

Hamburger Beiträge zur Mathematik

Nr. 334 / Mai 2009

Mathematik und Determinismus

von Ernst Kleinert

Prolog: Dialogus satis confusus

„Wenn der Determinismus wahr wäre, dann müßte es möglich sein, mir exakt vorzusagen, was ich in den nächsten zehn Minuten tun werde. Das ist offenbar Unsinn, der Determinismus also falsch.“

Die Voraussage mag für uns unmöglich sein, weil die Komplexität zu groß ist. Das ändert aber nichts daran, daß sie prinzipiell möglich ist.

„Was heißt denn „prinzipiell möglich“, wenn sie für uns unmöglich ist? Sie ist prinzipiell für uns unmöglich, und das ist nicht bloß eine Frage der Komplexität, sondern der Selbstreferentialität. Die Voraussagbarkeit ist gar nicht vorstellbar, denn was sollte mich hindern, nach erhaltener Voraussage etwas Anderes zu tun?“

Sei vorsichtig, denke an Ödipus... Aber auch wenn die Voraussage prinzipiell für uns unmöglich ist, selbst für etwaige höhere Wesen, liegt doch darin keine Widerlegung. Der Tatbestand des Determinismus hängt nicht davon ab, daß er uns explizite vorgerechnet wird. Deine Anfangsvoraussetzung ist falsch.

„Wenn die Determiniertheit unseres Verhaltens niemals wirklich demonstriert werden kann, dann bleibt sie ein purer Glaubensartikel, schlechte Metaphysik, und kann sich jedenfalls nicht mehr auf Wissenschaft berufen.“

Die Wissenschaft hat die Determiniertheit von Naturvorgängen zu Genüge demonstriert, und sie hat dabei schon öfter Grenzen überwunden, die man für unüberschreitbar hielt. Fliegen sei das Vorrecht der Engel, hieß es einmal. Die Erwartung ist rational, und damit auch wissenschaftlich, daß sie weitere Grenzen überwinden wird. Die Beweislast liegt hier auf deiner Seite.

„Das weise ich zurück. Die Wissenschaft (im heutigen Sinn jedenfalls) hat sich immer nur dadurch in Geltung gesetzt, daß sie sich in Anwendungen bewährt hat, sprich in erfolgreichen Voraussagen, von der Sonnenfinsternis bis zur Kettenreaktion. Und da wir gerade dabei sind: es sollte doch zu denken geben, daß im Bereich des sehr Kleinen nicht mehr die Elemente einzelweise determinierbar sind, sondern nur noch ihr statistisches Verhalten.“

Für makroskopische Anwendungen wie menschliches Verhalten reicht das ja auch. Übrigens könnte die Quantenmechanik, eine der bestbestätigten Theorien überhaupt, kaum besser bestätigt werden, wenn sie auch die einzelnen Teilchen determinieren könnte.

„Was sie bekanntlich nicht zuläßt. Also schon das sehr Kleine hat die Physik zu einem neuen Verständnis ihrer selbst genötigt. Dabei geht es auch dort, wie zuvor, um geschlossene Systeme, oder jedenfalls solche, die unter kontrollierbaren Einflüssen stehen. Eine Physik, die den Determinismus stützen will, müßte aber auch imstande sein, die Auswirkung ihrer eigenen Voraussage auf das Subjekt der Voraussage in Rechnung

zu ziehen. Das scheint mir eine Schwelle von anderer Qualität zu sein als die bisher überwundenen Schwellen.“

Jede neue Schwelle erschien höher als die zuvor überwundenen. Die Quantenmechanik macht ja schon Aussagen über die Folgen des bloß beobachtenden Eingreifens in ein System. Ich habe auch nichts dagegen, daß die Wissenschaft, wenn sie diese Schwelle überwindet, auch zu neuer Selbstbesinnung und -Bestimmung gelangt. Aber sie wird Wissenschaft bleiben.

„Aber nicht das, was wir heute darunter verstehen. Ich zweifle nicht daran, daß wir über die Determiniertheiten des menschlichen Daseins noch viel mehr herausfinden werden, als wir heute ahnen; das muß man sogar hoffen. Eripe me, domine, e necessitatibus meis. Aber es scheint mir mehr als fraglich, daß die Prinzipien des Physikalismus die dabei anfallende Transformation der Wissenschaft überleben werden. Eine Teilaufgabe wäre übrigens, die Psychoanalyse, die ja bisher am meisten zu der Einsicht beigetragen hat, daß das Ich nicht Herr im eigenen Hause ist, mit der Physik nicht nur zu versöhnen, sondern wirklich zu vereinigen. Was wir für unsere Freiheit halten, ist *vielleicht* eine Illusion; der Determinismus aber ein uneingelöstes Versprechen, eine bloße Extrapolation, deren Unzulässigkeit mir offensichtlich erscheint.“

Immerhin hat diese Extrapolation den Schub einiger Jahrhunderte theoretischen und technischen Fortschritts hinter sich, wie er früheren Zeitaltern gar nicht vorstellbar war, dessen Nachlassen nicht abzusehen ist und gegen den man allenfalls einwenden kann, daß er uns zu überrennen droht. Der Begriff der Freiheit hingegen wird, wie du selbst zugibst, immer bröcklicher, war genau besehen immer schon aporetisch, sich eher aus einem unbestimmten Gefühl, einem Sich-nicht-Festlegen-Lassen-Wollen nährend als aus begrifflicher Distinktion. Wenn man von einer Handlung all ihre Determinanten abzöge (gesetzt, das wäre möglich), dann bliebe ein zufälliges Geschehen, das man nicht als freie Handlung einer Person zuschreiben kann. Wenn in einer Wahlsituation die Präferenzen keine Entscheidung bringen, sind wir in der Lage von Buridans Esel, und die Entscheidung bleibt einem Zufallsgenerator überlassen; setzt eine Präferenz sich durch, ist die Handlung eben durch sie determiniert. Wo bleibt deine Freiheit?

[....]

Nach wie vor beunruhigt das Problem des Determinismus die Geister. Wir verstehen darunter die Auffassung, daß zu jedem Zeitpunkt feststeht, was zu jedem künftigen Zeitpunkt der Fall sein oder sich ereignen wird; und das soll gelten für den gesamten Weltprozeß vom Größten bis ins Kleinste, vom Gang der Gestirne bis zu den verborgensten Regungen der Elementarteilchen. Eine Folge dieser Auffassung ist, daß kein Ereignis je anders verlaufen kann (hätte verlaufen können, verlaufen wird) als es tatsächlich verläuft (verlaufen ist, verlaufen wird). Insbesondere erscheint unser Glaube, durch freie Entscheidungen den Lauf der Dinge ändern zu können, als Illusion ¹⁾.

Eine solch extreme Position erscheint vielleicht a limine uninteressant oder als ein zu leichter Gegner; beides wäre irrig. Es mag hilfreich sein, zwischen einem „weichen“ und einem „harten“ Determinismus zu unterscheiden. Der erstere ergibt sich aus der Feststellung, daß unsere Handlungen viel häufiger, als wir uns bewußt machen, auch bei Abwesenheit äußerer Zwänge determiniert sind durch Einflüsse, die jedenfalls nicht unser freier Wille sind; Triebe und Gewohnheiten, kleinere Regungen, denen wir ohne Nachdenken folgen, die Tagesform. Ein Tagesablauf ohne besondere Vorfälle zerfällt in weitgehend „programmierte“ Handlungsreihen (wobei Modifikationen durch kleine Änderungen der Umstände mitprogrammiert sind), die ihrerseits in festen Ordnungen stehen. Dieser „weiche“ Determinismus ist common sense und wird hier geschenkt. Wir fühlen uns aber (fast) jederzeit imstande, aus diesen Programmen heraustreten und kraft eines freien Willens in den Lauf der Dinge eingreifen zu können, oder, wie Kant es ausdrückte, spontan eine Kausalitätskette in Gang zu bringen. Das eben erklärt der „harte“ Determinismus, den wir oben skizziert haben, für Illusion.

Das Wort „Illusion“ begegnet häufig in diesem Kontext, ein subtiles Mittel, eine gegnerische Position zu unterminieren. Wer eine Illusion hegt, befindet sich nicht einfach im Irrtum, sondern klammert sich an etwas, das der Wissende längst hinter sich hat; er bedarf eher der Kur als der Aufklärung. Daß hier freilich Illusionen im Spiel sind, zeigt schon die Tatsache, daß die Determiniertheit fremden Verhaltens eher möglich scheint als die des eigenen. Wie unten näher ausgeführt wird, ist die Vorstellung von der durchgängigen Determiniertheit des Weltgeschehens nicht weniger illusionär als die naive Vorstellung von Freiheit als einem „Tun-Können-was-Ich-Will“. Halten wir hier nur fest, daß von einem rein hedonistischen Gesichtspunkt aus der Determinismus die weit vorzuziehende Alternative ist. Den „weichen“ Determinationen, wie sie oben angedeutet wurden, überlassen wir uns ja oft recht gern, haben sie doch eine kaum abzuschätzende Entlastungsfunktion; wohin kämen wir, wenn wir für jede einzelne Handlung eine Entscheidung fällen müßten? Indem wir uns dem Weltlauf anbequemen, schaffen wir erst Raum für eigenen Genuß. Der Determinismus macht die Entlastung absolut. Wie tröstlich kann es doch sein, sich ins Fatum fallen zu lassen, wenn Pläne oder Kräfte ausgehen; jedes Sich-Gehen-Lassen ist ja gerechtfertigt, wenn doch alles vorbestimmt ist. Demgegenüber bedeutet Freiheit immer auch Aufgabe und Gestelltsein auf sich selbst; und das Scheitern wird bitterer, wenn man es sich selbst zuschreiben muß.

