Hamburger Beiträge zur Mathematik

Nr. 378 / Mai 2010

Über Innen und Außen: philosophisch-mathematische Streifzüge

von Ernst Kleinert

Über Innen und Außen: philosophisch-mathematische Streifzüge

1

Alle räumlichen Grundbestimmungen, wie vorn und hinten, über und unter, neben und zwischen, haben über ihre primäre Bedeutung hinaus Eingang in Metaphorik gefunden. Die am meisten fundamentalen unter ihnen sind das Innen und Außen; entsprechend reichhaltig ist die Varietät ihrer metaphorischen Verwendungen. Die einschlägige Mathematik bleibt dahinter nicht zurück; freilich folgt ihre Entfaltung andern Gesetzen. Metaphorische Entfaltung ist Ausbreitung: der Sinn erobert sich neue Bereiche und verwandelt sich dabei; mathematische ist Entwicklung: der ursprüngliche Sinn bleibt unverändert erhalten, wird aber mit immer mehr „Struktur“ angereichert. Zwar entstammen dabei die Grundbegriffe und -Gesetze der kategorialen Verfassung, lose gesprochen unserer Lebenswelt und unseren Möglichkeiten, uns begrifflich auf sie zu beziehen. Aber ihre mathematische Isolierung (in einer geeigneten Axiomatik) führt sogleich zu Problemen ganz eigener Art, und noch niemand hat ganz begriffen, wie es geschehen kann, daß ihre scheinbar abgehobene Entwicklung doch wieder, über wissenschaftlich-technische Anwendungen, in die Welt zurückkehrt. Wenn daher auf den folgenden Seiten versucht werden soll, mathematische und außermathematische Aspekte des Innen und Außen in Beziehung zu setzen, ist sogleich zu fragen, was von einem solchen Unternehmen erwartet werden kann. Sicher keine Anwendungen im üblichen Sinn, vielleicht etwas mehr Ordnung der Begriffe; vielleicht aber auch nur jenen Nutzen, den die Mathematik nach Lichtenberg einem bel esprit gewähren kann [1].

2

Unser Thema hat philosophische Aspekte von der Art, die seit Platon zur γιγαντομαχια περι τησ ουσιασ gehört. Wie ein Riß durch eine Felswand geht durch das abendländische Denken die Unterscheidung von Innen- und Außenwelt und damit die Frage nach dem Verhältnis beider zueinander, mit allen ontologischen, epistemologischen, ethischen Konsequenzen. Nachdem eine große Zahl von Möglichkeiten, darunter sehr konträre, durchgearbeitet war, konnte es sogar scheinen, daß die Frage von falschen Voraussetzungen ausgeht. Daß sie aber nach wie vor virulent ist, zeigt sich an der modernen Version des Streits um die Willensfreiheit [2]. Man sollte sogar denken, daß sie heute virulenter ist als zu Zeiten, da man unlösbar scheinende Probleme höherer Mühewaltung überlassen konnte. Jedoch scheint der Weltgeist derzeit andere Präokkupationen zu pflegen.

Jeder weiß, daß sich die abendländische Menschheit in den letzten 500 Jahren auf die Bewältigung der Außenwelt geworfen hat, mit derartigem Erfolg, daß die dazu entwickelten Methoden mittlerweile den ganzen Erdball unter sich gebracht haben und schon dabei sind, selbst dessen äußere Erscheinung zu verändern; ohne Mathematik ist diese Entwicklung nicht denkbar. Andererseits ist auch nicht unbekannt, daß man sich in Indien vor mindestens 3000 Jahren auf die Erforschung und Durchdringung der Innenwelt verlegt hat . Naturgemäß hinterließ dieses Unternehmen nicht v iele Spuren in der

Außenwelt; aber wenn man den Kundigen glauben darf, war der Erfolg nicht geringer [3]. Irgendwann muß die Zeit reif werden, die wirklichen Errungenschaften beider Seiten, jenseits obsolet gewordener philosophischer Debatten, miteinander in Verbindung zu bringen. Die Mathematik scheint dafür gerüstet, wie man im Hinblick auf das im letzten Jahrhundert erreichte Niveau ihrer Selbstreflexion vielleicht sagen darf; jedenfalls ist sie (und allein sie) mittlerweile imstande, die Grenzen ihrer Reichweite begrifflich dingfest zu machen. Wir wollen uns hier in die γιγαντομαχια nicht einmischen; aber es liegt in der Natur der Sache, daß wir uns dem Kampfplatz nähern. Ebenfalls in dieser Natur liegt, daß wir nicht daran denken können, das Thema auszuschöpfen. Beginnen wir nun bei den Elementen.

