Hamburger Beiträge
zur Angewandten Mathematik

Mathematik - ein merkwürdiger Gegensatz zwischen Bedeutung und individuellem wie öffentlichem Interesse

R. Ansorge

Nr. 2015-10
März 2015

Mathematik – ein merkwürdiger Gegensatz zwischen Bedeutung und individuellem wie öffentlichem Interesse *

R. Ansorge

Einleitung

Kaum ein heutiger Bildungsbürger würde zugeben wollen, sich nicht für Literatur, für Musik, für die eine oder andere Sprache, für Geschichte usw. zu interessieren. Hingegen kokettiert derselbe Bürger häufig geradezu damit, von Mathematik nichts zu verstehen und sich nicht damit befassen zu wollen.

Und dies ist auch deshalb erstaunlich, weil modernes Leben ohne Mathematik nicht möglich wäre und unser aller Wohlergehen weitestgehend durch die Fortschritte der Mathematik und deren Anwendung auf die verschiedensten Bereiche bestimmt wird: So gäbe es keine moderne Landwirtschaft, mit deren Hilfe trotz ständig enorm wachsender Weltbevölkerung eine weitgehend ausreichende Ernährung gesichert werden kann, es gäbe keine Computer, keine Stromversorgung ohne Mathematik, keine Kommunikationstechniken (Telefon, Mobiltelefon, Rundfunk, Fernsehen usw.), keine Medizintechnik, keinen modernen Maschinenbau (z.B. Fahrzeuge, Flugzeuge, Werkzeugmaschinen, Küchen- und Haushaltsgeräte usw.), keinen funktionierenden Massenverkehr einschließlich des Versorgungsverkehrs, der z.B. Hungersnöte infolge lokaler Missernten, wie sie in früheren Jahrhunderten immer wieder eintraten, durch das Herbeischaffen von Lebensmitteln aus nicht betroffenen Gebieten verhindert.

Auch für die Kunst ist Mathematik in vielen Bereichen grundlegend, etwa für die Musik (keine Polyphonie ohne Mathematik) oder für die Bildende Kunst (z.B. Ornamentik). In der schöngeistigen Literatur findet die Mathematik zumindest gelegentlich ernsthaften (Enzensberger), allerdings auch zuweilen dem mathematischen Formalismus spöttisch gegenübertretenden (Th. Mann) Niederschlag [1]. Die Mathematik ist gleichsam die Sprache der Natur, denn fast alle von Menschen entdeckten, durch den Schöpfer eingebrachten Naturgesetze werden mathematisch formuliert und erlauben mathematische Schlüsse nach den Regeln der aristotelischen zweiwertigen Logik, d.h. 'eine Aussage ist wahr oder falsch' (siehe auch 'Matth.5, 37'), sowie dem 'tertium non datur', d.h. eine Aussage gilt oder sie gilt nicht, ein Drittes gibt es nicht. Somit gäbe es ohne Mathematik keine Naturwissenschaften und damit auch nicht deren Nutznießung im Rahmen der Ingenieurwissenschaften (s. oben), der Wirtschaftswissenschaften, der Sprachwissenschaften usw.

Dass die Mathematik auch als Bildungsgut im Sinne des Schulens strukturierten logischen Denkens unverzichtbar ist, erkannten schon die großen Philosophen früherer Zeiten (u.a. Platon, Euklid, Pythagoras, Descartes, Kant, Spinoza usw.). Dieser Gedankenwelt wollen wir uns nachfolgend zuwenden.

---

*Vortrag vor der Hamburg-Gruppe der Europäischen Akademie der Wissenschaften und Künste (Herbst 2014)

[1] H.M. Enzensberger: *Der Zahlenteufel*, München: Hanser 1997,
Zugbrücke außer Betrieb: Die Mathematik im Jenseits der Kultur, Peters 1999;
Th. Mann: *Königliche Hoheit*, Berlin: S. Fischer 1909

1 Platons Ideenlehre

Grundlage aller mathematischen Modelle außermathematischer Bereiche ist die Ideenlehre Platons (427-347 v.Chr.), die ihrerseits am einfachsten anhand von Platons **Höhlengleichnis** (z.B. [1], S. 277 ff.) beschrieben werden kann, das er Sokrates in den Mund legt: [2]

