HAMBURGER BEITRÄGE
ZUR MATHEMATIK

Heft 133

Zur physikalischen Spiegelung am Kreis

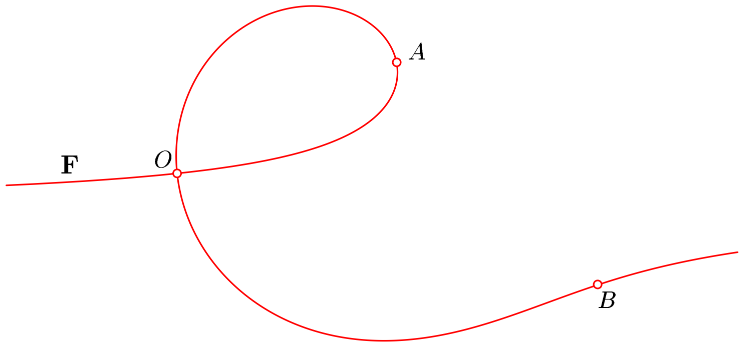
Alexander Kreuzer, Hamburg

Erhard Schröder, Hamburg

Mai 2002

Zusammenfassung

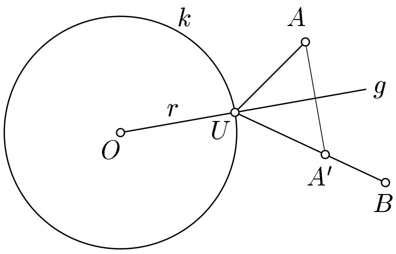
Anliegen der Arbeit ist die Behandlung des Reflektionspunktes U eines Lichtstrahles an einem kugelförmigen Spiegel. Die Lichtquelle A und der Empfänger B sind dabei fest vorgegebene Orte. Wir untersuchen u.a. den Ort aller Reflektionspunkte U bei variablem Kreisradius und erhalten eine Strophoide (vgl. 5. Abschnitt). Die Frage, ob bei gegebenem Radius der Reflektionspunkt mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, muß verneint werden, während exakte Formeln zur Berechnung des Punktes existieren (vgl. 7. Abschnitt).



1 Problemstellung

Die Lichtquelle A, der Empfänger B und der Reflexionspunkt U an einem kugelförmigen Spiegel bilden eine Ebene ϵ. Da U Reflektionspunkt auf der Kugel ist, steht die Ebene ϵ senkrecht auf der Tangentialebene der Kugel in U. Damit liegt insbesondere der Kugelmittelpunkt O in der Ebene ϵ.

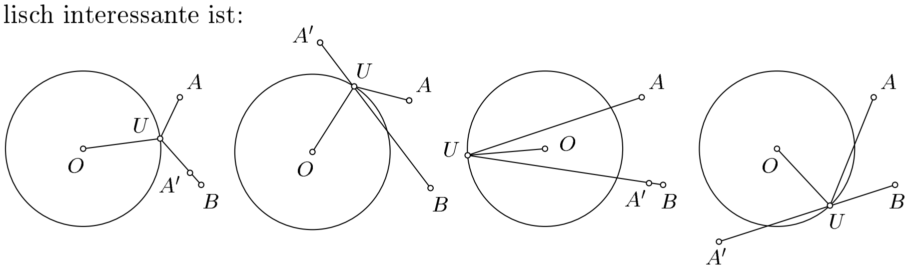
Wir können das Problem auf folgende ebene Fragestellung reduzieren: In der reellen Ebene, die wir uns durch die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen repräsentiert denken, sei ein Kreis k (der Schnitt von ϵ mit der Kugel) mit Mittelpunkt O und Radius r gegeben. Wir betrachten k als einen Spiegel.



Sind nun Punkte A, B außerhalb von k vorgegeben, so kann man nach Punkten U auf k suchen, so daß ein von A ausgehender Lichtstrahl in U gespiegelt den Punkt B erreicht.