3

Die primäre Funktion des In ist Ortsbestimmung durch Angabe einer Relation: „Die Tasse ist im Schrank". Fast unvermerkt mischt sich diese Funktion mit andern und geht schließlich in andere über. „In der Tasse ist Tee" ist keine Ortsbestimmung für den Tee, genauer: impliziert zwar eine solche, ist aber nicht als solche gemeint, was immerhin noch einen Sinn haben könnte; man würde dann aber eher sagen „Der Tee ist in der Tasse". Auf subtile Weise folgt die Syntax der Intention. Aber für den Satz „In der Tasse ist ein Sprung" hat eine solche Modifikation keinen Sinn mehr; der gemeinte Sprung hat gar keine (raumzeitliche) Existenz außerhalb der Tasse. Mehr logisch betrachtet ist der erste Satz reine Ortsbestimmung (genauer: eine Beschreibung des Tassenorts durch den Schrankort), mathematisierbar etwa durch Koordinaten. Der zweite drückt eine Aktualisierung der Funktion der Tasse aus, deren sachgemäße Mathematisierung einen Zeitparameter erfordern würde, der dritte eine Eigenschaft der Tasse. Aristotelisch gesprochen, wird die Tasse in den drei Sätzen bezüglich der Kategorien des που, des πασχειν und des ποιοσ bestimmt. Man beachte, daß die beiden letzten Sätze dieselbe syntaktische Form haben; erst die Reflexion auf die verschiedenen Verhältnisse, die Tee und Sprung zur Tasse haben, läßt die „Tiefenstruktur" ans Licht treten [4].

Weil die Tasse (als konkretes Objekt verstanden) ein raumzeitlicher Gegenstand ist, hat alles, was man von ihr aussagt, auch ein räumliches Moment und enthält insofern noch einen Rest von der primären Bedeutung des In. Der dritte Satz läßt schon den Übergang zur metaphorischen Verwendung des In erkennen. Wendungen wie „in Ordnung sein" oder „in Form sein" enthalten noch eine ganz schwache Konnotation von Räumlichkeit, etwa im Sinne von „Alles an seinem Platz"; aber nicht mehr „in Gefahr sein" oder „im Begriff sein, etwas zu tun". Beim letzten Beispiel ist auch die im Zustandsbegriff liegende Konnotation einer zeitlichen Erstreckung verschwunden. Rein metaphorisch ist schließlich das „logische" In: jeder Satz „S ist p" kann auch als „S ist im Zustand des p-Seins" formuliert werden. Das So-Sein wird in ein In-Sein übersetzt; das wird uns noch beschäftigen [5]. Die Fälle sind nicht selten, in denen es der Übersetzung nicht bedarf, sondern eine Eigenschaft geradezu als Innewohnen ausgesprochen wird, wie bei „Das Haus steht in Flammen" oder „In dem Bild steckt viel Arbeit". Gesteigerte Intensität kann durch Wendungen mit „In" sinnfällig gemacht werden; man vergleiche „Ich bin in Eile/Angst/Schwierigkeiten" - „Ich habe es eilig/Angst/Schwierigkeiten".

