Hamburger Beiträge
zur Angewandten Mathematik

Grundlagen der Lehre
Hier: Die Strahlensätze

R. Ansorge

Nr. 2016-09
April 2016

Grundlagen der Lehre
Hier: Die Strahlensätze.

R. Ansorge

1 Einleitung

Obwohl die Strahlensätze der ebenen euklidischen Geometrie für grosse Teile der Mathematik von grundlegender Bedeutung sind, findet man in vielen Grundlagen-Lehrbüchern, und zwar in älteren wie in neueren (siehe z.B. [1] und selbstkritisch [2]), keine Beweise für die Strahlensätze. Und von der Schule her sind den Studierenden in der Regel ebenfalls keine Beweise bekannt. Grundlegend sind die Strahlensätze bekanntlich z.B. für die Aussagen über ähnliche Dreiecke und damit für die trigonometrischen Funktionen, denn der Umstand, dass z.B. der sinus eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck nur vom Verhältnis

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

abhängt und für alle ähnlichen Dreiecke gleich gross ist, ist eine Folge des 2. Strahlensatzes [1]. Und die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen für die Mathematik und ihre Anwendungen ist gewiss auch den Erstsemestern in Anwendungsfächern (z.B. Ingenieuren) geläufig. Ein durch einen Beweis gestützten Hinweis auf die Bedeutung der Strahlensätze sollte deshalb vor allem in den Anfängervorlesungen der Ingenieure, Physiker usw. mit Nachdruck präsentiert werden.

Nachfolgend werden Beweise für den 1. und 2. Strahlensatz als Beispiele für die Aufnahme in Lehrbücher vorgeschlagen, die so bislang wohl kaum zu finden sind und u.a. den Satz des Pythagoras verwenden [2], dessen Beweis dann – wie auch die übrigen Teile der Beweise – weder auf ähnliche Dreiecke noch auf trigonometrische Funktionen Bezug nehmen darf.
Unter den vielen Beweisen des Satzes des Pythagoras in der Menge der sogenannten *Flächensätze*[3] gibt es natürlich auch einen, der diese Bedingungen erfüllt und um der Vollständigkeit willen im Anhang erneut vorgestellt wird. Er verwendet neben klassischen Flächenbegriffen und deren Eigenschaften lediglich ein von Hilbert [3] formuliertes Axiom der euklidischen Geometrie, nämlich dass zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Und er verwendet die Aussage, dass die Winkelsumme im Dreieck 180^0 beträgt, die zum Beweise lediglich das Parallelenaxiom, etwa in der zu allen anderen Formulierungen des Axioms äquivalenten Formulierung *zwei Geraden sind parallel, wenn an ihnen Stufenwinkel übereinstimmen* benutzt.

[1] ihn soll Thales von Milet (um 600 v.Chr.) schon gekannt und für die Bestimmung der Pyramidenhöhe per Schattenlängen genutzt haben.

[2] häufig ist es umgekehrt: der Satz des Pythagoras wird vielfach mittels der Beziehungen zwischen ähnlichen Dreiecken und somit unter Einbeziehung des 2. Strahlensatzes bewiesen

[3] siehe z.B. WikipediA

2 Beweis des 2. Strahlensatzes

In der Figur 1 seien die Strecken AC und BD parallel. Dann gilt für die Streckenlängen der 2. Strahlensatz:

$$\frac{SA}{SB} = \frac{AC}{BD} \quad . \tag{1}$$

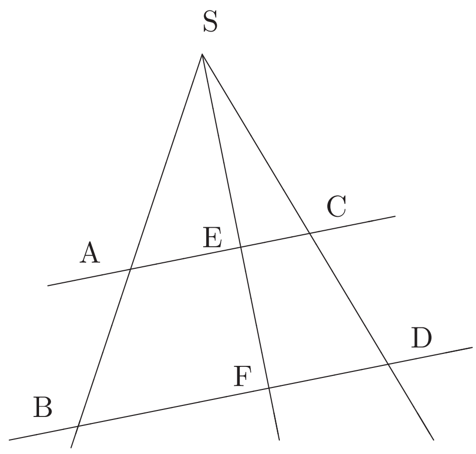

Fig. 1

Beweis:

Fläche(Dreieck SAC) + Fläche(Trapez ACBD) = Fläche(Dreieck SBD), d.h.

$$\frac{AC \cdot SE}{2} + \frac{AC + BD}{2} \cdot EF = \frac{BD \cdot SF}{2} \quad . \tag{2}$$

Dabei sei SF senkrecht auf BD und damit auch auf AC (Stufenwinkel an Parallelen).