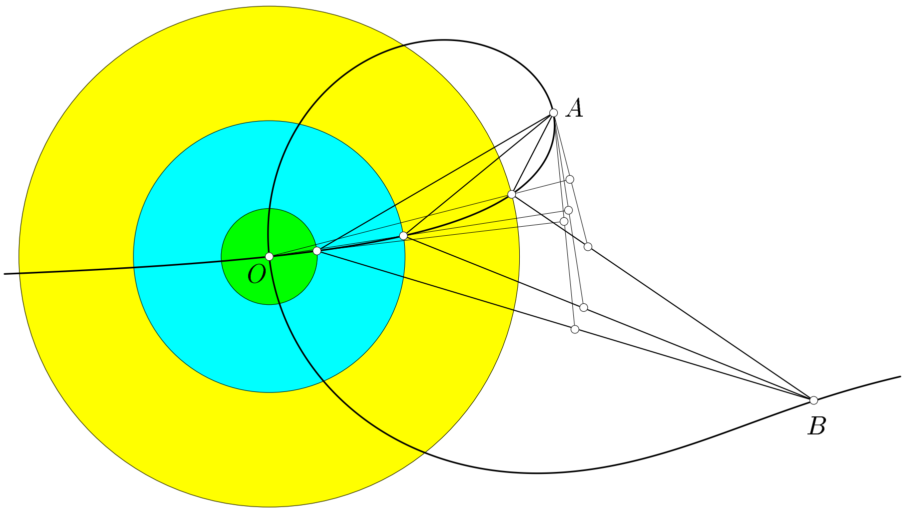
Wir verallgemeinern die Aufgabenstellung ein wenig, indem wir uns A, B in der Ebene beliebig, aber fest vorgegeben denken und jetzt nach allen Punkten U von k fragen, für welche U, A', B kollinear liegen, wenn A' aus A durch Spiegelung an der Geraden $<O, U>$ entsteht.

Anschaulich sind hier i.A. vier Lösungen denkbar, von denen eine die physikalisch interessante ist:



Im weiteren werde die Spiegelung an einer Geraden g mit $\widetilde{g}$ bezeichnet. Um nun auch Grenzfälle und beliebige Kreisradien zu erfassen, formulieren wir die Aufgabe schließlich wie folgt:

(1.1) *In der reellen Ebene $\mathbb{C}$ seien drei Punkte O, A, B vorgegeben. Man bestimme die Menge $\mathbf{F} = \mathbf{F}(O, A, B)$ aller Punkte U von $\mathbb{C}$, zu denen eine Gerade g durch O, U derart existiert, daß die Punkte $U, \widetilde{g}(A), B$ kollinear sind.*



(1.2) Wir erörtern zunächst einige Ausnahmefälle:

1. Ist $O = A = B$, so ist $\mathbf{F} = \mathbb{C}$.
2. Ist $O = A \neq B$, so ist $\mathbf{F} = <O, B>$.
3. Ist $O = B \neq A$, so ist $\mathbf{F} = <O, A>$.
4. Ist $O \neq A = B$, so ist $\mathbf{F} := <O, A> \cup k$, wobei k Thaleskreis über (O, A) ist.
5. Ist $A \neq B$ und $O = (A + B)/2$, so ist $\mathbf{F} = <A, B> \cup m_{A,B}$, wobei $m_{A,B}$ die Mittelsenkrechte von (A, B) ist.

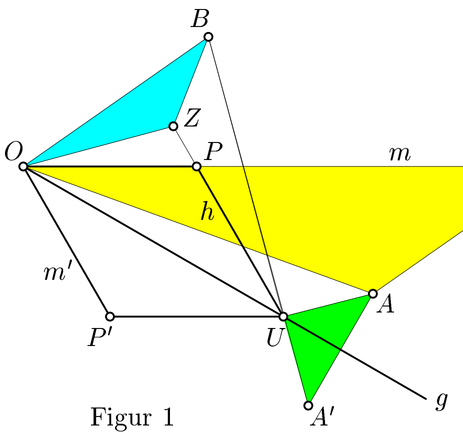
(1.3) Im weiteren seien O, A, B, C für $C := A - O + B$ paarweise verschieden.

Man nennt C den *vierten Parallelogrammpunkt zu* (A, O, B) und $m := <O, C>$ die *Seitenhalbierende* von (A, O, B) in O, selbst dann, wenn O, A, B, C kollinear sind. Entsprechend hat (A, O, B) in O auch stets zwei zueinander orthogonale *Winkelhalbierende* w_1, w_2 (wir betrachten w_1, w_2 als Winkelhalbierende des Geradenpaares $(<O, A>, <O, B>)$); die Spiegelungen daran vertauschen $<O, A>$ mit $<O, B>$.

Ist g eine Gerade durch O, so folgt: Im Falle $A \in g$ sind $A, \widetilde{g}(A), B$ kollinear, und im Falle $B \in g$ sind $B, \widetilde{g}(A), B$ kollinear. Ferner sind $O, \widetilde{g}(A), B$ genau im Falle $g \in \{w_1, w_2\}$ kollinear. Demnach gilt stets $\boxed{O, A, B \in \mathbf{F}}$.