4

Das Außen als Komplementärbereich oder Negation des Innen erfährt natürlich entsprechende Bedeutungsverschiebungen, und es erübrigt sich, zu den obigen Beispielen Analoga anzuführen. Interessanter ist die Asymmetrie, die darin liegt, daß das Innen nicht ebenso als Negation des Außen fungiert (was in einem formalisierten Kontext, den Satz vom Ausgeschlossenen Dritten vorausgesetzt, natürlich der Fall sein muß). Vorsichtiger ausgedrückt: ein Außen kann nur mit Bezug auf ein Innen ausgesagt werden, aber das Umgekehrte, und damit die „Dialektik“ von Innen-Außen ist zumindest nicht so klar. Der Satz „Wir sind im All“ ist logisch eine Trivialität, man kann mit ihm dennoch etwas Nichttriviales ausdrücken: daß wir zu einem Ganzen gehören (auch wenn wir die Ganzheit nicht verstehen), oder daß alles uns angeht. Räumlichkeit als Form des Vorhandenseins bedeutet ein In-Sein, das wenigstens logisch unabhängig ist von irgendeinem Außen, wenngleich es natürlich keine Erfahrung gibt, in der nichts Äußeres vorkommt. Die logische Möglichkeit eines Innen ohne Außen findet eine gewisse Bestätigung im mathematischen Begriff der Mannigfaltigkeit, Gebilde räumlichen Charakters, die aber nicht a limine in einen umgebenden Raum eingebettet sein müssen und es in wichtigen Fällen (Bahnenräume) auch nicht sind (nach bekannten Sätzen aber stets eingebettet werden können). Phänomenologisch freilich erfahren wir ein In-Sein nur durch den Raum, der uns umgibt, in dem wir uns bewegen, in den wir hinaussehen, aus dem her uns Menschen und Dinge angehen, und nicht durch den Raum, den wir selbst ausfüllen. Heidegger spricht von einem In-Sein als Existenzial, das allem Außen phänomenologisch vorausliegt [6]; aber alles, was sich von diesem dem menschlichen Dasein eigentümlichen Insein positiv aussagen läßt, das Zu-tun-haben-mit, das Besorgen und Verfallen, setzt das räumliche Außen voraus, und zwar logisch und phänomenologisch.

Ein besonderes Innen aber hat einen unverkennbaren Vorrang vor allem Außen, nämlich das Innere des eigenen Leibes als Sitz des Ich oder der Person. Diese Innenwelt ist uns *vor*gegeben, die Außenwelt *auf*gegeben; aus diesem Innen heraus nehmen wir sie wahr und wirken handelnd auf sie ein; es ist der Ausgangs- und Bezugspunkt unseres Daseins. Diesen Vorrang des Innen kann man als eine Folge der zentrischen Positionalität ansehen (diesen Begriff von Plessner werden wir unten besprechen); man vergleiche ihn mit dem Vorrang des Hier vor dem Da, des Jetzt vor dem Dann, des Ja vor dem Nein. Auch der Gebrauch des logischen In weist eine korrespondierende Asymmetrie auf: wir sagen nur selten, daß jemand außerhalb eines Zustandes ist, und nur dann, wenn dieser ein kritischer war.

5

Zum Innen gehört die Vorstellung des Umschlossenseins; wenn wir die Ebene durch eine Gerade zweiteilen, werden wir keinen Teil als einen „inneren“ betrachten. Die Umschließung kann partiell sein; ein Halbrund, eine Nische gewähren noch ein Innen. Die Grenze von Außen und Innen ist dann, mathematisch gesprochen, der Rand der konvexen Hülle, besonders deutlich beim Tee in der Tasse, oder wenn eine Fläche nur durch Pfähle abgesteckt ist. Hier deutet sich eine Quantifizierung des Inseins an. Ein schmaler Reif konstitutiert noch kein Innen, wohl aber, wenn er zum Zylinder verlängert wird. Selbst eine Ecke kann für ein Innen sorgen, aber nur, wenn der Winkel nicht zu stumpf ist.

Umschlossensein bedeutet in der Ebene: ein (möglichst noch injektives) Bild der Kreislinie als Rand haben. Der Jordansche Kurvensatz sagt umgekehrt, daß jede (stetige) Einbettung der Kreislinie in die Ebene diese in einen inneren und einen äußeren Bereich teilt, welche beide das Bild der Kreislinie als Rand haben; das Innere läßt sich dabei durch den Rand auf verschiedene Weisen kennzeichnen, z.B. als Gesamtheit derjenigen Punkte, für die jede durch sie gehende Gerade die Randlinie in (mindestens) *zwei* Punkten schneidet. Analoges gilt für Einbettungen der Kugelfläche in den dreidimensionalen Raum, allgemeiner für Einbettungen der (n–1) - dimensionalen Sphäre in den n-dimensionalen Raum.

Der strenge Beweis für den intuitiv klaren Sachverhalt ist übrigens keineswegs einfach, weil „Stetigkeit" ein recht schwacher Begriff ist, der intuitiv gar nicht faßbare Realisierungen besitzt (etwa Linien ohne Tangenten). Wie unverläßlich hier die Intuition sein kann, zeigt sich schon im Anschauungsraum. In der Ebene gilt ein Satz von Schönflies, demzufolge jede Einbettung der Kreislinie in die Ebene zu einem Automorphismus der Ebene fortgesetzt werden kann. Das Analogon im Raum ist falsch, wie die Alexandersche „Hornfläche" zeigt. Volle Klarheit schaffen hier erst die Begriffsbildungen der algebraischen Topologie [7].