Wir wollen uns hier, nach einigen allgemeinen Erörterungen, mit der Frage beschäftigen, welche Rolle die Mathematik, insbesondere gewisse Resultate der mathematischen Grundlagenforschung im Disput über den Determinismus spielen (können). Mathematik ist die Sprache, in welcher die Physik ihre Determinationen ausspricht; es zeigt sich aber, daß sie auch prinzipielle Begrenzungen für solche enthält.

3

Es ist naiv, aber nicht ganz falsch, zu glauben, daß überall, wo Mathematik im Spiel ist, auch Determiniertheit sei. Mathematik kann in jedes Spiel kommen, dessen Regeln präzisierbar, also formalisierbar sind. Es gibt eine Mathematik der Gewißheit, aber auch eine der Ungewißheit und des Chaos; schon das zeigt, daß eine mathematische Weltbeschreibung nicht notwendig deterministisch sein muß. In gewisser Weise kann man sogar, und zwar im Rahmen der heutigen Standardtheorie, das Gegenteil behaupten. Nennen wir eine reelle Zahl determiniert, wenn es ein Rechenprogramm gibt, das nach und nach alle ihre Dezimalstellen produziert, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine beliebige reelle Zahl determiniert ist, gleich Null, weil es nur abzählbar viele Programme, aber überabzählbar viele Zahlen gibt ²⁾. Das Undeterminierbare ist in die Grundlagen unserer Mathematik eingebaut, in der Gestalt des Auswahlaxioms.

Andererseits ist jedes mathematische Sprachspiel in dem Sinne determiniert, daß mit der ihm zugrundeliegenden Axiomatik feststeht, welche Sätze des Spiels innerhalb des Spiels beweisbar sind und welche nicht ³⁾. Diese Determiniertheit ist von logischer Natur, eine von Grund und Folge, und toto coelo verschieden von der physikalischen, die auf Ursache und Wirkung beruht. Daß diese sich so oft durch jene darstellen läßt, oder, mit den Worten von Hertz, daß sich Naturnotwendigkeit so oft mit Denknötwendigkeit zur Deckung bringen läßt, ist sicher eine der erstaunlichsten Tatsachen überhaupt. Aber endgültig festzustellen, inwieweit sich das Denken nach den Erscheinungen, oder diese sich nach jenem richten müssen, bleibt eine unabgeschlossene und vom menschlichen Denken in seiner gegenwärtigen kategorialen Verfassung vielleicht gar nicht abschließbare Aufgabe.

Nun gibt es in der Mathematik neben der „formalen“ Determination von wahr und falsch auch eine „inhaltliche“ von Objekten, die in Eindeutigkeitssätzen ihren Ausdruck findet: Objekte können gekennzeichnet werden durch Eigenschaften, die sie haben (sollen). Die einfachste Art der Determination ist im Funktionsbegriff enthalten. Ist R eine zweistellige Relation und folgt aus $R(x,y) \wedge R(x,z)$, daß $y = z$, dann können die y im Erfüllungsbereich der Relation als Funktionen der x aufgefaßt werden, formaliter

$$R(x,y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Wesentlich für den Funktionsbegriff ist also, daß jedem x *genau ein* y zugeordnet ist (was natürlich nicht ausschließt, daß verschiedenen x dasselbe y zugeordnet ist). So ist der Weltzustand W , mathematisch gefaßt als Punkt in einem Phasenraum oder als Element eines Hilbertraums, eine Funktion der Zeit, $W = W(t)$. Das ist noch kein Determinismus, sondern die triviale Feststellung, daß sich die Welt zu jedem Zeitpunkt in einem

5

bestimmten Zustand befindet (und nicht in zweien gleichzeitig). Der Determinismus will, daß der gesamte Wertverlauf von W schon durch einen (jeden) einzelnen Wert $W(t_0)$ festgelegt ist; die Eindeutigkeit bezieht sich also auf die Funktion W . Mathematisch kann Eindeutigkeit von Funktionen auf verschiedene Weisen erzwungen werden. Am einfachsten ist die Forderung, daß die fragliche Funktion einer bestimmten Klasse von Funktionen angehören soll. So kann man eine Gerade durch zwei Punkte festlegen, eine Kreislinie durch drei. Im für uns bedeutsamsten Fall beruht die Determiniertheit auf infinitesimalen Prinzipien. Die „Weltfunktion“ W ist durch jeden ihrer Werte eindeutig bestimmt, wenn die „Entwicklungstendenz“ (die Ableitung nach der Zeit) stets nur von W selbst und t abhängt,

$$dW/dt = f(W,t);$$

denn dann greift, unter milden Voraussetzungen an f , ein Eindeutigkeitssatz für Lösungen von Differentialgleichungen. Im einfachsten Fall ist an jedem Punkt der Ebene eine Tangentenrichtung vorgegeben, und der Satz besagt, daß es genau eine Kurve gibt, die durch einen vorgegebenen Punkt geht und an jedem ihrer Punkte die vorgegebene Tangentenrichtung hat. Das ist intuitiv plausibel: wenn an jedem Punkt des Wegs die Richtung des Weitergehens festliegt, dann ist der ganze Weg durch einen beliebigen Punkt auf ihm festgelegt. Die Determination liegt also wesentlich in der Vorgabe der Richtung.

4

Wie andere extreme Theorien, so Skeptizismus und Solipsismus, kann auch der Determinismus nicht widerlegt werden. Die einzig wirklich stringente Widerlegung würde in dem Nachweis bestehen, daß sich der Weltzustand bei identischen Anfangsbedingungen einmal so und ein anderes Mal anders entwickelt. Offensichtlich ist ein solcher Nachweis aus logischen Gründen unmöglich, denn wir können nicht Personal eines Zustandes sein, den wir als mit einem früheren Zustand identisch erkennen (einfach weil es diese Erkenntnis in dem früheren Zustand nicht gab). Insbesondere kann nie *bewiesen* werden, daß ein Prozeß anders hätte verlaufen können. Aus demselben Grund freilich kann man auch niemanden stringent widerlegen, der behauptet, er hätte anders handeln können als er tat.

Andererseits ist der Determinismus aber auch nicht lebbar. Ohne die Voraussetzung, daß sein von freiem Entschluß geleitetes Handeln seine Zukunft mitbestimmt, kann der Mensch sein Leben gar nicht führen, ebensowenig ohne jede Annahme, etwas zu wissen, oder bei gänzlichem Fehlen eines personalen Gegenüber. Wie absurd der Determinismus ist, wenn man ihn einmal ernst, also wörtlich nimmt, zeigt sich an der (in diesem Kontext neuerdings aufgelebten) Diskussion über Schuld und Strafe. Wenn, mit allem andern, die Tat vorherbestimmt war, dann braucht auch der Richter nicht zu besorgen, daß er etwa eine unverhältnismäßige Strafe verhängt, denn auch das ist ja vorherbestimmt ⁴⁾. Mit jeder irgendwie zielgerichteten Handlung, und sei es das Entkorken einer Weinflasche, zeigt der Determinist, daß er seiner Lehre nicht traut.

Genauer: der Determinismus ist ohne weiteres verträglich mit Aussagen vom Typ „Um Z zu erreichen, muß ich H tun.“ Die Aussage kann wahr sein, gleichgültig ob ich nun H tue und Z erreiche oder nicht. Unter deterministischer Voraussetzung ist *belanglos*, ob die Aussage wahr ist oder nicht. Ich kann aber faktisch die Richtigkeit solcher Aussagen nicht für belanglos halten, wenn ich überhaupt weiterleben will. In diesem Sinne zwingt der Determinismus zu permanentem Selbstwiderspruch: er versichert mir zwar, daß die Wahrheit solcher Aussagen belanglos ist, aber er dispensiert mich nicht davon, sie für belangvoll zu halten, denn nur auf der Grundlage solcher Aussagen kann ich überhaupt handeln. Der Glaube an die Determiniertheit gewährt mir ja noch keine Einsicht in die Determination.

Es ist irrational, an eine Theorie zu glauben, die meine Rationalität zur Illusion erklärt, denn dann sind ja auch die Argumente für die Theorie qua rationes illusionär; das ist der Prototyp eines „performativen Selbstwiderspruchs“ auf epistemischer Ebene. Der Determinismus impliziert etwas Ähnliches im Hinblick auf die Praxis: wenn gestern schon feststand, was ich morgen tun werde, dann ist alle Sorge um mein Handeln überflüssig, damit aber auch die Sorge um das, was ich für wahr halten soll. Das führt zu einem rationale im Stil von Pascals Wette: wenn der Determinismus zutrifft, ist es ohnehin gleichgültig, was man denkt; trifft er aber nicht zu, kann davon viel abhängen; es ist also rational, sich so zu verhalten, als sei er unzutreffend.

5

Die deterministische Auffassung kann verschiedene Wurzeln haben; solche von religiöser oder metaphysischer Art bleiben hier beiseite. Der Determinismus, der heute von der Philosophie diskutiert wird, entspringt dem Physikalismus. Dieser besteht in der Auffassung, daß sich der gesamte Weltprozeß nach Naturgesetzen vollzieht und kausal geschlossen ist, also keine Einwirkung erfährt von irgendetwas, das man dieser Natur mit ihrer Gesetzmäßigkeit nicht zuordnen kann. Die Begriffe von Gesetz und Kausalität sind dabei diejenigen, die im Rahmen der neuzeitlichen Physik, und das heißt mathematisch formuliert werden können.