2 Ein Satz über ähnliche Dreiecke

Der folgende merkwürdige elementargeometrische Satz wird bei unseren Überlegungen eine zentrale Rolle spielen:



$$C := A - O + B$$
$$m := <O, C>$$
$$m' := \widetilde{g}(<O, C>) = \widetilde{g}(m)$$
$$A' := \widetilde{g}(A)$$
$$P' := \widetilde{g}(P)$$

Figur 1

Satz 1. *Gegeben seien vier verschiedene Punkte* O, A, B, C *mit* $C = A - O + B$. *Ferner sei* $Z \in \mathbb{C}$ *derart, daß die Tripel* (O, A, C) *und* (O, Z, B) *gleichsinnig ähnlich sind. Ist nun* U *ein beliebiger Punkt von* $\mathbb{C}$ *und ist* g *eine Gerade durch* O, U*, so gilt:*

Die Punkte $\widetilde{g}(A), B, U$ *sind genau dann kollinear, wenn* U *auf der Parallelen zu* $\widetilde{g}(<O, C>)$ *durch* Z *liegt (Figur 1).*

Beweis: O.B.d.A. sei O die komplexe Zahl 0, und es sei $C \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Wegen $Z/B = A/C$ ist $Z = A \cdot B/C$. Weiter sei nun $D \in g \backslash \{0\}$ mit $D \cdot \overline{D} = 1$, und es sei $U = rD$ mit $r \in \mathbb{R}$. Für $Y \in \mathbb{C}$ ist $Y' := \widetilde{g}(Y) = D^2 \cdot \overline{Y}$. Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
A',\ B,\ U \text{ sind kollinear} \quad &\Leftrightarrow \quad (A'-U) \in \mathbb{R}(B-U) \vee U=B \\
&\Leftrightarrow \quad (D^2 \cdot \overline{A}-rD)\cdot(\overline{B}-r\overline{D}) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad (D^2 \cdot \overline{AB}-rD(\overline{A+B}) + r^2)/\overline{C} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad Z' - U \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad U - Z \in \widetilde{g}(\mathbb{R}) = \widetilde{g}(<O,C>). \quad \square
\end{aligned}
$$

Corollar. *Sind O, A, B, C, Z wie in Satz 1 gegeben und ist $U \in \mathbb{C} \setminus m$ mit $g \not\perp m$ für $m{:=}<O,C>$ und $g{:=}<O,U>$, so trifft die Parallele h zu $\widetilde{g}(m)$ durch Z die Gerade m in genau einem Punkt P, und es gilt $U \in \mathbf{F}$ genau dann, wenn $(P, O, \widetilde{g}(P), U)$ eine Raute ist (vgl. Figur 1).*

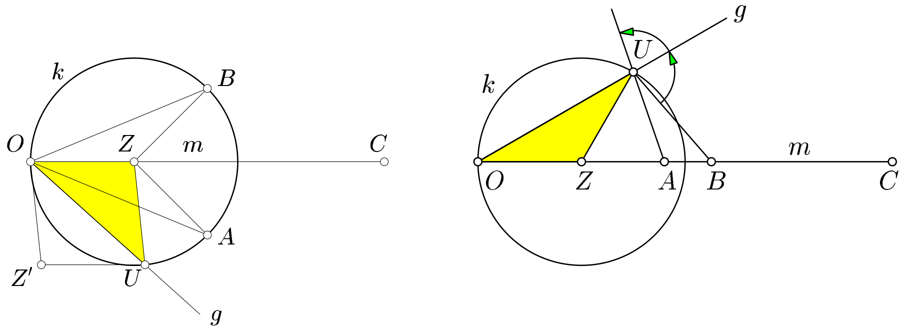
Beweis: Wegen $\widetilde{g}(m) \neq m$ ist $\widetilde{g}(m) \neq g$ und damit $h \nparallel m, g$. Mithin ist P definiert. Nach Satz 1 ist $(U \in \mathbf{F} \ \Leftrightarrow\ U \in h)$, und wegen $\widetilde{g}(m) \parallel h \wedge m \parallel \widetilde{g}(h) \wedge \sphericalangle(\widetilde{g}(m), g) = \sphericalangle(g, m)$ ist $U \in h$ genau dann, wenn $(P, O, \widetilde{g}(P), U)$ eine Raute ist. $\square$

3 Grundeigenschaften der Punktmenge F

Bei den weiteren Erörterungen seien O, A, B, C, Z, g, U stets wie in Satz 1 gegeben, und $\mathbf{F} = \mathbf{F}(O, A, B)$ sei die in Abschnitt **1**. definierte Punktmenge. Wieder sei $m := <O,C>$.

(3.1) Ist $g = <O,Z>$, so führt $U{:=}Z$ mit Satz 1 auf $\boxed{Z \in \mathbf{F}}$.

(3.2) Der Fall $Z \in m$ tritt wegen der gleichsinnigen Ähnlichkeit von (O, A, C) und (O, Z, B) genau dann ein, wenn die Gerade m eine Winkelhalbierende des Winkels AOB ist. Wenn $<A,B> \neq m$ ist, bedeutet dies, daß (A, O, B, C) eine Raute ist, und wegen $|O-A| = |A-C|$ ist dann $|O-Z| = |Z-B|$, aus Symmetriegründen also auch $|O-Z| = |Z-A|$ (Figur 2).