Man stelle sich Menschen vor in einer unterirdischen Wohnstätte mit lang nach aufwärts gestrecktem Eingang, entsprechend der Ausdehnung der Höhle. Von Kind auf sind sie in dieser Höhle auf Stühle festgebannt mit Fesseln an Schenkeln und Hals. Sie bleiben also immer an der gleichen Stelle und sehen nur in das Höhleninnere geradeaus auf die die Höhle nach unten abschließende Höhlenwand vor ihnen. Der Höhlenausgang liegt, für sie unsichtbar, hinter ihnen. Von oben her aber aus der Ferne von rückwärts leuchtet ihnen ein Feuerschein. Zwischen dem Feuer und den Gefesselten läuft oben ein Weg hin längs dessen eine niedrige Mauer errichtet ist. Entlang dieses Weges und verdeckt durch die Mauer tragen Menschen allerlei Gegenstände vorbei, die über die Mauer hinausragen (im Gegensatz zu deren Trägern). Die Gefesselten sehen ihr Leben lang nur die durch das Feuer hervorgerufenen Schatten der vorbeigetragenen Dinge, geben ihnen Namen und halten sie für die Realität.
Nun werde einer der Gefesselten entfesselt und genötigt, den Hals umzuwenden, sich in Bewegung zu setzen und nach dem Feuer empor zu blicken. Was würde er sagen, wenn man ihm versicherte, er habe bislang nur Nichtigkeiten gesehen, nun aber sei er dem Seienden nähergerückt. Er würde zunächst nur die Schatten, die er bisher sah, für die Realität halten, die realen Gegenstände aber für Trugbilder. Erst allmählich würde er sich an die Helligkeit des Feuers (= Wissenschaft) gewöhnen und die Realität der Dinge anerkennen. Steigt er dann in der Höhle weiter empor dem Ausgang und dem Sonnenlicht entgegen (im Gegensatz zum Licht des Feuers ungleich heller und unbegrenzt), so wird seine Seele erhoben in das Reich des nur Denkbaren, der die Erkenntnis ermöglichenden geistigen Modelle und Vorstellungen anstelle der realen Gegenstände.

Und Sokrates fährt fort: *Es sind die Arithmetik und die Geometrie, die die Seele nach oben ziehen.* Er weist also den wesentlichen Teilgebieten der damals bekannten Mathematik die Rolle der die Erkenntnis ermöglichenden Werkzeuge zu.

2 Descartes

René Descartes (1596-1650) (*cogito, ergo sum*) gilt als Begründer des frühzeitlichen Rationalismus. Er realisierte Platons Konzept am Beispiel der Algebraisierung der Geometrie, die wir heute 'Analytische Geometrie' nennen (z.B. [2]).

Ich beschreibe diesen Vorgang beispielhaft wie folgt:

Wir übernehmen aus der Geometrie unter Verzicht auf jegliche Anschauung lediglich die Terminologie, d.h. gewisse Begriffe, und betrachten statt realer geometrischer Objekte als Idee eine abstrakte lineare algebraische Gleichung

$$y = mx + a \tag{1}$$

mit irgendwelchen festen Parametern m und a .

Wir suchen diejenigen Zahlenpaare (x, y), die dieser Gleichung genügen. Offenbar lässt sich zu jeder rellen Zahl x ein y berechnen, sodass es unendlich viele derartige Zahlenpaare gibt. Jedes Zahlenpaar bezeichnen wir – frei von jeder Anschauung – als 'Punkt', und die Menge der

[2] etwas verkürzt und z.T. in den Worten des Autors

dieser Gleichung genügenden Zahlenpaare als 'Gerade', wiederum unter Verzicht auf irgendeine Anschauung. Dieser Menge (Geraden) geben wir den Namen g_1 .

Nun betrachten wir eine zweite lineare algebraische Gleichung

$$y = nx + b \tag{2}$$

mit irgendwelchen festen Parametern n , b ,

und die zugehörige Menge der Zahlenpaare (x, y) nennen wir erneut eine Gerade mit dem Namen g_2.

Im Falle $m = n$ nennen wir die Geraden 'parallel', ohne uns an eine Vorstellung von Parallelität zu klammern.

Sei nun $m \neq n$, die 'Geraden' also nicht 'parallel'. Wir fragen nach dem Durchschnitt der beiden Zahlenpaar-Mengen, d.h. nach denjenigen Zahlenpaaren, die beiden Mengen angehören, d.h. beiden Gleichungen genügen. Um diese zu finden, haben wir also ein System von zwei linearen algebraischen Gleichungen in zwei Unbekannten zu lösen. Es zeigt sich, dass es wegen $m \neq n$ nur genau ein solches Zahlenpaar gibt. Der Durchschnitt beider Mengen besteht mithin aus nur einem Zahlenpaar, also −in unserer Terminologie− aus nur einem Punkt, dem wir den Namen 'Schnittpunkt' geben.

In unserem geistigen Bild besitzen somit zwei nicht parallele Geraden genau einen Schnittpunkt.