Ein solcher Physikalismus führt noch nicht zwingend zum Determinismus. Ein Naturgesetz muß ja die zeitliche Entwicklung von Zustandsgrößen oder ganzen Zuständen nicht *determinieren* (paradigmatisch durch eine Differentialgleichung); es kann ja auch lediglich Bedingungen aussprechen, denen diese Entwicklung genügen muß, etwa Erhaltungssätze, die aber noch einen Spielraum lassen. Auch hier könnte man zwischen einer „weichen“ und einer „harten“ Fassung unterscheiden, und auch hier ist die „harte“ die philosophisch interessante. Sie zieht allerdings den Determinismus zwingend nach sich.

6

Wir fragen nun nach dem „Quid iuris?“ des Physikalismus und legen dabei den Standard zugrunde, den die heutige Wissenschaft selbst innerhalb ihres Rahmes zur Geltung bringt. Eine physikalische These (sofern sie überhaupt Aussagen über die Beschaffenheit der

7

Welt macht und nicht bloß, wie derzeit die Stringtheorie, einer Ordnung der Begriffe dient), muß sich bewähren durch gelingende Experimente und erfolgreiche Voraussagen. Es muß nicht ausgeführt werden, daß Experimente und Voraussagen seit Beginn der wissenschaftlichen Neuzeit bei wachsender Präzision einen immer größeren Phänomenbereich umfassen und diese Entwicklung keinerlei Neigung zeigt, nachzulassen. Der Physikalismus ist einfach ihre Extrapolation auf den Bereich *aller* Phänomene, schließlich den Weltprozeß im Ganzen.

Extrapolation ist ein rationales Verfahren, sogar eins der wichtigsten; schon im Sinn einer Theorien-Ökonomie ist es vernünftig, jedes Prinzip, das sich in irgendeinem Bereich bewährt, auch in anderen Bereichen zu erproben. Aber bei allen Extrapolationen ist zu fragen, ob die Basis dafür ausreicht. Wenn man zehnmals gemessen hat, wie lange der Apfel braucht, um zu Boden zu fallen, besteht kein Anlaß zu zweifeln, daß der elfte Fall ebenso lange dauern wird. Fraglich ist aber etwa, ob ein mathematisches Prinzip, das den Tanz von Mückenschwärmen zu beschreiben gestattet, sich auf Fisch- oder Vogelschwärme übertragen läßt. Solche Extrapolationen sind „regional“, auf bestimmte Phänomenbereiche bezogen; die Extrapolation des Physikalismus ist eine absolute. Ich werde jetzt Gründe dafür anführen, daß es dafür keine genügende Basis gibt.

7

Wir setzen an beim Grundbegriff der Kausalität, der ebensowenig als geklärt angesehen werden kann wie der Begriff einer freien Handlung. Die Physik hat ihn längst durch den der Funktionalität ersetzt. Die Mechanik beschreibt, wie sich Massen unter dem Einfluß der Gravitation bewegen, aber sie läßt uns vollständig im Dunkel darüber, wie die Massen „es machen“, daß sie einander anziehen. Und wenn die Physik auch dafür einmal eine Theorie hat („Gravitonen“), wird sich die Fragestellung auf der nächsthöheren Stufe wiederholen.

Offenbar kommen wir aber ohne den Begriff der Kausalität nicht aus, weshalb Kant ihn mit Recht zu kategorialen Rang erhob. Einschlägig für uns ist v. Wrights Analyse kausaler Erklärung, die wir kurz referieren wollen ⁵⁾. Unsere Intuition von Kausalität enthält mehr als die Annahme, daß die Ursache p immer zusammen mit der Wirkung q auftritt. Das könnte kontingent sein, die Intuition enthält aber Notwendigkeit. Logisch approximierbar ist dieses Surplus in Form irrealer Konditionalsätze: wenn p vorgelegen hätte, dann wäre auch q gefolgt. Wo nun die Physik Kausalzusammenhänge behauptet, legt sie eine Hypothese zugrunde, die den Zusammenhang erklärt, und weil sie das Buch der Natur mathematisch liest, hat die Erklärung die Form mathematischer Beziehungen zwischen numerischen Parametern, die zu p, und solchen, die zu q gehören. Die Hypothese wird geprüft, indem man Situationen p experimentell herbeiführt, die zu p gehörenden Parameter *systematisch* variiert und dann nachsieht, ob die zu q gehörenden Parameter sich erwartungsgemäß verändern. Dabei ist wichtig, daß das System hinreichend abgeschlossen ist, so daß die Veränderungen von q nicht noch durch andere Faktoren verursacht werden als die in p schon berücksichtigten. Da solche geschlossenen Systeme in der Natur jedenfalls nicht häufig genug vorkommen, werden notwendigerweise, im Sinn der oben genannten logischen Approximation der

Kausalitätsbeziehung, Situationen hergestellt, von denen man annimmt, *daß sie sich nicht von selbst einstellen würden*. So hängt der Kausalitätsbegriff (genauer: die Verifikation von Kausalität) ab vom Begriff der planmäßig vollzogenen Handlung. „In diesem „Rennen“ zwischen Verursachung und Täterschaft wird letztere immer gewinnen. Es stellt einen logischen Widerspruch dar, wenn man glaubt, daß sich Täterschaft völlig auf Kausalität zurückführen läßt.“⁶⁾

8

Von Wrights Analyse läßt die Möglichkeit des Determinismus offen: die Täterschaft kann immer noch kausal determiniert sein. Der Nachweis davon aber setzt wiederum ein geschlossenes System voraus, von dem der Handelnde ein Bestandteil ist. So entsteht offenbar ein unendlicher Regreß: der Nachweis der Determiniertheit einer Handlung vollzieht sich durch eine „höherstufige“ Handlung, die damit noch nicht als determiniert erwiesen ist. Nie kann der Handelnde sich *gleichzeitig* als Beobachtender und als Handelnder erfassen: „Wenn ich beobachte, *lasse* ich die Dinge geschehen. Wenn ich handle, *mache* ich, daß sie geschehen. Es ist ein begrifflicher Widerspruch, ein und dasselbe Ding in ein und derselben Situation sowohl geschehen zu lassen als auch machen, daß es geschieht.“⁷⁾ Man kann natürlich *glauben*, daß dieser Regreß Stufe für Stufe funktioniert; ich möchte aber wenigstens die nächste Stufe genommen sehen, den Nachweis der Determiniertheit des Nachweises einer Determiniertheit.

Folglich ist auch der Glaube, daß Verursachung eine Bedrohung der Freiheit darstelle, eine Illusion. „Sie wurde genährt durch unsere Neigung – im Geiste Humes, so könnte man sagen – anzunehmen, daß man rein passiv, d.h. einfach dadurch, daß man regelmäßige Abfolgen beobachtet, kausale Verknüpfungen und Ketten von kausal verknüpften Ereignissen registrieren kann, von denen man dann per Extrapolation glaubt, daß sie das Universesum von der unendlich weit entfernten Vergangenheit her bis zu einer unendlich weit entfernten Zukunft hin durchdringen.“⁸⁾ Wohlgemerkt: nach v.Wright ist Verursachung nicht deswegen keine Bedrohung der Freiheit, weil Freiheit und Verursachtheit zusammengehen könnten, sondern weil jeder Nachweis von Verursachung ein Handeln voraussetzt, das (noch) nicht als verursacht erwiesen ist.

Wer einen physikalisch aufwendigen Versuch durchführt, der die Determiniertheit menschlichen Verhaltens beweisen soll, worin ja seine eigene gerade stattfindende experimentelle Aktivität mit all ihren Voraussetzungen eingeschlossen ist, bewegt sich hart am Rand eines „performativen Selbstwiderspruchs“. Er führt absichtsvoll eine komplizierte Situation herbei, von der klar ist, daß sie ohne sein Zutun nicht eintreten würde, glaubt aber gleichzeitig, daß die von ihm verspürte Absicht sozusagen nur das Schlußlicht eines vorweg determinierten Geschehens ist. Das ist, wie gesagt, noch kein *logischer* Widerspruch (eher eine Art intellektueller Todestrieb). Aber die Position des handelnden Menschen wird auf diese Weise gänzlich unverständlich, notdürftig einholbar allenfalls durch Konzeptionen wie Okkasionalismus oder prästabilisierte Harmonie, von denen man doch glauben durfte, daß sie zu den Akten der Philosophiegeschichte gehören.

9

Unser Verständnis von Kausalität berechtigt also nicht zur physikalistischen Extrapolation. Die erfolgreichen Voraussagen beziehen sich, gemäß der Analyse v. Wrights, allesamt auf Phänomene oder Prozesse, die (in guter Näherung wenigstens) als kausal abgeschlossen angesehen und mitsamt ihren Rahmenbedingungen hinreichend gut beobachtet werden können, wie der Fall eines Apfels oder Blasenbahnen in einer Nebelkammer. Das Weltall erfüllt definitionsgemäß die erste Bedingung, aber nicht die zweite.