Figur 2: Der Fall $Z \in m$

(3.3) Es sei $Z \in m$. Dann führt $g = m$ mit (3.2) auf $A, B \in g$ oder auf $\widetilde{g}(A) = B$, und man erhält $m \subseteq \mathbf{F}$. Für $g \perp m$ folgt $O \in \mathbf{F}$. Ist aber $g \neq m$ und $g \not\perp m$, so ist $(Z, O, \widetilde{g}(Z), U)$ nach dem Corollar zu Satz 1 eine Raute, und es folgt $\mathbf{F} \backslash m = k \backslash m$, wobei k der Kreis um Z durch O ist. Damit haben wir

Satz 2. *Im Falle $Z \in m$ ist* $\mathbf{F}$ *die Vereinigung von m mit dem Kreis um Z durch O.*

Wegen $\mathbf{F} = \mathbf{F}(O,A,B)$ ist $\widetilde{g}(<A,U>) = <B,U>$ für $U \in \mathbf{F} \setminus \{O,A,B\}$, d.h., $g = <O,U>$ halbiert den Winkel $(<A,U>,<B,U>)$. Sind nun O,A,B kollinear, so liegen die Punkte $U \in \mathbb{C} \setminus \{O,A,B\}$ mit $\sphericalangle(<A,U>,<O,U>) = \sphericalangle(<O,U>,<B,U>)$ auf dem sogenannten *Apolloniuskreis* bzgl. $((A,B),O)$, und bekanntlich gilt dies genau dann, wenn $|A-U| : |B-U| = |A-O| : |B-O|$ ist (vgl. [2]). Demnach gilt:

Corollar. *Im Falle $Z \in m = <A,B>$ ist* $\mathbf{F}$ *die Vereinigung von m mit dem Apolloniuskreis bzgl.* $((A,B),O)$.

(3.4) Es sei $\boxed{Z \notin m}$:

a) Die Möglichkeit $U = O \in \mathbf{F}$ ergibt sich nach Satz 1 genau dann, wenn $\widetilde{g}(m) = <O,Z>$ ist, d.h., wenn g eine Winkelhabierende von (Z,O,C) ist. In Verbindung mit (1.3) bedeutet dies, daß w_1, w_2 *zugleich* die Winkelhalbierenden von (A,O,B) und von (Z,O,C) sind und daß $\boxed{w_1 \cap \mathbf{F} = \{O\} = w_2 \cap \mathbf{F}}$ ist.

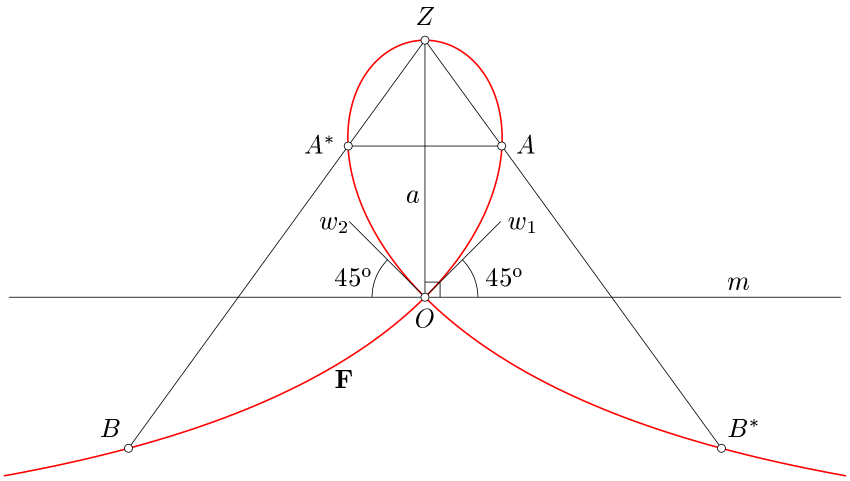
b) Ist g eine Gerade durch O und ist h die Parallele zu $\widetilde{g}(m)$ durch Z, so gilt $(g \parallel h \Leftrightarrow g{=}\widetilde{g}(m) \Leftrightarrow g{=}m{=}\widetilde{g}(m) \Leftrightarrow g \cap h{=}\emptyset)$. Mit Satz 1 und a) impliziert dies $\boxed{m \cap \mathbf{F} = \{O\}}$.

c) Ist g eine Gerade durch O mit $\boxed{g \neq w_1, w_2, m}$, so folgt $\boxed{|g \cap \mathbf{F}| = 2}$ gemäß a), b) und Satz 1.

d) Nach Satz 1 ist $\mathbf{F} = \mathbf{F}(A,O,B)$ durch O,Z,m eindeutig festgelegt. Deshalb notieren wir $\mathbf{F}$ im weiteren auch in der Form $\mathbf{F}(O,Z,m)$.