Die Rechtfertigung unserer Terminologie und damit des Modells der realen Geometrie (in Bezug auf zwei in einer Ebene verlaufende Geraden) resultiert aus dem Umstand, dass die 'Punkte' unserer Menge g_1 , aufgefasst als Koordinaten von Punkten in einem auf Papier gezeichneten Koordinatensystem − und dort als Punkte eingezeichnet − alle auf einer mit einem Lineal gezogenen Geraden liegen. Gleiches gilt für g_2, wobei unser Modell eine sehr viel genauere und mühelosere Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes erlaubt als etwa das Ablesen seiner Koordinaten auf dem Papier.

3 Leonardo da Vinci und Luca Pacioli

Leonardo da Vinci (1452-1519) galt zwar als schlechter Rechner, war sich jedoch der Bedeutung der Mathematik sehr bewusst und nannte sie *das einzige Mittel zur Erlangung sicherer Erkenntnisse*. Gleichzeitig mit Dürer (1471-1528) befasste er sich mit der (wie wir heute sagen würden) mathematischen Formulierung der Gesetze der Perspektive, also der Darstellung dreidimensionaler Gegenstände auf zweidimensionaler Fläche (z.B. auf Papier, Mal-Leinwand, Kirchenkuppel und dgl.). Er war befreundet mit dem Mathematiker Luca Pacioli (1445-1517), der das seinerzeit bedeutendste Buch über Angewandte Mathematik schrieb, und fertigte die Zeichnungen zu dessen Buch über die 'Göttlichen Proportionen' [3] .

4 Mathematik und Musik

Von Anbeginn bestand eine enge Verzahnung von Mathematik und Musik. Die Pythagoräer entwickelten mit der Quintenstimmung die Grundlagen unseres europäischen 12-Ton-Systems (wie es z.B. auf Tasteninstrumenten realisiert ist) und gewannen zahlreiche mathematische Erkenntnisse aus dem Studium der Grundlagen der Musik. Die spätere polyphone Musik (Satztech-

nik nach den Regeln des Kontrapunktes) erfordert bei der Komposition große kombinatorische Anstrengungen, und auch die Kombinatorik ist ein mathematisches Teilgebiet.
J.S. Bach (1685-1750) komponierte kurz vor seinem Tode und schon fast erblindet das Choralvorspiel *Vor Deinen Thron trete ich hiermit* (BWV 668), das er nach Fertigstellung der Komposition wegen seiner Blindheit einem Notenschreiber diktierte. Am Ende des Diktats äußerte er, *dies ist wieder ein mathematisches Meisterstück* und der Notenschreiber glaubte, auch dies aufschreiben zu sollen, und so ist diese Bemerkung auf uns überkommen.

Bach war auch von der Idee der temperierten Stimmung sehr angetan, die wohl auf verschiedene Musiktheoretiker zurückgeht, u.a. auf den flämischen Mathematiker und Ingenieur Simon Stevin (1548-1620), der die pythagoreische Stimmung wegen des sich nicht schließenden Quintenzirkels verwarf und statt dessen gleichgroße Intervalle (Frequenzverhältnisse) benachbarter Töne des 12-Ton-Systems unter Beibehaltung der Frequenzverdoppelung im Verlaufe einer Oktave forderte. Dies führt auf das Intervall $\sqrt[12]{2} = 1,05946...$ [4]. Dabei wird also die Tonfrequenz z.B. von c zu cis, von cis zu d, von d zu dis usw. um jeweils ca. 6 % erhöht, wobei natürlich die Frequenz eines Tones, von dem aus die Tonerhöhungen oder -vertiefungen vorgenommen werden sollen, vorgegeben und für alle an einem Konzert teilnehmenden Instrumente vereinheitlicht werden muss, z.B. Kammerton a mit 440 Hz. Eine Abwandelung hiervon bildet die 'wohltemperierte Stimmung', in der Bach für alle 12 Tonarten je ein Präludium und eine Fuge schrieb mit der Forderung, die Stücke auf einem wohltemperiert gestimmten Klavier zu spielen. Die Sammlung dieser Stücke nannte er das *Wohltemperierte Klavier*. Nach ca. 20 Jahren wiederholte er diese Arbeit, sodass es nun zwei Bände des 'Wohltemperierten Klaviers' gibt.