6

Wenn ein Punkt im Innern liegt, gilt das auch noch für eine Umgebung des Punktes; daraus folgt, daß das Innere dieselbe Dimension haben muß wie das umgebende Äußere. Eine Kreislinie im Raum bestimmt kein Inneres mehr, obwohl man die von ihr umschlossene Kreisfläche immer noch als solches ansehen könnte; der Grund ist natürlich, daß eine Gerade zum Mittelpunkt der Fläche gehen kann, ohne die Linie zu schneiden. Das Umschlossensein ist sozusagen zu schwach, es fehlt ihm eine ganze Dimension. Andersherum: die zusätzliche Dimension hebt den Unterschied von Innen und Außen auf, indem sie gestattet, den Rand zu „überspringen". Die Unterscheidung von Innen und Außen hat also, wenn man so will, ihren Grund nur in der dimensionalen Beschränkung unserer Erfahrungsmöglichkeiten.

Auch Nichtorientierbarkeit steht der Innen-Außen-Unterscheidung entgegen. Wenn man auf einer geschlossenen Fläche im Raum einen Normalenvektor stetig bewegt, zeigt er an jedem Punkt in dieselbe Richtung, unabhängig vom Weg, auf dem man zu ihm gelangt; bei einer nichtorientierbaren Fläche wäre das nicht mehr so (selbst wenn man sie in den dreidimensionalen Raum einbetten könnte, was nicht der Fall ist). Aber auch ein Möbiusband im Raum (eine berandete nichtorientierbare Fläche) kann auf vexierende Weise Innen und Außen ineinander übergehen lassen. So betrachtet, ist Orientierbarkeit (wenigstens von Flächen) gleichbedeutend mit der Möglichkeit, Innen und Außen zu unterscheiden. Bemerkenswert ist die Verschiebung beim metaphorischen Gebrauch: mathematische Orientierung bedeutet die Möglichkeit, eine Richtung *konsistent* zu haben (und es gibt dann immer zwei entgegengesetzte Möglichkeiten); im Alltag meint Orientierung eher, die *richtige* Richtung zu haben (und von Konsistenz ist selten die Rede).

7

Die Vorstellung vom Inneren als einem Umschlossenen zieht die elementarste räumliche Asymmetrie von Innen und Außen nach sich: das Innere ist beschränkt, das Äußere unbeschränkt. Dementsprechend ist „Innen“ eher mit Ruhe, „Außen“ eher mit Bewegung konnotiert (dazu unten mehr). Auch hier bedarf die Intuition der mathematischen Präzisierung. Es ist leicht, Beschränktes und Unbeschränktes in homöomorphe Beziehung zu setzen (etwa mittels der Funktion $x \rightarrow 1/x$ auf der reellen Geraden). Beschränktheit ist also keine intrinsische Eigenschaft eines topologischen Raums, sondern kann von einer Einbettung in einen andern Raum abhängen (und nicht bloß von seiner eigenen Isomorphieklasse). Intrinsisch dagegen ist eine andere, stärkere Eigenschaft: das Innere zusammen mit seinem Rand ist kompakt, und ein stetiges Bild eines Kompaktums ist stets wieder kompakt, in einem euklidischen Raum also beschränkt und abgeschlossen.

Auch das unbeschränkte Äußere unseres zweidimensionalen Inneren läßt sich beschränken, indem man die Ebene mittels stereographischer Projektion auf eine Kugelfläche abbildet und durch Hinzunahme des Nordpols kompaktifiziert. Dann aber verändert sich auch der Unterschied von Innen und Außen: nur wenn das ursprüngliche Innere nach der Projektion noch klein genug ist (kleiner wenigstens als eine Hemisphäre), wird man es noch als Inneres wahrnehmen; der zuvor qualitative Unterschied wird quantitativ. Es ist erstaunlich, welch tiefgreifende Veränderung die Situation durch eine elementare mathematische Manipulation erfährt; der Nordpol, der die Ebene zur Kugelfläche abschließt, erscheint geradezu als der archimedische Punkt des δοσ που στω, das Unendliche ins Endliche holend. Auch hier ist übrigens die zusätzliche Dimension entscheidend beteiligt.