(3.5) Es gelte $Z \notin m$. Wir untersuchen nun noch, in welchen Fällen $\mathbf{F}$ eine *Symmetrieachse* a hat. Da der Punkt O als einziger Kurvenpunkt doppelt erzeugt wird, nämlich durch w_1 und w_2, muß a den Punkt O enthalten. Nach (3.4)a),b),c) sind m, w_1, w_2 die einzigen Geraden durch O, die $\mathbf{F}$ nur einmal (in O) treffen, d.h., diese Geraden müssen durch die Spiegelung $\widetilde{a}$ an der Achse a permutiert werden. Für einen Punkt $P \in \mathbf{F} \setminus \{O\}$ mit $<O,P> \perp a$ würde $\widetilde{a}(P) \in <O,P> \cap \mathbf{F}$ folgen, ein Widerspruch zu (3.4)c). Also steht a auf einer der Geraden m, w_1, w_2 senkrecht.
Wegen $Z \notin m$ und (3.4)a) sind m, w_1, w_2 paarweise verschieden, und $w_1 \perp w_2$ impliziert $m \not\perp w_1, w_2$. Es folgt $\widetilde{a}(w_1) \perp \widetilde{a}(w_2)$ und $\{w_1, w_2\} = \{\widetilde{a}(w_1), \widetilde{a}(w_2)\}$ und $\widetilde{a}(m) = m$, insbesondere also $a \neq w_1, w_2$. Da a auf einer der Geraden m, w_1, w_2 senkrecht steht, gilt $a \perp m$, und a, m sind die zwei Winkelhalbierenden von $\sphericalangle(w_1, w_2)$. Im Falle $a = <O,Z> \perp m$ ist $\mathbf{F}$ nach dem Colollar zu Satz 1 tatsächlich symmetrisch zu a, und wegen $Z \in \mathbf{F}$ sind $Z, \widetilde{a}(A), B$ gemäß der Definition von $\mathbf{F}$ kollinear. Überdies liegt im symmetrischen Fall die Mitte der Strecke $[\widetilde{a}(A), B]$ auf m wegen $(A+B)/2 \in m$ und $<\widetilde{a}(A), A> \| m$. Damit ist gezeigt:

(3.6) *Es gelte $Z \notin m$. Im Falle $<O,Z> \perp m$ hat* **F** *genau eine Symmetrieachse a, nämlich $a = <O,Z>$. Im Falle $<O,Z> \not\perp m$ hat* **F** *keine Symmetrieachse* (vgl. Figur 3).



Figur 3: Achsensymmetrie

4 Erzeugendenpaare von F

Wieder seien O, A, B, C, Z wie in Satz 1 gegeben. O.B.d.A. sei O hierbei die komplexe Zahl 0, und es sei $C = A + B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Nach dem Beweis von Satz 1 ist $Z = A{\cdot}B/C$, und für $U \in \mathbb{C}$ gilt $\boxed{U \in \mathbf{F} \;\Leftrightarrow\; U^2 \cdot (\overline{Z}-\overline{U}) \in \mathbb{R}}$.

Ist $U \in \mathbf{F}\backslash\{0,Z\}$ und ist $V := UZ/(U-Z)$, so ist $V \neq 0, Z$ mit $UV{=}UZ{+}VZ$, also mit $Z{=}UV/(U{+}V)$ und $U{+}V = UV/Z = -U^2{\cdot}(\overline{Z}{-}\overline{U})/[(U{-}Z)(\overline{U}{-}\overline{Z})] \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, und wegen $U(Z{-}V) = -VZ$ ist $V^2 \cdot (\overline{Z}{-}\overline{V}) = -V^2\,\overline{VZ}/\overline{U} = -V^2\overline{V}^2/(\overline{UV/Z}) \in \mathbb{R}$, also $V \in \mathbf{F}$.