5 Galilei, Kepler, Newton, Leibniz

Galileo Galilei (1564-1642) ersetzte in der Naturforschung die Frage nach dem 'Warum' eines Vorgangs durch die Frage nach dem 'Wie' des Ablaufs und rückte damit das Messen und das mathematische Beschreiben der Naturgesetze und der Dynamik in den Mittelpunkt. Überdies konstruierte er verbesserte Fernrohre (verbessert etwa im Vergleich zum Keplerschen Fernrohr) zur Himmelsbeobachtung und revolutionierte so die Astronomie. Und er bestätigte die Beobachtungen seines Zeitgenossen Johannes Kepler (1571-1630), die dieser in geometrische Begriffsbildungen gekleidet hatte (z.B. 'Ellipse' als Umlaufbahn der Planeten um die Sonne, die in einem 'Brennpunkt' dieser Ellipse steht) [5]. Die mathematische Argumentation für Keplers Gesetze lieferte Isaac Newton (1643-1727) auf der Grundlage der von ihm in einem genialen Abstraktionsprozess formulierten mechanischen Grundgesetze (Trägheitsgesetz, Gravitationsgesetz) [6]. Dabei spielt die Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung) eine zentrale Rolle, die sowohl auf Newton selbst als auch auf den Vordenker der Aufklärung, Gottfried Wilhelm Leibniz (1648-1716), zurückgeht. Leibniz befruchtete auch die Kombinatorik, worauf J.S. Bach sich bezog, und er erfand u.a. auch eine mechanische Rechenmaschine [7], insbesondere die Staffelwalze, die auf mechanischen Rechenmaschinen erstmals und bis in die Neuzeit Multiplikationen ermöglichte. Auch beschrieb er vielerlei weitere Geräte, z.B. für den Bergbau.
Leibniz entwickelte überdies den binären Zahlencode, der heute Grundlage jedes Computers ist (und bereits in der äthiopischen Multiplikation, versteckt in einem Konzept sogenannter 'Unglückszahlen', Anwendung fand [3]).

[3] vgl. Ansorge, R. und E. Hammerschmidt: *Äthiopische Multiplikation* in: Studien zur Geschichte und Kultur des Vorderen Orients, Leiden: Brill 1981

6 Spinoza, Kant

Die Erfolge, die insbesondere in den Naturwissenschaften die Anwendung des Platon-Sokrates-Gedankens der Seelen-Anhebung durch die Mathematik hervorrief, beeindruckten auch viele Geisteswissenschaften und führten zu Versuchen, den spekulativen Charakter dieser Wissenschaften durch Mathematisierung zu verändern. So verfasste der dem Rationalismus zugeordnete portugiesisch-jüdische Philosoph und Begründer der modernen Bibelkritik Baruch de Spinoza (1632-1677) eine Schrift mit dem Titel *Descarte's Grundlagen der Philosophie auf geometrische Weise begründet* [8] sowie eine *Ethik, nach geometrischer Methode dargestellt* [9] . Und der bedeutende Philosoph der Aufklärung, Immanuel Kant (1724-1804), der mit seiner 'Kritik der reinen Vernunft' [10] die Erkenntnistheorie wesentlich beeinflusste und darauf hinwies, dass angesichts der Leistungen der Mathematik und Physik Erkenntnis *a priori* möglich sei, äußerte die Auffassung, *dass in jeder besonderen Naturlehre nur so viel* **eigentliche** *Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist* [11] . Dies spiegelt Platons Überzeugung, dass wahre Erkenntnis die Erstellung eines geistigen Abbilds der Realität voraussetzt.

7 Schlussbemerkung

Die hier kurz vorgestellten großen Denker früherer Jahrhunderte, die zumeist selbst nicht als Mathematiker im engeren Sinne anzusehen sind, maßen also der Mathematik grundlegende, für die Erkenntnis und deren praktische Nutzung unverzichtbare Bedeutung bei. Und es sollte kein Zweifel bestehen, dass eine breitere Zuwendung zur Mathematik und mithin stärkerer Betonung rationalen Denkens und Handelns Erfolge beim Bemühen um Frieden und würdiges menschliches Zusammenleben zeitigen kann.

Literatur

[1] Platon: *Platon, ausgewählt und vorgestellt von Rafael Ferber* München: Eugen Diederichs 1995

[2] Descartes, R.: *Geometrie (Nachdruck in Deutsch)*, Darmstadt 1969

[3] Pacioli, L.: *De divina proportione*, 1509

[4] Stevin, S.: Van de Spiegheling der Singconst, um 1600

[5] Kepler, J.: *Astronomia nova*, Frankfurt/M 1609

[6] Newton, I.: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687

[7] Leibnitz, W.G.: *Instrumentum Calculatorium*, 1674

[8] Spinoza, B. de: *Renati Descartes principiorum philosophiae mori geometrico demonstrata*, 1663

[9] Spinoza, B. de: *Ethica, ordine geometrico demonstrata*, 1677

[10] Kant, I.: *Critik der reinen Vernunft*, 1781

[11] Kant, I.: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, 1786

Rainer Ansorge
Mühlenweg 1
21521 Aumühle