Allgemeiner wird niemand im Ernst behaupten können, daß wir heute im Besitz eines endgültigen Naturbegriffs seien (die Physik kann ja nicht einmal eindeutig sagen, was sie unter Materie versteht). Unser Wissen von der Natur der Dinge entfaltete sich durch Entdeckung immer neuer Substrukturen; vielleicht gewinnt ja Leibnizens Idee von der unendlichen Schachtelung der Monaden einmal physikalische Dignität, oder die altindische Lehre von der feinstofflichen Seelensubstanz; man erinnere sich, daß auch der Atomismus zu Anfang mehr philosophische Spekulation war als Naturwissenschaft. Wohin solche oder ähnliche Entwicklungen den (physikalischen) Begriff der Determination führen werden, kann niemand absehen. Wird das konzediert, läuft der Physikalismus Gefahr, nichtssagend zu werden. Alles überhaupt Erfahrbare gehört definitionsgemäß zur φύσις, deren Begriff gegebenenfalls neu zu bestimmen ist. Wenn morgen Wundertäter und Hellseher so massenhaft aufträten, daß man sie nicht mehr unter dem Titel „Parapsychologie“ verdrängen kann, würde die Wissenschaft auch das schließlich integrieren; sie wäre dann freilich nicht mehr dieselbe.

Weiter kann man nicht behaupten, daß die mathematische Sprache, in welcher die Wissenschaft von der Natur niederzulegen ist, ihre endgültige Form gefunden habe. Die Grundlage der Physik ist die mathematische Theorie des Raumes, in letzter Instanz also eine Theorie des linearen Kontinuums. Wir besitzen keine solche Theorie, die allen philosophischen Ansprüchen gerecht würde; es ist sogar fraglich, ob eine solche überhaupt möglich ist. Die Standardtheorie der reellen Zahlen leistet viel; so gelingt es ihr, die intuitive Plausibilität des oben erwähnten Eindeutigkeitssatzes durch eine logische Deduktion zu untermauern. Sie hat aber den Makel, daß sie das Kontinuum als Punktmenge faßt, was philosophische Besinnung seit Aristoteles, Leibniz und Kant, aber auch Brouwer, Weyl und Thom als grundverkehrt erkannt hat und woraus eine Reihe von Ungereimheiten entspringt⁹⁾. Sie ist demnach ein mathematisches Modell, das wir der Raum (und Zeit-) Erfahrung unterlegen und das zweifellos irgendwann zu revidieren sein wird. Die apriorischen Züge, welche diese Erfahrungen aufweisen, sind im Modell, das sich immer aufs neue bewähren muß, nur teilweise rekonstruiert; es wäre grotesk, zu behaupten, das Modell sei „die Wahrheit“ über den Raum.

Ein naheliegender Einwand gegen den Determinismus ist die quantenmechanische Unschärfe, welche die Determinierbarkeit der Bewegung einzelner Teilchen im *Rahmen der Quantenmechanik* ausschließt; ein bekannter Satz von J.v. Neumann zeigt die

Unmöglichkeit von „hidden variables“, welche die Determinierung vollständig machen, jedenfalls in Form von Beobachtungsgrößen¹⁰⁾. In der Diskussion um die Handlungsfreiheit ist dagegen vorgebracht worden, daß dieser Indeterminismus keinen Raum für sie schaffen könne, weil ein indeterminierbarer Prozeß nicht zuschreibbar und damit keine freie Handlung sein könne¹¹⁾. Dieser Gegeneinwand ist aber nicht stichhaltig. Die Quantenmechanik macht gar keine Aussagen darüber, wie das von ihr nicht determinierbare Verhalten der Einzelteilchen zustandekommt, sie stellt nur fest, daß die fehlende Determination jedenfalls nicht durch *Beobachtungsgrößen* nachgeliefert werden kann. Die Behauptung „absoluter“ Indeterminierbarkeit wäre eine Absurdität, ist als *wissenschaftliche* Behauptung gar nicht möglich. Wer will, kann immer noch an die „hidden variables“ glauben, er kann sich dafür aber nicht mehr auf die Physik berufen.

Nun ist Indeterminismus im Kleinen durchaus verträglich mit Determiniertheit im Großen, und das mag im Bereich unbelebter Materie der Regelfall sein. Auch wenn wir nicht wissen, wie sich die einzelnen Atome eines Himmelskörpers bewegen, können wir sicher sein, daß der Körper bei seiner Bewegung im Sonnensystem den bekannten Gesetzen gehorcht. Andererseits kann ein einzelnes Teilchen von undeterminierbarem Verhalten eine Kettenreaktion auslösen mit Folgen im Großen. Schon das Gedankenexperiment von Schrödingers Katze zeigt die mögliche kausale Verquickung eines nicht kausal zu verstehenden Mikroprozesses mit einem kausal ablaufenden Makroprozeß¹²⁾. Es ist ohne weiteres denkbar, daß solche Prozesse, die wir also (vorläufig) weder als determiniert noch als freie Handlungen begreifen können, bei der menschlichen Denktätigkeit, insbesondere der unbewußten, eine Rolle spielen.

11

Wir dehnen unsere Attacke aus anhand der altehrwürdigen Schichtenlehre¹³⁾. Selbst wenn es der Physik endlich gelingt, das so lange schon belagerte Problem der Synthese von Makro- und Mikrophysik zu lösen, hat sie damit den Bereich der unbelebten Materie, also die „unterste“ Schicht, noch nicht verlassen. Auf der nächsten Stufe wird sie mit einem womöglich noch schwierigeren Problem konfrontiert, nämlich der Synthese von kausaler und finaler (teleologischer) Determination. Hier gibt es bislang nur „regionale“ Mathematisierungen, nicht einmal eine Vorstellung von einer Einheitswissenschaft, wie sie für das Unbelebte immerhin sinnvoll angestrebt werden kann. Erst recht gilt dies für die nächste Schicht, die des seelischen Lebens¹⁴⁾; was vollends das geistige Leben betrifft, so ist die Mathematik ein Teil, aber keine Theorie von ihm; sie hat es noch nirgends fertiggebracht, dem Geist abzuhorchen, woher er weht oder wie. Weiterhin erscheint die Erwartung plausibel, daß mit dem Aufsteigen mathematischer Methoden der Begriff der Determination sich abschwächt. Schon der Übergang von der Makro- zur Mikrophysik erzwang, daß die Determination der früheren Individuen (Massenpunkte) durch Determination von statistischen Gesamtheiten der neuen Individuen (Elementarteilchen) ersetzt wurde. Der Unterschied hat übrigens eine makroskopische Parallele im Skopus unseres Themas, insofern sich das Verhalten von Menschenmassen oft recht genau vorhersagen läßt (etwa bei Wahlen), nicht aber das Verhalten des Einzelnen darin. Wo schließlich, auf einer höheren Stufe, die Mathematik selbstreferentiell wird (unten mehr dazu), findet sich eine Mathematik der Determinierbarkeit mit Resultaten, die

Nichtdeterminierbarkeit zum Inhalt haben.

12

Die Einwirkung der wissenschaftlich unterbauten Technik auf die Lebenswelt wird nicht nur dadurch größer, daß die Technik sich entwickelt, sondern auch dadurch, daß wir die Lebenswelt ihr anpassen. Demnach kann man sich weiter fragen, ob die Erfolge der determinierenden Wissenschaft nicht auch deswegen so groß erscheinen, weil unsere Wahrnehmung, paralysiert von technischen Leistungen, sich auf die Bereiche fokussiert hat, in denen die Wissenschaft zuständig ist, während sie in anderen verkümmert; das scheint mir der Fall zu sein für die religiöse und künstlerische Erlebnisfähigkeit¹⁵⁾. Nun werden manche gerade das für einen Vorzug oder Fortschritt halten; wenn man aber mit Ranke glaubt, daß alle Zeitalter gleich nahe an der Wahrheit sind („unmittelbar zu Gott“), wird man eher zu der Folgerung gedrängt, daß diese Wahrheit (das Ganze, mit Hegel zu sprechen), eben verschiedene Seiten hat und die Menschheit sich, um ein geometrisches Bild zu gebrauchen, sich ihr nicht geradlinig nähert, sondern sie vielleicht umkreist, wobei schon Errungenes auch wieder verlorengehen kann¹⁶⁾.

Summa: die Basis für die Extrapolation, die der „harte“ physikalisch begründete Determinismus vornimmt, scheint mir nicht ausreichend. Im Ganzen der dem Menschen zugänglichen Erfahrungen ist der determinierbare Teil immer noch ein recht kleiner. Wenn also in der Wissenschaft für irgendetwas kein Platz ist, kann das immer noch daran liegen, daß die Wissenschaft zu eng ist. Und es ist schlicht falsch, zu behaupten, daß in einer Physik, die spontanen, prinzipiell nicht voraussagbaren Zerfall von Atomen kennt, kein Platz für Freiheit sein sollte. Manchmal wünscht man dem Disput mehr von der Bescheidenheit eines Newton, der das, was wir wissen, mit einem Tropfen, und das, was wir nicht wissen, mit einem Ozean verglich.

13

Wenn dieser Befund zutrifft, geht die Beweislast auf den Deterministen über. Er kann nicht einfach voraussetzen, daß der Physikalismus (in seiner heutigen Gestalt) schon der begriffliche Rahmen sei, innerhalb dessen sich menschliches Handeln verstehen lassen müsse. Wenn er andererseits konzidiert, daß es Prozesse gibt, die prinzipiell nicht prognostizierbar sind, läuft er Gefahr, seinen wissenschaftlichen Anspruch preiszugeben; wenigstens muß er Gründe finden, die Forderung nach Prognostizierbarkeit als unsachgemäß zurückzuweisen oder zu relativieren.