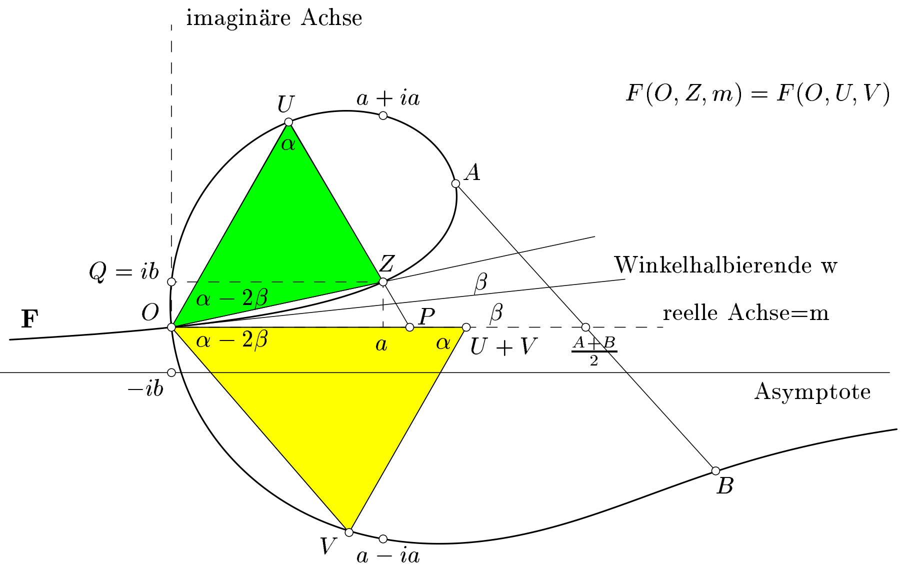
Damit folgt

Satz 3. *Zu jedem $U \in \mathbf{F}\backslash\{0,Z\}$ gibt es ein $V \in \mathbf{F}\backslash\{0,Z\}$ mit $\mathbf{F}(O,A,B) = \mathbf{F}(O,Z,m) = \mathbf{F}(O,U,V)$. Durch die Paare (A,B) und (U,V) läßt sich* **F** *in gleicher Weise erzeugen (vgl. Figur 4).* Deshab heißt (U,V) ebenso wie (A,B) ein *Erzeugendenpaar* von **F**.

Ausgehend von U läßt sich V auch geometrisch konstruieren, denn die Mitte von U und V liegt auf m, und w_1 halbiert den Winkel $(<O,U>, <O,V>)$.

5 Deutung der Punktmenge F als Strophoide

Wenn in $\mathbb{C}$ eine Gerade m und zwei Punkte O, Z mit $O \in m$ und $Z \notin m$ vorgegeben sind, so wird die Menge aller Punkte $U \in \mathbb{C}$, zu denen auf m ein mit Z, U kollinear gelegener Punkt P existiert, der die Bedingung $|P-O| = |P-U|$ erfüllt, als *punktierte* **Strophoide** $\mathbf{S}^*(O, Z, m)$ bezeichnet. Diese heißt *einfach*, wenn $<O, Z> \perp m$ ist. Ist Q der Fußpunkt des Lotes von O auf die Parallele zu m durch Z (im einfachen Fall $Q = Z$), so können wir $\mathbf{S}^*(O, Z, m)$ erweitern zu $\mathbf{S}(O, Z, m) := \{Q\} \cup \mathbf{S}^*(O, Z, m)$ (vgl. Figuren 1, 2 und 4). Den Punkt Q erhält man anschaulich, wenn P der Fernpunkt der Geraden m ist.



Figur 4: Der Fall $Z \notin < O, C >$

Wir erhalten mit Satz 1 unter den dort angegebenen Voraussetzungen nun

Satz 4. Ist $Z \notin m := <O, C>$, so ist $\mathbf{F}(O, Z, m)$ die Strophoide $\mathbf{S}(O, Z, m)$.

Beweis: 1) Ist g das Lot von O auf m, so führt Satz 1 auf $g \cap \mathbf{F} = \{O, Q\}$. Zugleich gilt offenbar $g \cap \mathbf{S}^*(O, Z, m) = \{O\} = m \cap \mathbf{S}^*(O, Z, m)$.

2) Ist $U \in \mathbb{C} \backslash m$ mit $g := <O, U> \not\perp m$, so führt das Corollar zu Satz 1 auf $(U \in \mathbf{F} \Leftrightarrow U \in \mathbf{S}^*(O, Z, m))$. $\square$

Nach Satz 4 liefert die physikalische Spiegelung am Kreis ebenso wie Satz 1 eine von der Standarddefinition abweichende Erzeugung der Strophoiden. Die durch Satz 1 gegebene Darstellung soll im weiteren nun zur algebraischen Beschreibung dieser Kurven herangezogen werden.

6 Algebraische Darstellungen für die Punktmenge F

Im weiteren gehen wir o.B.d.A. davon aus, daß O das Nullelement 0 von $\mathbb{C}$ ist und daß $C = A + B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist. Aus der gleichsinnigen Ähnlichkeit der Tripel $(0, A, C)$ und $(0, Z, B)$ folgt $Z/B = A/C$, also $Z = AB/C$. Der Fall $Z \in <0, C> = \mathbb{R}$ sei im folgenden zunächst miteinbezogen.

Wir verwenden die Darstellungen $Z := a + i\,b$ und $U := r \cdot X$ mit $X := x + i\,y = \cos t + i \sin t$, wobei $a, b, r, x, y \in \mathbb{R}$ sind und $t \in [0, \pi[$ ist. Es sei $u = r \cdot x$ und $v = r \cdot y$, also $U = u + i\,v$.