8

Eine Asymmetrie zeigt sich auch bei den werthaften Konnotationen von Innen und Außen, insofern beim Innen die positiven ein Übergewicht zu haben scheinen. Die erste ist der positive Aspekt des Umschlossenseins, das Dazugehören, das Anerkannt- und Bejahtsein, auf kürzeste Formeln gebracht in den Wendungen „Das ist in – das ist out“. Integriertsein, zu einem Ganzen als Konstituens dazugehören, ist meistens positiv besetzt [8]. Der Insider ist privilegiert, er weiß, wie die Dinge laufen, gehört vielleicht zu denen, die den Lauf der Dinge bestimmen. Der Außenseiter ist oft die interessantere Gestalt, ebensooft aber drückt der Begriff einen Mangel aus [9]. „Draußensein“ klingt nach Einsamkeit, Ausgesetztheit, Unterwegs, feindlichem Leben, luftleerem Raum. Ein Innen ist immer, wohin man zurückkehrt, im Draußen ist kein Bleiben. Die Psychoanalyse faßt den Aspekt des Gehalten- und Getragenseins nach Bion im Begriff des containers. Der Analytiker fungiert als container, insofern der Patient Ängste und Nöte bei ihm „unterbringen“ und damit des Analytikers Möglichkeiten, sie zu verarbeiten, in Anspruch nehmen kann. Der Aspekt des containing erklärt die oben (Abschn. 3) erwähnte Funktion des In als Intensivum: eine Eigenschaft nicht einfach haben, sondern „von ihr gehabt werden“; auch andere Sprechweisen wie „In der Musik fand er Trost“. Warum sagen wir „In der Wüste“, aber „Auf hoher See“? Die Wüste kann noch Wohnung des Menschen sein (wenngleich eine extreme), das Wasser nicht. Für die Tätigkeit des Schwimmens hingegen ist das Wasser container; darum heißt es „Ich schwimme im Meer“ statt „auf dem Meer“, was genauer wäre.

Das Umschlossensein zeigt seinen negativen Aspekt im Eingeschlossensein. Wem ich zugehöre, das begrenzt mich ja auch; vielleicht nicht logisch, aber faktisch. Man kann nicht beliebig viele gute Freunde haben, und nur *eine* Heimat. So kann das In-Sein als negativ erscheinen, als Beschränkung der Freiheit, entsprechend das Außen-Sein positiv, als Freisein. Auch das Positive am Gehalten- , Getragen - , Aufgehobensein kann umschlagen in Beengung, Festlegung, Zwang. „Mittendrin" ist eher bedenklich, ein Verwickelt-, Verstrickt-, In-Anspruch-genommen-Sein, jedenfalls anstrengend, auch wo es erwünscht kommt. Wie subtil hier die Sprache unterscheidet, zeigt der Vergleich von „aus etwas heraus*kommen*" (einer Beziehung, einer Zwangslage, einer Gefahr) mit „aus etwas heraus*fallen*" (einem Wettbewerb, einem Auswahlverfahren, dem sozialen Netz). Den logischen Aspekt erfaßt Spinozas Formel determinatio = negatio. Jede Bestimmung ist auch eine Festlegung und impliziert Ausschließungen; die Grundformel ist der Satz vom Widerspruch.

9

Von rein positiver Konnotation wiederum ist das Innere als das „Eigentliche", „des Pudels Kern", das „wahre Wesen" der Dinge, oder einfach das, was an ihnen das Auszeichnende ist und ihren Begriff veranlaßt. Eine „tiefe" Einsicht ist eine solche, die dieses Innere enthüllt. Nur wer „in sich" geht, gelangt zur Selbsterkenntnis. Das Äußere erscheint hier als Oberfläche, das, was sich vielleicht als erstes erschließt, aber nicht das ist, worauf es ankommt; oft auch als täuschender Schein. „Äußerlich" ist oft so gut wie „belanglos", „innerlich" oft wie „echt" oder „wahr", besonders deutlich bei „innig". Innewerden ist mehr als Gewahrwerden, etwas Verinnerlichen heißt: zu einem Teil der eigenen Person machen. In der Mathematik kommt es, wie Hegel einmal schön bemerkt, nicht darauf an, die Sätze auswendig, sondern die Beweise inwendig zu wissen. „In etwas hineinkommen" - mit einer Sache so vertraut werden, daß man sie beherrscht.