Hier kommt nun ein fundamentales Resultat der Logik ins Spiel, nämlich die Unlösbarkeit des Halteproblems für Turingmaschinen. Zu jedem Problem, das sich durch Rechnung lösen läßt, gibt es eine solche Maschine, die in endlich vielen Schritten eine Lösung produziert, *wenn es überhaupt eine gibt*, und dann anhält. Gibt es keine, wird die Maschine endlos weiterarbeiten. Man wird also fragen, ob nicht die Existenz einer Lösung, oder äquivalent dazu das Anhalten der Maschine aus dem Programm der Maschine irgendwie abgelesen werden kann, anders ausgedrückt: ob es eine Maschine gibt, die in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob eine vorgebene Maschine

12

anhalten wird. Das ist das Halteproblem, und die Antwort ist Nein. Auf den ersten Blick scheint es, als ob der Determinist dieses Resultat verwenden könne, um die Forderung nach Voraussagbarkeit zurückzuweisen. Das Resultat zeige ja, daß Determinismus daran nicht geknüpft sei; was bei einem so (relativ) simplen und evident determinierten Vorgang wie dem Abarbeiten eines Programms eintreten könne, müsse man bei strukturell ungleich komplizierteren Prozessen a fortiori zugestehen. Aber die Erwiderung ist leicht: beim Halteproblem ist ja die Determiniertheit vorgegeben, und das Problem ist die Voraussage; wogegen der Determinist die Determiniertheit erst begründen muß.

14

Betrachten wir zunächst makroskopische Prozesse, die nicht prognostizierbar sind, weil die vorauszusagenden Entwicklungen zu empfindlich von den einzugehenden Ausgangsdaten abhängen. Laplace konnte noch glauben, daß wir nur genügend viel Information und Rechenkapazität bräuchten, um den Weltprozeß als die Trajektorie einer Anfangswertaufgabe begreifen zu können. Wir wissen es heute besser, und nicht nur durch die Unschärfe der Quantenmechanik. Wie die nun schon Jahrzehnte andauernde Debatte um das globale Klima zeigt, wird selbst bei einem abgeschlossenen und (heute) beliebig genau beobachtbaren System schnell eine Grenze erreicht, an der die Entwicklung chaotisch und damit in einem präzisierbaren Sinn nicht mehr voraussagbar wird: die Prognose hängt so empfindlich von den Meßwerten der Bestandsaufnahme ab, daß sie unbrauchbar wird, weil es für Meßgenauigkeit untere Schranken gibt. Chaotisches Verhalten gibt es aber schon bei viel einfacheren Systemen, zum Beispiel beim (ebenen) Dreikörperproblem. Noch stringenter ist vielleicht die Billardkugel, die sich nach einem (kräftigen) Stoß auf dem Tisch umherbewegt; für die klassische Mechanik (welche die Kugel als Massenpunkt und alle Stöße als elastisch ansehen würde) ein Exempel von Determination. Man hat aber errechnet, daß schon nach (relativ) wenigen Kontakten mit der Bande die Abhängigkeit vom Anfangsimpuls derart ist, daß die Lage der Oberflächenatome relevant zu werden beginnt, womit der weitere Vorgang der quantenmechanischen Unschärfe verfällt.

Nun haben wir hier, obwohl (nach heutigem Wissen) die genaue Prognose prinzipiell unmöglich ist, keinen Anlaß, am deterministischen Charakter dieser Prozesse zu zweifeln. Nach Kant ¹⁷⁾ können wir sogar solche Prozesse gar nicht anders verstehen als unter der Kategorie der Kausalität, so daß die Determiniertheit hier apriorisch ist und es nur noch darum geht, die spezifische Natur der Determination aufzuklären. Das dabei Erreichte bestätigt dies in überzeugender Weise. Teile oder vereinfachte Formen solcher Prozesse sind durchaus prognostizierbar und bestätigen immer wieder die mathematischen Modelle, die wir ihnen zugrundelegen. Wir haben keinerlei Anhaltspunkt dafür, daß noch andere Kräfte beteiligt sind als diejenigen, die wir in unseren Theorien schon berücksichtigen; ja wir haben nicht einmal eine (wissenschaftsfähige) Vorstellung davon, was für Kräfte das sein könnten. Selbst das Verfehlen des Maximalziels enthält noch Belehrung: unsere Theorien erklären uns, wo und warum die Prognostizierbarkeit Grenzen hat.

13

Während also bei solchen Prozessen die Determiniertheit so gut wie vorgegeben ist und wir sehr erstaunt wären, wenn ein unbelebter Gegenstand spontan eine Kausalitätskette in Gang setzte (wir würden dann vermuten, daß er doch belebt ist), verhält es sich beim menschlichen Verhalten genau umgekehrt. Wo wir versuchen, es zu verstehen, leitet uns nicht der Kausalitätsbegriff der Physik, sondern wir fragen nach den Beweggründen der handelnden Person, also gerade nach dem, was der harte Determinismus für Illusion erklärt, denn für ihn ist die Person mitsamt dem, was sie für ihre Gründe hält, bestenfalls die Oberfläche der wahren Beweggründe. Unsere Bemühungen, Verhalten auf diesem Wege zu verstehen, sind freilich von wechselndem Erfolg, aber in der Regel verstehen wir das Verhalten in dem Maß, in dem wir die Beweggründe verstehen.

Das ist natürlich noch kein sachlicher Einwand gegen den Determinismus, enthält aber den Ansatz zu einem methodischen. Zugegeben: das Sprachspiel von Wille, Beweggründen, Entscheidung, Freiheit und Verantwortung funktioniert nicht so gut wie das physikalische von Meßgrößen und das ihm zugrundeliegende mathematische. Die Begriffe sind nicht scharf (echte Definitionen sind, wie schon Kant feststellte, der Mathematik vorbehalten), die Wahrheitskriterien oft unklar. Aber es funktioniert doch so gut, daß es mit seiner Hilfe möglich ist, menschliches Zusammenleben einigermaßen zu ordnen, was nichts Geringes ist. Das wäre kaum verständlich, wenn jene Grundbegriffe von gänzlich illusionärem Charakter wären. Wenn ein Sprachspiel für die Bewältigung einer Sache etwas leistet, ist es rational, anzunehmen, daß „etwas daran ist“, daß es, mit einem passenden mathematischen Ausdruck, wenigstens so etwas wie ein homomorphes Bild dieser Sache enthält¹⁸⁾. Mit Kant und Wittgenstein: wir haben nie die Sachen selbst, wir haben nichts anderes, um unsere Erfahrungen von den Sachen zu ordnen, als funktionierende Sprachspiele.

Wo die Wissenschaft sich anheischig macht, eine so tief verwurzelte, kaum zu hintergehende Evidenz wie die vom freien Handeln zu destruieren, kommt sie um experimentelle Demonstration nicht herum; es ist kaum denkbar, daß die theoretischen Argumente, die sie vorbringen kann, zwingender sind als jene Evidenz. Bevor ich zweifle, daß ich mich vom Schreibtisch erheben kann, wann *ich* will, werde ich die Korrektheit oder Adäquatheit jedes mathematischen Modells bezweifeln, das mein Aufstehen oder Sitzenbleiben determinieren soll, oder die Interpretation entsprechender Experimente; wahrscheinlich wäre ich sogar eher zu der Annahme bereit, daß die Zahlentheorie Widersprüche enthält. Wenn man vor die Wahl gestellt wird, von zwei Prinzipien eines preiszugeben, wird man dasjenige fahrenlassen, welches als das weniger fundamentale erscheint; das ist ein vollkommen rationales Verfahren.

Das experimentum crucis kann hier nur in erfolgreicher Voraussage bestehen, und zwar für lebensweltlich relevante Situationen. Versuchsanordnungen wie die von Libet, die zeigen sollen, daß dem bewußten Entschluß zur Handlung ein vorbewußter, aber physikalisch feststellbarer Entscheidungsprozeß voranging, werden immer dem Zweifel

daran ausgesetzt bleiben, daß das Festgestellte wirklich der Entscheidungsprozeß war, oder daß nicht einfach ein post hoc für ein propter hoc genommen wird. Auch kann das bloße Drücken eines Knopfs (als Basishandlung im Sinn v. Wrights), ohne weitere Folgen oder Bezug zur Person, kaum als repräsentative Handlung angesehen werden. Wenn es keinen Grund gibt, den Knopf zu einem *bestimmten* Zeitpunkt zu drücken, kann das Experiment auch nichts aussagen über die Rolle von Gründen beim Handeln.

Das hier zu fordernde *experimentum crucis* gehört nun aber definitiv in den Bereich der Science Fiction. Die Gedankengänge und Handlungen eines durchschnittlichen Erwachsenen, sagen wir innerhalb eines Tagesablaufs, sind von ungleich größerer Komplexität als die oben genannten Fälle, können vor allem nicht – in einem kontrollierbaren Sinn – als abgeschlossenes Ganzes betrachtet werden. Jeder weiß, wie kaum merkliche, kaum benennbare Ursachen die größten Folgen für weitreichende Entschlüsse, ja ganze Lebensläufe haben können; man müßte alles mitdeterminieren, was auf die zu determinierende Person einen Einfluß ausüben kann¹⁹⁾. Vor allem aber scheitert ein solches Unternehmen an der Selbstreferentialität des Diskurses. Wenn A wirklich prognostizieren kann, daß B die Handlung H ausführen wird, dann darf sich daran auch dadurch nichts ändern, daß er B davon Mitteilung macht, ja nicht einmal dadurch, daß er B an H zu hindern sucht²⁰⁾. Nun gibt es selbst dafür Beispiele im Sinne des „weichen“ Determinismus. Jeder kennt den Mythos von Ödipus, dem gerade zum Verhängnis wird, daß er der Prophezeiung des Orakels ausweichen möchte. Auch an Goethes „So mußt du sein, dir kannst du nicht entfliehen“ mag man hier denken. Auf der Ebene grauen Alltags kann man einem Suchtkranken nur allzu oft den Rückfall voraussagen. Aber Weisheit des Mythos ist ein Ding, Lebenserfahrung ein zweites, raumzeitliche Determinierung ein drittes. Das Szenario wird hier so grotesk, daß es nicht weiter diskutiert werden muß; aber es ergibt sich zwingend, wenn die Determination menschlichen Handelns auf lebensrelevanter Ebene durch Prognosen erhärtet werden soll.