(2) liefert

$AC \cdot (SE + EF) = BD \cdot (SF - EF) \quad ,$

d.h.

$$\frac{AC}{BD} = \frac{SE}{SF} \quad . \tag{3}$$

Betrachtet man anstelle des Dreiecks SBD das Dreieck SBF, so gilt analog

$$\frac{AE}{BF} = \frac{SE}{SF} \quad . \tag{4}$$

Unter Verwendung des Pythagoras folgt dann

$$\left(\frac{SB}{BF}\right)^2 = \frac{BF^2+SF^2}{BF^2} = \frac{\left(\frac{BF}{SF}\right)^2+1}{\left(\frac{BF}{SF}\right)^2}$$

und daher mit (4)

$$\frac{\left(\frac{AE}{SE}\right)^2+1}{\left(\frac{AE}{SE}\right)^2} = \left(\frac{SB}{BF}\right)^2$$

oder

$$\frac{(AE)^2+(SE)^2}{(AE)^2} = \left(\frac{SB}{BF}\right)^2 \quad ,$$

d.h. (mit Pythagoras)

$$\frac{(SA)^2}{(AE)^2} = \left(\frac{SB}{BF}\right)^2 \quad ,$$

also

$$\frac{SA}{AE} = \frac{SB}{BF} \text{ oder } \frac{AE}{BF} = \frac{SA}{SB}$$

und erneut mit (4)

$$\frac{SE}{SF} = \frac{SA}{SB} \quad ,$$

sodass mit (3) die Behauptung folgt.

3 Korollar (1. Strahlensatz)

Es gilt der 1. Strahlensatz

$$\frac{AB}{SA} = \frac{CD}{SC} \quad , \tag{5}$$

denn zunächst gilt natürlich analog zu (1) auch

$$\frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD} \quad ,$$

d.h. mit (1)

$$\frac{SD}{SC} = \frac{SB}{SA} \text{ oder } \frac{SC+CD}{SC} = \frac{SA+AB}{SA} \quad ,$$

also

$$1 + \frac{CD}{SC} = 1 + \frac{AB}{SA} \qquad \text{q.e.d.}$$

4 Ein oft zitierter Strahlensatz-freier Beweis des Satzes des Pythagoras

Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck gemäss Figur 2 mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c .

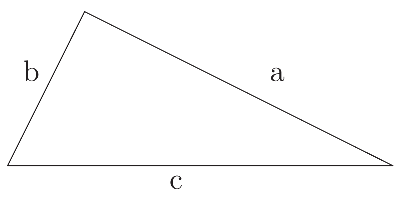

Fig. 2

Wir betrachten dann das Quadrat mit der Kantenlänge $a + b$ und zeichnen die 4 Eck-Dreiecke hinein gemäss Figur 3.

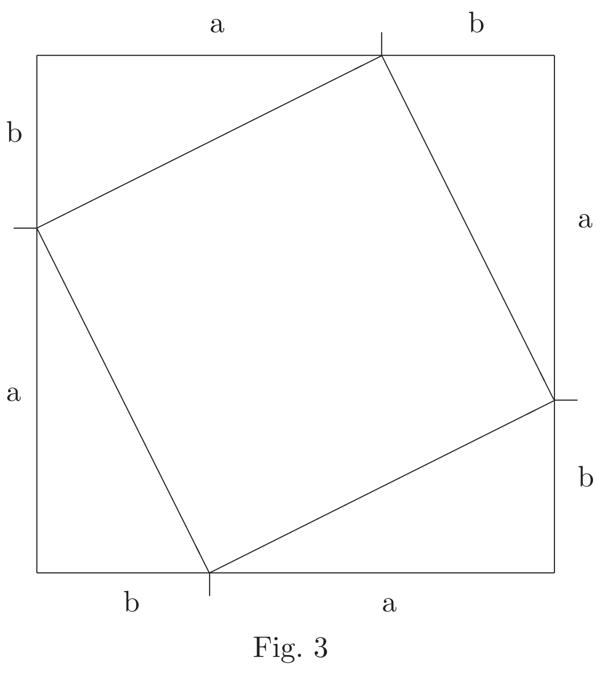

Fig. 3

Jedes der 4 Dreiecke in Figur 3 ist nach dem in der Einleitung genannten Hilbert-Axiom kongruent mit dem gegebenen Dreieck der Figur 2, sodass die dritte Seite in diesen Dreiecken jeweils mit c übereinstimmt, und auch die Winkel entsprechen denen des Ausgangsdreiecks. Das innere Viereck ist also eine Raute. Es ist sogar ein Quadrat, denn da die Summe beider Basiswinkel des rechtwinkligen Dreiecks (aufgrund der Dreieckswinkelsumme) 90^0 beträgt, hat auch die Summe der beiden an den Ecken zusammenstossender Dreiecke auftretenden Winkel den Wert 90^0, der zwischen ihnen liegende Winkel also ebenfalls diesen Wert.

Damit setzt sich die Fläche des grossen Quadrats zusammen aus der Fläche des inneren Quadrats plus den 4 Flächen der Eck-Dreiecke, m.a.W.:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \tfrac{a \cdot b}{2} \qquad \text{q.e.d.}$$

Literatur

[1] Mangoldt, H.v., K. Knopp: *Einführung in die höhere Mathematik, 8. Aufl.,* Verlag S. Hirzel, Leipzig 1944

[2] Ansorge, R., H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: *Mathematik für Ingenieure, 4. Aufl.*, Verlag Wiley-VCH, Weinheim 2010

[3] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie,* Verlag Teubner, Leipzig 1903

R.Ansorge
Augustinum Aumühle
Mühlenweg 1, App. 404
21521 Aumühle