Auch Mathematiker unterscheiden „formale" Eigenschaften, die sich durch „Standardschlüsse" aus den Definitionen ergeben, von „tiefliegenden". Diese sind in der Regel schwer zu beweisen, aber nicht diese Schwierigkeit ist gemeint, sondern daß man dabei „an die Wurzeln" gehen muß. Es kommt weiter vor, daß Objekte einen „strukturellen Kern" haben, aus dem das Ganze durch eine „Standardkonstruktion" entsteht; nennen könnte man den anisotropen Kern einer quadratischen Form oder den Schiefkörperanteil einer einfachen Algebra. In diesen Fällen läßt sich die Kernstruktur sogar funktoriell isolieren, nämlich im Wittring bzw. der Brauergruppe. Das Gegenstück sind Objekte, deren kleinster Teil nach Art eines Genoms die gesamte Information enthält, wie eine fraktale Figur oder eine holomorphe Funktion.

10

Eine Variante ist das Innere als das Wertvolle, der verborgene Schatz. Es liegt in der Natur der Sachen, daß besonders Wichtiges oder Kostbares oft in einer Hülle steckt, leichtem Zugriff und zufälliger Gefährdung entzogen, wie das Gelbe vom Ei, das Adyton eines Tempels oder die Schließfächer der Bank. Jeder kennt die elementare Neugierde, zu erforschen, ob etwas „darinsteckt", und das Vergnügen daran, es zu entdecken; oder das kindliche Entzücken, wenn in einem Holzpüppchen ein anderes steckt und dann noch eines. (In der menschlichen Natur liegt dann weiter, daß mitunter gerade ihre Unerreichbarkeit oder Seltenheit Dingen ihren Wert gibt, wie beim Südpol oder der Blauen Mauritius; das steht auf einem andern Blatt.)

Freilich kommt auch vor, daß das Wichtige und Wertvolle durchaus unverborgen war, nur haben wir es nicht bemerkt; und immer ist auch eine Frage der Perspektive, was das Innere und Eigentliche denn nun sein soll. Goethe hat der These „Ins Innre der Natur / dringt kein erschaffner Geist" eine andere entgegengesetzt: „Ort für Ort / sind wir im Innern" [10] . Das Weltganze ist an allen Stellen im gleichen Grade, wenn auch nicht in gleicher Weise präsent. Überall sind Götter, so sagte es Thales; Vergleichbares meinte Ranke mit seinem bekannten Ausspruch, daß alle Zeitalter gleich nahe zu Gott seien. Aus mathematischer Sicht erscheint dies als eine Art Homogenitätseigenschaft, eine Gleichverteilung von Sein. Die Mathematik steuert auch ein verblüffendes Analogon bei: in einem ultrametrischen Raum ist jeder Punkt eines Kreises Mittelpunkt.

11

Für das Überwiegen positiver Konnotationen beim „Innen" scheint das Folgende eine natürliche Erklärung. Der Lebenslauf führt den Menschen (physisch betrachtet) von einem fast absoluten In-Sein, dem Eingeschlossensein im Mutterschoß, zur Auflösung ins All: then to the elements. Nun haben wir von dem anfänglichen In-Sein ebensowenig Erinnerungen, wie wir von dem künftigen Aufgelöstsein etwas wissen. Aber Portmanns Theorie von der vorzeitigen Geburt, dem „extrauterinen Frühjahr" des Menschen – das menschliche Neugeborene ist, im Vergleich mit andern höheren Säugern, sehr unfertig, muß elementare Fähigkeiten mühsam erlernen, vor allem den aufrechten Gang, während andere Gattungen artspezifische Grundfähigkeiten von Geburt an haben – diese Theorie erklärt, warum die Geburt, das Heraustreten aus dem anfänglichen Innen, als Urkatastrophe erlebt wird und eine Traumatisierung erzeugt, die uns den frühesten Zustand als einen erstrebenswerten erscheinen läßt: „Oh wüßt ich doch den Weg zurück", wie es in einem Lied von Brahms heißt. Dagegen fordert es einen gewissen Grad von Einsicht, die Auflösung ins All als Erlösung zu betrachten, dem Loskommen den Vorzug vor dem Ankommen zu geben. Was freilich die Psyche betrifft, nimmt die Entwicklung eher einen umgekehrten Verlauf, ist eine Klärung und Ausbildung des Innen, welches ganz zu Beginn, in der Mutter-Kind-Dyade, gar keine Eigenständigkeit besitzt, sogar ins Außen verlegt ist, mit der Zeit aber sich vom Außen emanzipiert, ihm gegenübertritt und es schließlich als immer unwesentlicher erscheinen läßt. „Wesentlich" zu werden, wozu uns Angelus Silesius auffordert, verlangt *in* sich zu gehen; im Innern ist Sammlung, im Außen Zerstreuung. Man vergleiche damit die Worte von Goethes Homunculus: „Was künstlich ist, verlangt geschlossnen Raum, / Natürlichem genügt das Weltall kaum".