17

Besonderen Auftrieb hat der Determinismus in den letzten Jahrzehnten durch neurophysiologische Experimente erhalten, die darauf hinzuweisen scheinen, daß unser bewußtes Denken nichts anderes ist ein Reflex oder Nachhall, ein „Epiphänomen“ von Gehirnprozessen. Daß die schon erwähnten Libet-Experimente, die am Anfang dieser Entwicklung standen, eine solche Folgerung nicht hergeben, ist mittlerweile erkannt worden²¹⁾. Wir legen uns die Frage vor, welche Bedeutung den Resultaten der mathematischen Grundlagenforschung in diesem Kontext zukommt.

Daß jede Denktätigkeit mit einer Gehirntätigkeit einhergeht, wird heute kaum jemand mehr bestreiten²²⁾. Der Konsequenz ist dann kaum auszuweichen, daß auch die Denkinhalte (darunter Gedanken im Sinn von Frege) mit den Formen dieser Prozesse korreliert sind. Die Hirnforschung ist heute soweit, daß sie verschiedenen Typen gedanklicher Operationen verschiedene Hirnareale zuordnen kann, die dabei besonders aktiv sind. Die Frage ist, wie weit die Korrelation geht. Die epiphänomenalistische oder Reflex-Auffassung wird zu der Konsequenz genötigt, daß die Korrelation eine mathematisch exakte ist, also eine *strukturtreue*, damit auch *injektive* Abbildung

15

(D) {Denkprozesse} → {Hirnprozesse}

impliziert. Denn wenn es Unterschiede von Gedanken gäbe, die sich nicht in Unterschieden der zugeordneten Prozesse widerspiegeln, ließe sich geltend machen, daß die Gedanken wenigstens einen Rest von „Eigenleben“ haben, der physiologisch nicht faßbar bleibt. Insbesondere muß jede vom menschlichen Denken überhaupt nachvollziehbare begriffliche Struktur eine genaue Entsprechung in kombinatorischen Strukturen von Hirnzellen und –Prozessen haben. Damit liegt nun ein Konflikt mit Resultaten der mathematischen Logik verdächtig nahe.

18

Nun braucht die bloße Existenz von Unvollständigkeits- oder Unentscheidbarkeitssätzen den Physiologen zunächst nicht zu beunruhigen. Darin könnte sich ja einfach die Tatsache spiegeln, daß gewisse Prozesse eben physikalisch unmöglich sind, und das ist nichts Besonderes. So betrachtet werfen Gödels Sätze kein größeres Problem auf als die Tatsache, daß man mit Springer und König allein nicht mattsetzen kann. Ernst wird die Lage aber dadurch, daß eine physikalistisch ausweisbare Theorie, welche Gedanken mit Hirnprozessen korreliert, selbst mathematisch formulierbar sein muß und damit in den Skopus der genannten Sätze gerät. Will sie gebührend sachhaltig sein, muß sie die Theorie der natürlichen Zahlen (Peanoarithmetik) enthalten, will sie praktische Relevanz beanspruchen, muß sie rekursiv axiomatisierbar ²³⁾ sein. Notwendigerweise enthält sie dann selbst unentscheidbare Sätze.

Zunächst scheint es, daß auch dies den Physiologen nicht beirren muß. Er könnte erstens darauf verweisen, daß viele Unentscheidbarkeitsresultate einen artifiziellen, durch irgendeine Form von Selbstreferentialität zustandekommenden Charakter aufweisen, wie er bei einschlägigen Fragen bisher nicht aufgetreten ist. Der Prototyp ist die Formel, mit der Gödel seinen (ersten) Unvollständigkeitssatz bewies, und die, informell gesprochen, ihre eigene Unbeweisbarkeit aussagt. In der Zahlentheorie, der entwickeltsten aller mathematischen Disziplinen, sind derartige Formeln bisher nicht aufgetreten. Zweitens könnte er darauf verweisen, daß solche Resultate selbst da, wo sie einen „einschlägigen“ Charakter haben, die zuständige Forschung nicht beeinträchtigt haben. Die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese, eine mengentheoretisch fundamentale Frage, hat die Analysis und Topologie (soweit ich sehe) kaum tangiert, obwohl man das von der Sache her hätte vermuten können, ist doch der reelle Zahlkörper ihre Grundlage; schon gar nicht ist die Physik betroffen, die von diesen abhängt. Die Unlösbarkeit des Wortproblems hat die Gruppentheoretiker veranlaßt, nach Klassen von Gruppen mit entscheidbarem Wortproblem zu suchen (und damit der Theorie, statt sie zu bremsen, eine neue Aufgabe gegeben).

19

Diese Tatsachen sind hier aber nicht ausschlaggebend. Die Verbindung von Selbstreferentialität und Negation, wie sie der Unentscheidbarkeitsformel (wie auch den meisten Paradoxa) zugrundeliegt, ist in der Tat für die Zahlentheorie fernliegend (ihre

16

Gödelisierung wäre auch von enormer Komplexität), aber für eine Theorie, die bewußtes Denken zum Gegenstand hat, geradezu konstitutiv. Selbstreferentialität gehört zu den definientia von Bewußtheit, und die Negation ist der theoretische Akt par excellence, mit dem sich das Denken vom bloßen Registrieren des unmittelbar Erlebten emanzipiert und Vorhandenes mit Nichtvorhandenem in Beziehung setzt. Wie leicht es ist, aus beiden eine Formel vom Typ des Lügnerparadoxons zu bilden, illustriert das folgende Beispiel ²⁴⁾.

Wir bilden Ausdrücke (Worte) aus dem Alphabet mit den Symbolen \neg , E, M, (,), wobei das Symbol \neg für „nicht“ steht. Die Ausdrücke nennen wir *Gedanken*. Zu jedem Gedanken G bezeichne G(G) den Gedanken, der G „zum Gegenstand hat“ (mit Husserl das „eingeklammerte“ G); dieser hat den Namen M(G) (für „Metagedanke“). Das Symbol E bezeichne irgendeine Eigenschaft, und EG bedeute, daß der Gedanke G diese Eigenschaft besitzt. Als Sätze bezeichnen wir alle Ausdrücke der Form EG und EM(G) sowie ihre Negationen; Sätze können wahr oder falsch sein. Nun betrachten wir den Satz

(G) $\neg EM(\neg EM)$.

G ist falsch genau dann, wenn $EM(\neg EM)$ wahr ist (wir benutzen gewöhnliche Logik). Dies bedeutet, daß der Metagedanke von $\neg EM$ die Eigenschaft E hat. Der Metagedanke von $\neg EM$ ist aber G. Demnach ist G wahr genau dann, wenn G die Eigenschaft E *nicht* hat. Nun könnte E etwa die Eigenschaft bedeuten, durch einen Hirnprozeß darstellbar zu sein ²⁵⁾, und es ergibt sich die absurde Konsequenz, daß diese Darstellbarkeit von der Wahrheit abhängt. Das kann nicht im Sinne einer physiologischen Theorie der Gedanken sein, für die eine solche Darstellbarkeit natürlich mit der Wahrheit der dargestellten Gedanken nichts zu tun haben darf. Mir scheint das ein starker Hinweis darauf zu sein, daß eine solche Theorie sich auf Gedankengefüge von einfacher Natur wird beschränken müssen, formallogisch gesprochen vielleicht auf solche, die entscheidbaren Theorien angehören.

20

Nun hat die Reflexthese, für sich genommen, mit Determinismus nichts zu tun; sie impliziert nur, daß die Gedanken ebenso viel oder wenig determiniert sind wie die Hirnprozesse. Bei diesen freilich erscheint die Determiniertheit viel leichter vorstellbar als bei jenen, ja geradezu selbstverständlich, erscheint doch das Gehirn als ein zwar kompliziertes, aber doch prinzipiell überschaubares und auf prinzipiell überschaubare Weise mit dem Leib und der Umgebung vernetztes Organ, dessen Struktur und Funktionsweise sich uns immer mehr enthüllt; so daß sich kaum noch denken läßt, daß irgendetwas in ihm *nicht* nach Naturgesetzen geschieht. Daher erscheint die Reflexthese als geeignet, die Handlungsfreiheit als Illusion zu erweisen und damit den Determinismus in der für uns wichtigsten Instanz wahrscheinlich zu machen ²⁶⁾.