Ist nun $g = \mathbb{R}X$, so ist $Z' := \widetilde{g}(Z) = X^2 \cdot \overline{Z}$, und die Punkte $U, \widetilde{g}(A), B$ sind nach Satz 1 genau dann kollinear, wenn $U - Z' \in \mathbb{R}$ ist, wenn also $v = Im(X^2 \cdot \overline{Z})$ und damit

$$\boxed{(6.1) \quad v(t) := v = r \cdot \sin t = a \cdot \sin 2t - b \cdot \cos 2t \;\text{ mit } t \in [0, \pi[}$$

gilt.

Ist jetzt $r \neq 0$, so ist

$$\begin{aligned}(6.1) \;&\Leftrightarrow\; r \cdot y = a \cdot 2xy - b \cdot (2x^2 - 1) \;\Leftrightarrow\; b \cdot (2x^2 - 1) = y \cdot (2ax - r) \\ &\Leftrightarrow\; b \cdot (2u^2 - r^2) = v \cdot (2au - r^2) \;\Leftrightarrow\; b \cdot (2u^2 - u^2 - v^2) = v \cdot (2au - u^2 - v^2).\end{aligned}$$

Damit und wegen $0 \in \mathbf{F}$ erhalten wir

Satz 5. *Es ist* $\boxed{\mathbf{F} = \{\, u + i\,v \in \mathbb{C} \mid u^2 \cdot (v + b) + v^2 \cdot (v - b) = 2a \cdot uv \,\}}$.

Durch Einsetzen erkennen wir (6.2) $i\,b \in \mathbf{F} \;\wedge\; a + i\,a,\; a - i\,a \in \mathbf{F}$.

Für $b = 0$ wird Satz 2 durch Satz 5 bestätigt.

Im weiteren gelte jetzt $b \neq 0$, also $\boxed{Z \notin \mathbb{R}}$:

Mit $b \neq 0$ führt (6.1) auf $t \neq 0$, und für $t \neq 0$ gilt

$$\boxed{(6.3) \quad u(t) := u = v(t) \cdot \cot t = 2a \cdot \cos^2 t + b \cdot \sin 2t - b \cdot \cot t \quad \forall t \in]0, \pi[}.$$

Demnach gehört zu jedem $t \in]0, \pi[$ genau ein Punkt $U(t) := u(t) + i\,v(t)$ von $\mathbf{F}$, und es folgt

Satz 6. *Für* $Z \notin \mathbb{R}$ *hat* $\mathbf{F}$ *die Parameterdarstellung* $\boxed{\mathbf{F} = \{\, U(t) \mid t \in]0, \pi[\,\}}$.

Offenbar ist $U(t)$ an jeder Stelle $t \in]0, \pi[$ unendlich oft differenzierbar, und wegen $(u'(t), v'(t)) = (-2a \cdot \sin 2t + 2b \cdot \cos 2t + b/\sin^2 t,\; 2a \cdot \cos 2t + 2b \cdot \sin 2t)$ für alle $t \in]0, \pi[$ erkennen wir aus

$$\lim_{t \to 0} v(t) = \lim_{t \to \pi} v(t) = -b \neq 0 \;\wedge\; \lim_{t \to 0} v'(t)/u'(t) = \lim_{t \to \pi} v'(t)/u'(t) = 0$$

für $t \in]0, \pi[$ in Verbindung mit $\lim_{t \to 0} \cot t = \infty$ und $\lim_{t \to \pi} \cot t = -\infty$, daß die Gerade $\boxed{-Z + \mathbb{R}}$ die **Asymptote** von $\mathbf{F}$ für $u \to -\infty$ wie für $u \to \infty$ ist.

7 Zur Berechnung und Konstruierbarkeit von Lösungen

Wir kehren nun zum physikalischen Ausgangsproblem zurück und denken uns r fest in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ gewählt:

Wegen $v^2 = r^2 - u^2$ erhalten wir dann aus der Herleitung von Satz 5 die Bestimmungsgleichung $\boxed{(*) \quad b^2 \cdot (2u^2 - r^2)^2 = (r^2 - u^2) \cdot (2au - r^2)^2}$ für u.

Das folgende Beispiel zeigt, daß u i.A. nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist: Für $A = 3 + 3i$, $B = 6 - 3i$ und $r = 1$ ist $a = 3$ und $b = 1$, und $(*)$ führt auf $(2u^2 - 1)^2 = (1 - u^2) \cdot (6u - 1)^2$, also auf $u \cdot (40u^3 - 12u^2 - 39u + 12) = 0$. Das Polynom $f(x) = 40x^3 - 12x^2 - 39x + 12$ hat über $GF(13)$ die Gestalt $x^3 + x^2 - 1$ und ist dort ohne Nullstelle. Deshalb ist $f(x)$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel.

