n) - 1$ einleitenden Spalten soviele hinzu, daß die Summe auch in der unteren Zeile = 0 wird. Damit ist unsere Behauptung bewiesen; man beachte, daß dieser induktive Beweis die Voraussetzung der sukzessiven Teilbarkeit in vollem Umfang benötigt. Wir ziehen einige Folgerungen.

(a) Ist $B \subset A$ eine echte Untergruppe, so ist $r(B) < r(A)$ . Das folgt daraus, daß die Elementarteiler von B eine echte Teilmenge der Teiler der Elementarteiler von A bilden. (Für direkte Summanden folgt die Aussage sofort aus (2).)

(b) Daraus folgt unmittelbar: ist $a(1)+...+a(r)$ eine MIR, so wird A von den $a(i)$ erzeugt.

(c) Es gibt stets eine MIR, die in der obigen Matrixdarstellung nur Nullen und Einsen als Koeffizienten hat.

Für die Zahlentheorie ergibt sich ein befriedigender Ausdruck für die multiplikative Komplexität, wie sie oben definiert wurde, nämlich in Termini der Elementarteiler der Idealklassengruppe.

Nun noch ein paar Ergänzungen. Zum Vergleich (oder besser Kontrast) hier eine MIR im Falle $A = C(m) \times C(n)$ mit $ggT(m,n) = 1$, wo wir ja wissen, daß $r(A) = mn$ ist: lauter Einsen in den mn Spalten, wobei die in der $C(m)$-Zeile als n Blöcke von je m , die in der $C(n)$-Zeile als m Blöcke von je n Einsen zu denken sind; die Teilerfremdheit sorgt für die Irreduzibilität! Mit der Verkettung wäre man hier offenbar auf einem ganz falschen Weg. Indem man aber die Elementarteiler von A zugrunde legt, wird dieser Fall a limine ausgeschaltet und die Betrachtung auf den „gegenteiligen" Fall sukzessiver Teilbarkeit reduziert. Für $A = C(m) \times C(n)$ mit $d = ggT(m,n) > 1$ kommt übrigens $r(A)$

$= mn/d + d - 1$, was auch für $d = 1$ richtig ist. Man sieht hier deutlich, wie der Ausdruck für $r(A)$ von einer Summe in ein Produkt „hinüberwandert", wenn $d$ sich von $n$ nach $1$ bewegt.

Das Beispiel könnte zu der Annahme verleiten, daß allgemein $r(A \times B) = r(A)r(B)$ ist, wenn die letzteren Werte teilerfremd sind. Jedoch ist das falsch: nach dem oben Gezeigten ist $r(C(2) \times C(2)) = 3$ und $r(C(3) \times C(3)) = 5$, aber $r(C(2) \times C(2) \times C(3) \times C(3)) = r(C(6) \times C(6)) = 11$. Imitiert man hier das Verfahren aus dem vorigen zyklischen Fall, erhält man eine Relation der Länge 15, die in ein Produkt von 5 Teilrelationen zerfällt; ein instruktives Beispiel.

Das folgende Beispiel zeigt, wie stark (5) von der Teilbarkeitsbedingung abhängt: es seien p und q verschiedene Primzahlen, $A = C(p)$, $B = C(q) \times C(pq)$. (3) liefert nur $r(A \times B) \geq p + q + pq - 2$, aber es ist $A \times B = C(pq) \times C(pq)$ und damit $r(A \times B) = 2pq - 1 > p + q + pq - 2$. Den Grund für die Unstimmigkeit sehe ich darin, daß die Folge $p, q, pq$ keine Folge von Elementarteilern ist; es genügt nicht, daß $|A|$ ein Teiler von $|B|$ ist.

Eine ausgeführte Theorie solcher maximalen Relationen hat vielleicht ein unabhängiges Interesse, wie die folgende "dynamische" Interpretation nahelegt. Wir denken die Koeffizientenfolgen in den einzelnen Zeilen als simultan verlaufende Prozesse, und für jede Zeile die „Bedingung", daß die Summe der bis zum betrachteten Zeitpunkt (= Spaltenindex) erschienenen Koeffizienten durch $d(i)$ teilbar ist. Der Gesamtprozeß soll enden, wenn alle Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, und die Frage lautet jetzt: was ist die maximale Länge, die ein solcher Prozeß erreichen kann?