Wir drehen nun den Spieß um und zeigen, daß die Reflexthese, wenn sie wahr ist, im Gegenteil den Determinismus destruiert. Der physikalistische Determinist betrachtet das Gehirn notwendig als eine Maschine, die Eingaben in Ausgaben umsetzt; Eingaben sind

etwa Umgebungsreize, Körpersignale, spontan aktivierte Gedanken, Ausgaben etwa Handlungsimpulse und gespeicherte Informationen. Entsprechendes muß dann für die „Teilmaschine“ gelten, die das besorgt, was uns – voraussetzungsgemäß – als gedanklicher Reflex erscheint. Da die Reflexthese aber eine strukturtreue Abbildung der Gedankengänge in Hirnprozesse impliziert, folgt daraus, daß auch das menschliche Denken als Maschine funktioniert. Daß diese Auffassung aber nicht haltbar ist, hat Lucas unter Berufung auf den (ersten) Gödelschen Unvollständigkeitssatz dargelegt ²⁷⁾.

21

Das zentrale Argument läuft darauf hinaus, daß das Denken *jede* Handlung, die es vollzieht, „einklammern“ und zum Objekt einer neuen Denkhandlung machen kann, die im Sinn der Typentheorie einer höheren Stufe angehört als die ursprüngliche; es kann jede seiner Handlungen auf einen *Begriff* bringen und damit als Element einer Klasse von Handlungen begreifen; in diesem Sinne ist ihm immer eine „Außenperspektive“ verfügbar. Nun kann auch eine Maschine fähig sein, aus ihren eigenen Operationen gewissermaßen Folgerungen zu ziehen; das tut schon ein Münzautomat, der eine falsche Münze erkennt und daraufhin zurückweist. Er ist aber nicht imstande, diese Operationen des Erkennens und Zurückweisens selbst zu prozessieren, also als Eingaben zu einer „höherstufigen“ Operation zu verarbeiten. Man kann ihn dazu bringen, indem man etwa ein „Metaprogramm“ installiert, welches ihn bei zu großer Häufigkeit des Zurückweisens seinen Betrieb einstellen läßt. Damit hat man das „Reflexionsniveau“ der Maschine in der Tat erhöht, und nichts spricht dagegen, daß man es beliebig weiter erhöhen kann; aber solange die Maschine eine Maschine bleibt, mit einem endlichen, bei Inbetriebnahme fertig vorliegenden Programm, wird es immer eine höchste Operationsebene geben, zu der sie keine Metaebene mehr hat. Das Denken aber hat eine solche jederzeit; auch wo ein Sachverhalt nicht mehr sinnvoll hinterfragt werden kann, gibt es immer noch einen Begriff von ihm, und noch das Einklammern kann eingeklammert werden.

Der Beweis des (ersten) Unvollständigkeitssatzes zeigt exemplarisch die Rolle der Außenperspektive. Die Peanonarithmetik (PA) ist, für sich genommen, nur eine Sprache; man kann von *Beweisbarkeit* in PA sprechen, und die Gödelisierung erzeugt soviel Selbstreferentialität, daß man *in* PA von Beweisbarkeit in PA sprechen kann. Aber der Beweis der Unentscheidbarkeit der Gödelformel vollzieht sich durch Vergleich des syntaktischen Systems PA mit seinem Standardmodell; das ist die Außenperspektive, die erst erlaubt, von *Wahrheit* eines PA-Satzes zu sprechen. Gleichzeitig hat dieses Beispiel einen universellen Charakter: nach der Church-Turing-These ist jede überhaupt in irgendeinem Sinne berechenbare Funktion durch eine Turingmaschine berechenbar, äquivalent dazu durch eine rekursive Funktion oder eine solche, die in PA definiert werden kann. Damit erhalten wir eine mathematische Präzisierung der Aussage, daß dem Denken immer eine „höhere“ oder Außenperspektive zur Verfügung steht. Grob gesagt: alles Maschinenmäßige läßt sich in PA unterbringen, und dazu haben wir eine Außenperspektive. The mind will have the last word, wie Lucas es ausdrückte. (Man bemerkt die Analogie zu dem Resultat v. Wrights über den Ausgang des Rennens zwischen Kausalität und Täterschaft).

Besonders durchsichtig ist die logische Situation beim Turing-Test. Ein (menschlicher) Prüfer befragt einen für ihn unsichtbaren Probanden und soll allein anhand von dessen Antworten herausfinden, ob es sich um einen Menschen oder eine Maschine handelt. Die Frage ist also, ob eine Maschine so programmiert werden kann, daß ein Prüfer sie nicht als solche erkennt. Man stelle sich dabei vor, daß an dem Programm nicht nur Logiker und Linguisten mitgearbeitet haben, sondern auch Philosophen, Psychologen, Soziologen, Dramaturgen, Künstler, kurz eine Armee von Menschenkundigen, die dafür gesorgt haben, daß kein Aspekt des Humanen unberücksichtigt geblieben ist, daß aber auch, vermittels zufällig gestreuter Anomalien, der Anschein außermenschlicher Perfektion vermieden wird.

Die Karten scheinen fair verteilt: der Prüfer, als ein endliches Wesen, kann im Lauf des Examens nur endlich viele Fragen stellen ²⁸⁾, und der Automat, seinerseits endlich, kann nur auf endlich viele vorbereitet sein. Aber das Programm liegt beim Beginn des Tests fertig vor und kann sich nicht mehr verändern ²⁹⁾; der Prüfer aber, auch wenn er nur endlich viele Fragen stellen kann, kann doch zu jeder vorgelegten endlichen Fragenmenge eine neue Frage bilden (z.B. „Sind das alle Fragen?“) und hat damit immer eine Chance, den Automaten zu entlarven. Den Ausschlag gibt hier also die Asymmetrie zwischen dem abgeschlossenen Programm und der prinzipiellen Offenheit des menschlichen Denkens.

Logisch betrachtet, liegt eine Quantorenvertauschung ³⁰⁾ vor: auf jede Frage des Prüfers kann der Automat vorbereitet sein, aber zu jeder Menge eingeplanter Fragen gibt es eine nicht eingeplante, die der Prüfer stellen kann. Das läßt sich verallgemeinern: jede Denkfunktion, die hinreichend präzisiert werden kann, kann auch formalisiert und damit mechanisiert werden; das Entsprechende gilt für alle Sachverhalte und Prozesse überhaupt. Aber auch wenn alles formalisiert werden kann, gibt es keinen Formalismus für alles; auch wenn jeder Einzelprozeß automatisch ist, folgt noch nicht, daß es einen Automatismus für die Gesamtheit der Prozesse gibt.

Es gibt demnach nur zwei Möglichkeiten: entweder die Reflexthese ist falsch, und der deterministischen Auffassung der Denkprozesse wird zumindest die Begründbarkeit durch neurophysiologische Experimente entzogen. Oder sie ist wahr, dann ist das Gehirn keine Maschine, und jene Auffassung ist falsch.

Der Einwand scheint nahezuliegen, daß die Gehirnmaschine eben viel komplexer ist als alle auch vom mathematischen Denken bisher in Betracht gezogenen. Aber das trüfe nicht den Kern des Gedankens: Gödels Argument beruht nicht etwa darauf, daß wir PA *überschauen*; der Beweis benutzt nur elementare Aussagen über Zahlen (wenngleich mit großem Scharfsinn); er zeigt ja gerade, daß die in der Tat überschaubare Axiomatik von PA eine prinzipiell unüberschaubare Menge von Folgerungen in sich schließt.

Dennoch kann man natürlich fragen, ob der mathematische Begriff von Maschine der Gehirnmaschine gerecht wird. Die Church-Turing-These, die wir oben benutzt haben, kann aber beträchtliche Evidenz beanspruchen. Erstens hat sich bisher jede überhaupt berechenbare Funktion als Turing-berechenbar herausgestellt. Zweitens (und bedeutsamer) hat sich gezeigt, daß ganz verschiedene Ansätze, den Begriff der Berechenbarkeit mathematisch zu präzisieren, alle zu derselben Klasse berechenbarer Funktionen geführt haben ³¹⁾. Und wenn es einmal einen erweiterten Begriff von Berechenbarkeit geben sollte, dann wird damit auch ein erweiterter, also schwächerer Begriff von Determination verbunden sein.

Der am ehesten angreifbare Punkt der Argumentation ist sicherlich die Einbettung (D) der Denkprozesse in Hirnprozesse und ihre Interpretation. Natürlich wäre absurd, der Reflexthese die Folgerung aufzubürden, daß das gesamte Fregesche Gedankenreich als Konstellation irgendwelcher materiellen Bestandteile des Gehirns realisiert sei. Wohl aber muß das für einzelne Gedankenketten gelten, mit denen der Denkende so vertraut ist, daß er alle ihre Teile oder Schritte jederzeit in seine Vorstellung rufen kann. Wie oben angedeutet, ist der Beweis des Gödelschen Satzes dafür keineswegs zu kompliziert. Ersichtlich wird hierbei das Problem virulent, den Denkprozeß im Ganzen, von dem die mathematischen Symbole ja nur eine Art Kristallisation sind, erst einmal phänomenologisch adäquat wiederzugeben, insbesondere das Wechselspiel von φαντασµατα und Begriffen. Das Gehirn denkt mit Bildern und Symbolen, deren physiologische Repräsentation natürlich kein (grundsätzliches) Problem aufwirft; aber die Interpretation der Bilder läuft sozusagen im Hintergrund immer mit ³²⁾.