Die Lösungen von $(*)$ lassen sich explizit angeben. Man kann sie sich durch ein Algebra-Programm ausdrucken lassen und stellt dann fest, daß sie aufgrund ihrer Kompliziertheit wenig nützlich sind.

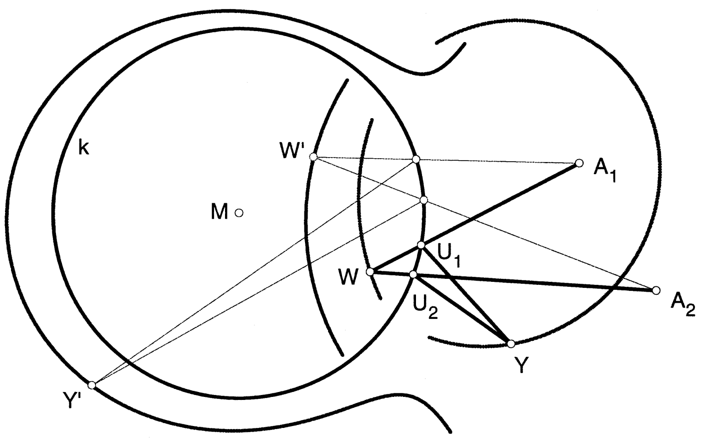
Für numerische Berechnungen kann man z.B. das nachfolgend notierte Mathematica-Programm verwenden. Hier sind lediglich die komplexen Zahlen A (= Sender), B (= Empfänger) und der Radius r des spiegelnden Kreises k einzugeben (mit $A \neq -B$ und $r > 0$). Mit der Anweisung „M“ werden alle Punkte U von k mit $<0, U>$ = Winkelhalbierende von $(<A, U>, <B, U>)$ ausgegeben, und die Anweisung „P“ liefert den physikalisch relevanten Punkt:

```
A = 3 + 2*I;  B = 3 + I;  r = 2;
e = N[Abs[A+B]]; Z = A*B*e/(r*((A+B)^2));
a = RE[Z]; b = IM[Z];
L = NSolve[{b*(2x^2-1),x^2+y^2}=={y*(2*a*x-1),1}, {x,y}] ;
M = r*(A+B)*Table[x + I*y /. L]/e
S = Select[M,Re[(A-#)(B-#)Conjugate[#^2]]>0 &];
P = Select[S,Re[#/(A+B)]>0 &]
```

8 Schlußbemerkung

Will man feststellen, was ein zweiäugiger Beobachter an einem spiegelnden Kreis k sieht, so muß man sich von einem „Sender“ Y jetzt zwei Lichtstrahlen ausgesendet denken, die an k reflektiert in die „Augen“ A_1, A_2 treffen. Schneiden sich die rückwärts verlängerten reflektierten Strahlen im Punkt W, so ist W der im Spiegel k gesehene Punkt.

Nach den obigen Überlegungen kann man zu Y und A_1 bzw. zu Y und A_2 einen Punkt U_1 bzw. U_2 auf k derart finden, daß $Y \to U_1 \to A_1$ bzw. $Y \to U_2 \to A_2$ den Weg der reflektierten Lichtstrahlen beschreibt, und W ist Schnittpunkt der Geraden $<A_1, U_1>$ und $<A_2, U_2>$ (vgl. Figur 5).



Figur 5

Man hat also Möglichkeiten, z.B. auch numerischer Art, den mit den „Augen“ A_1, A_2 gesehenen Spiegelpunkt W von Y zu bestimmen.

Wir sahen, daß dies ziemlich aufwendig zu berechnen ist. Dagegen ist es merkwürdigerweise völlig elementar, aus W den Punkt Y zurückzugewinnen:
Man findet U_1, U_2 als Schnitt der Strecken $[W, A_1], [W, A_2]$ mit k und bestimmt Y dann als Schnitt der Geraden m_1, m_2, die durch Spiegelung von $<U_1, A_1>$ an $<U_1, M>$ bzw. durch Spiegelung von $<U_2, A_2>$ an $<U_2, M>$ entstehen ($M =$ Mittelpunkt von k).
In Figur 5 laufen W, W' auf Kreisbögen und Y, Y' auf den angegebenen Kurven. Man stellt insbesondere fest, daß die Zuordnung $W \leftrightarrow Y$ abhängig von der „Augenstellung“ ist, ganz im Unterschied zum geradlinigen Spiegel.

Literatur

[1] K. Fladt. *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven.* Akademische Verlags-gesellschaft, Frankfurt, 1962.

[2] G. Hajos. *Einführung in die Geometrie.* Leipzig, 1970.

[3] E. M. Schröder. *Geometrie euklidischer Ebenen.* Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn, 1985.

Eingegangen am 07.12.2001

Mathematisches Seminar
Universität Hamburg
Bundesstr. 55, 20146 Hamburg