12

Fragen wir nun nach Mathematisierungen des Inseins, so wird jeder mathematisch Geschulte sogleich an zwei fundamentale und elementare Relationen denken, nämlich die Element- und die aus ihr abgeleitete Inklusionsrelation: eine Menge M ist Teilmenge der Menge N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Fundamental ist die Elementrelation, weil sie die einzige undefinierte Grundrelation der Mengenlehre ist, die heute den Unterbau aller (Standard-) Mathematik abgibt (wenn auch nicht den einzig möglichen). Ihr elementarer Charakter kann auch dem Nichtgeschulten einsichtig gemacht werden, denn jede Aussage „S ist p“ kann als „S gehört zur Menge (Klasse) der p-Objekte“ formuliert werden; eine Tatsache, die am Anfang der Entwicklung stand, welche die mathematische Logik seit dem 19.Jahrhundert genommen hat. Sie übersetzt Implikation in Inklusion und macht sie damit einem durchsichtigen Kalkül zugänglich.

Ist die Elementbeziehung wirklich der Sphäre des „In“ zugehörig? Die Terminologie spricht dafür, wenn wir sagen „x liegt in M“ oder „M enthält x“. Auch scheint keine Veranschaulichung möglich, die nicht auf ein räumliches In rekurriert, wie die bekannten Diagramme. Andererseits ist der (mathematische) Mengenbegriff ursprünglich logischer Natur, den Umfang eines Begriffs bezeichnend. Die Alltagssprache jedenfalls verwendet das In nur selten im Sinne einer Elementbeziehung, etwa in „Er ist im Ausschuß“. Der Satz „Hans spielt in der ersten Mannschaft“ wird eher einen Leistungsstand meinen als die Zugehörigkeit zu einer Gruppe von Mitspielern. Natürlich sind Aussagen vom Typ „S ist p“ ubiquitär, aber sie meinen fast immer den einfachen Sachverhalt, daß S die Eigenschaft p hat, und nur selten dessen mengentheoretische Fassung, die nur logisch, nicht intentional äquivalent ist. Niemand, der feststellt, daß der Rasen grün ist, denkt dabei an die Klasse grüner Dinge (diese zu definieren, wäre sogar ein aussichtsloses Unternehmen). Der in der Elementrelation zweifellos vorhandene In-Aspekt ist also in der Alltagssprache eher entlegen (vielleicht hat es deshalb so lange gedauert, bis der Mengenbegriff als genuin mathematischer erkannt wurde); umso erstaunlicher, daß sich die Mathematik und damit viele Arten des In-Seins auf ihn gründen lassen.

13

Ähnliches gilt für die Inklusionsrelation; übliche Redeweisen und Veranschaulichungen weisen sie der In-Sphäre zu, doch das Alltags-In hat nur selten Inklusionscharakter. Ihr logisches Pendant sind Allaussagen vom Typ „alle S sind p“, die für die natürliche Intention nur selten den Charakter einer In-Aussage haben. Nur wer sich als Mathematiker daran gewöhnt hat, Flächenstücke mit Punktmengen zu identifizieren, wird eine Aussage wie „Bayern liegt in Deutschland“ im Sinne einer Inklusion verstehen. Aussagen, die in natürlicher Weise als Inklusionsbeziehungen zu verstehen sind, werden eher mit Wendungen wie „befinden sich unter“ oder „gehören zu“ formuliert. Eine mathematische Alternative zur Mengentheorie ist hier übrigens die Mereologie, eine axiomatische Theorie von Teil und Ganzem, die man wiederum der Theorie der partiell geordneten Mengen subsumieren kann (die Elemente der Menge repräsentieren dann die Teile und müssen nicht selbst als Mengen aufgefaßt werden).