24

Alle Introspektion wird an einem bestimmten Punkt diffus und gewährt keinen klaren Aufschluß mehr; das Zustandekommen eines Einfalls läßt sich ebensowenig beobachten wie das eines Entschlusses. Wir kommen in Verlegenheit, wenn wir bestimmen sollen, wann genau und in welcher Weise wir beim Fassen eines Entschlusses unseren freien Willen betätigt haben ³³⁾. In der Regel können wir nur einen terminus post quem und einen ante quem benennen; wir erinnern uns vielleicht an unser Zögern und unsere Erwägungen, wissen andererseits, daß wir jetzt so und so entschlossen sind. Der Entscheidungsprozeß springt sozusagen über unseren Kopf weg, hängt aber ab von dem, was zuvor in diesem Kopf vor sich ging. Mathematisch: der Grad der Entschließung, als Funktion der Zeit, ist unstetig oder hat eine Definitionslücke.

Als ideales Ziel erscheint, die Innenperspektive, den privilegierten Zugang, mit der Außenperspektive, dem objektivierbaren Zugang zur Deckung zu bringen, das Denken als Erlebnis mit dem Denken als Erscheinung im Sinne Kants. Die Synthese ist sicher nicht in actu möglich, wir wiederholen: „Wenn ich beobachte, *lasse* ich die Dinge geschehen. Wenn ich handle, *mache* ich, daß sie geschehen. Es ist ein begrifflicher Widerspruch, ein und dasselbe Ding in ein und derselben Situation sowohl geschehen zu lassen als auch zu machen, daß es geschieht“. Denkbar ist also höchstens eine Synthese der Resultate. Vielleicht ist aber das vernünftigeres Ziel, die wechselseitige Begrenzung der beiden Perspektiven zu verstehen.

20

Je tiefer man gräbt, desto undeutlicher wird das eigentliche movens des Geschehens, desto mehr verschwimmen die Grenzen von Freiheit und Notwendigkeit. Vielleicht bezeichnen beide Begriffe nur Aspekte eines Geschehens, von dem wir keinen Begriff haben, so daß sie als Gegensätze erscheinen, ähnlich wie Verdienst und Glück in Mephistos bekanntem Ausspruch.

Epilog: Exerccitium pro lectore

Finden Sie die Argumentationsfehler im Prolog.

Anmerkungen und Nachweise

(1) Über die Frage, ob Determinismus und Freiheit, richtig verstanden, tatsächlich unvereinbar sind, gibt es eine umfangreiche, bereits in der Spätantike unter religiösen Vorzeichen anhebende Diskussion (Gottes Allwissenheit vs. menschliche Sündenfähigkeit). Einen Überblick über die moderne Diskussion (unter dem Stichwort „Kompatibilismusproblem“) gibt M.Pauen, Illusion Freiheit?, Frankfurt/M 2006.

(2) Jede abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} hat das Lebesguemaß Null. Hier stellt sich natürlich die Frage, was denn eine „beliebige“ Zahl ist. Unter Heranziehung der Unlösbarkeit des Halteproblems (siehe unten) kann man, wenn auch (notwendigerweise) auf sehr indirekte Weise, nicht berechenbare Zahlen wirklich angeben; siehe G.Chaitin, The Limits of Mathematics, London 2003, S.14 ff.

(3) Das ist eine Meta-Aussage, die einfach auf dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten beruht, und nicht zu verwechseln mit Vollständigkeit im Sinn der Prädikatenlogik.

(4) Dieses Argument kannten schon die Stoiker.

(5) G.H.v.Wright, Erklären und Verstehen, Athenäum-Verlag, Königsstein, 1974.

(6) v.Wright, a.a.O. S.81.

(7) v.Wright, a.a.O. S.120. Es ist bemerkenswert, daß v.Wright ein Experiment vom Libetschen Typ diskutiert, lange bevor es durchgeführt wurde. Er entwickelt dabei die kühne Idee von einer rückwirkenden Verursachung (S.78). Um sie durchzuführen, müßte man allerdings den kantischen Konstruktivismus bezüglich der Zeit ernst nehmen. (Kant wird in v.Wrights Buch mit lautem Stillschweigen übergangen.)

- (8) v.Wright, a.a.O. S.82.
- (9) Für Näheres siehe meine „Mathematik für Philosophen“, Leipzig 2004, 8.6.; ausführlicher in meinen Vorlesungen über „Mathematische Modelle des Kontinuums“, Hamburger Beitr. z. Math. Nr. 86 (2000)
- (10) Für eine mathematisch pointierte Darstellung siehe Y.Manin, A Course in Mathematical Logic, Springer-Verlag 1977.
- (11) Goschke/Walter in C.S.Hermann e.a. [Hg.], Bewußtsein, München 2005, S.88.
- (12) Siehe die Diskussion bei C.F.v.Weizsäcker, Aufbau der Physik, München 1985, S. 541f.
- (13) Die Schichten sind Unbelebt – Belebt – Seelisch – Geistig; zuletzt von N.Hartmann in größerem Stil ausgearbeitet („Der Aufbau der realen Welt“, Berlin 1964). Der Grundgedanke ist aber alt und findet sich z.B. schon bei Dionysios Areopagita; siehe hierzu J.Hirschberger, Geschichte der Philosophie, Frankft./M o.J., S.392. Sie dient uns hier nur als Leitfaden, nicht als Doktrin.
- (14) Siehe dazu meine Arbeit „Mathematik und Psychoanalyse: Versuche einer Annäherung“, Hamburger Beitr. z. Math. 2008
- (15) Für die erstere siehe R.Otto, Das Heilige, München 1987.
- (16) Für Erwägungen solcher Art ist Heideggers Lagebeurteilung ein brauchbarer Ausgangspunkt (Die Frage nach der Technik, in: Vorträge und Aufsätze, Pfullingen 1954). Einen Gedanken, der mich nicht losläßt (ich habe ihn von Wilhelm Worringer), will ich nicht übergehen: Zwischen dem ersten Auftreten des Homo Sapiens und den ersten heute bekannten Hochkulturen liegen ungeheure Zeiträume. Betrachtet man das Tempo der Entwicklung in den letzten 5000 Jahren, wird es schwer vorstellbar, daß in jenen Zeiträumen der Mensch primitiv geblieben sein soll. Vielleicht gab es in ihnen schon Hochkulturen, von denen sich nur deswegen nichts erhalten hat, weil sie andere Prioritäten hatten als die Bewältigung von Natur und Dingen.
- (17) Zweite Analogie der Erfahrung, KrV B 232ff.
- (18) Das scheint mir der *richtige* Sinn des „anything goes“.
- (19) Nach Kants Dritter Analogie (B 256 ff) also alles, denn alles steht in „durchgängiger Wechselwirkung“.
- (20) Vgl. dazu D.M. MacKay, Freedom of Action, Mind 69 (1960), S.31-40. MacKay sucht mit rein logischen Mitteln die These zu entkräften, daß Hirnprozesse vorhersagbar seien. Dabei begründet er den „need for secrecy“ folgendermaßen: „His prediction, to be successful, must allow for any relevant effects its formulation and communication will

have on my brain; but these effects could not all in general be calculated unless the prediction itself were already known, so that in general the exact calculation can never be completed.“ Das scheint mir nicht stichhaltig: warum soll die Voraussage nicht die Reaktion auf eine Mitteilung einschließen? Wenn sie auch nur rudimentär denkbar sein soll, dann wird sie dazu imstande sein *müssen*.

(21) Siehe die Diskussion in M.Pauen (Anm.1).

(22) Das folgt auch aus den „Dependenzgesetzen“ nach N.Hartmann: jede Schicht hat alle niederen als notwendige „Grundlage“. Dionysios freilich benötigte im Sinne der Emanationslehre körperlose Geister.

(23) Rekursive Axiomatik ist eine notwendige Voraussetzung der Gödelschen Sätze, was oft übersehen wird. Aus dem Zornschen Lemma folgt die Existenz maximaler konsistenter Formelmengen in PA; nimmt man eine solche als Axiomensystem, erhält man eine vollständige Theorie, wie leicht zu sehen ist. In einer physikalischen Theorie hat eine solche, als eine quasi-theologische Annahme, natürlich keinen Platz.

(24) Adaptiert nach R.Smullyan, Gödels Incompleteness Theorems, Oxford UP 1992.

(25) Ist E die Eigenschaft, beweisbar zu sein, ergibt sich, daß G genau dann wahr ist, wenn G unbeweisbar ist, also entweder wahr und unbeweisbar oder falsch und beweisbar. Wenn Beweisbares nicht falsch sein kann, ergibt sich die Existenz von Wahrem, das unbeweisbar ist. Das ist der logische Kern im Beweis des Unvollständigkeitssatzes.

(26) Die Schlußfolgerung, daß, wenn *wir* determiniert sind, auch alles andere determiniert ist, ist natürlich nicht zwingend und wird von einem religiös motivierten Determinismus auch nicht gezogen.

(27) J.R.Lucas, Minds, Machines and Gödel, in Philosophy 36 (1961), 112-127.

(28) Endlich viele „bis auf Struktur“, von Zahlenvariablen einmal abgesehen; das muß ich wohl nicht präzisieren.

(29) Lernfähigkeit der Maschine gehört natürlich selbst zum Programm.

(30) Abstrakt: $\exists x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$. Die umgekehrte Implikation ist natürlich falsch.

(31) Siehe die Diskussion in meiner „Mathematik für Philosophen“ (Anm. 9) , 18.3.

(32) Für eine kleine Phänomenologie des mathematischen Denkens siehe meinen Aufsatz „Über die Anschauung in der Mathematik“, Phil.Nat. 35 (1998), 309-331.

(33) In der Manier von Wittgenstein: „Schau zu, wie du dich entscheidest – legst du innerlich einen Schalter um? Und wenn es so ist, was lehrt uns das?“