Die engste Axiomatik haben in diesem Kontext die Booleschen Algebren, bei denen die Bildung des Komplements, des „vollen Außen“, zu den strukturellen Konstituenten gehört. Hier stehen Außen und Innen in genauer Spiegelbildlichkeit, weisen keine Asymmetrie mehr auf. Das Komplement des Komplements von x ist wiederum x; Komplementbildung ist ein involutorischer Antiautomorphismus. Die Dialektik von Innen-Außen ist sozusagen trivial, die „Synthese“, das Supremum von x und seinem Komplement, ist stets das Ganze. Nichttriviale Beispiele finden sich, wenn man die Axiomatik zu der einer Heytingalgebra abschwächt. Ist U(X) die Heytingalgebra der offenen Mengen eines topologischen Raums

X, so ordnet der „Außen-Operator“ (gewöhnlich eher Negation genannt) N jeder offenen Menge V das Innere ihres Komplements zu. Ist V das Komplement einer diskreten Menge, ist N(V) leer und N(N(V)) = X, so daß die „Negation der Negation“ von V größer ist als V; in jedem Fall ist die „Synthese“ von V und N(V) eine überall dichte Menge [10a].

14

Das primäre, räumliche In dagegen erscheint in keiner gängigen Axiomatik; am ehesten wäre zu denken an die Grundrelationen „der Punkt P liegt auf der Geraden G“, „die Gerade G liegt in der Ebene E“ oder „der Punkt Q liegt zwischen den Punkten P und R“ in Hilberts geometrischer Axiomatik. Diese erfassen nur Aspekte des primären In, dessen voller Gehalt erst durch eine lange Reihe begrifflicher Konstruktionen mathematische Realität gewinnt. Aber das liegt im Wesen des Mathematischen: das Primäre, das phänomenologisch Gegebene ist stets „kategorial gesättigt“ und damit viel zu reich an erst zu klärenden Strukturmomenten, an Assoziationen und Konnotationen, um mathematik-fähig zu sein. Mathematik isoliert einzelne Züge der Erfahrung und führt sie auf kategoriale Grundfunktionen zurück, deren Gesetze sie entfaltet. Sie rekonstruiert das Konkrete aus dem Abstrakten, das Komplexe aus dem Einfachen, während die natürliche Entwicklung und Verwendung der Sprache den umgekehrten Weg geht. Mathematik folgt auch der rationalistischen Maxime, wonach nichts unbewiesen bleiben soll, wofür ein Beweis gegeben werden kann. Ihr obliegt die Durchdringung des Begründungsgefüges nach allen Richtungen; die logischen Gesichtspunkte sind aber nicht dieselben wie diejenigen der Erfahrbarkeit. Schon Aristoteles wußte, daß das für uns Frühere nicht das von der Sache her Frühere sein muß. Auch beim In zeigt sich, wie mathematische Entfaltung das gewöhnliche Sprachspiel hinter sich läßt. Die Schachtelung des In ist empirisch ziemlich limitiert; die Mengenmathematik läßt sie unendlich werden, zuerst in Zermelos Definition der Nachfolgerabbildung, die das Aufeinanderfolgen der Zahlen durch Enthaltensein der kleineren in der größeren wiedergibt. Gelegentlich hat sich aber auch philosophische Spekulation zu einer unendlichen Kette von Innen und Außen vorgewagt, so Leibniz in der Monadenlehre (§§ 64 ss). Eine mathematische Illustration bieten die fraktalen Figuren, in denen sich das Größte im Kleinsten ad infinitum wiederholt.

15

Legen wir uns nun, um eine oben ausgesprochene Behauptung zu validieren, die Frage vor, was denn die Mathematik aus dem Satz „Die Tasse ist im Schrank“ machen kann. Geht es nur um den täglichen Gebrauch, genügt ein wenig Kombinatorik, eine Liste von Gegenständen, eine Liste von Lokalitäten und eine zeitlich veränderliche Verteilungs-funktion jener auf diese; das In-Sein ist also reduziert auf einen bestimmten Wert dieser Funktion. Es kann aber auch sein (und der Tag scheint nicht fern), daß man einen Roboter abrichten kann, die Tasse aus dem Schrank zu holen. Das würde erfordern, daß man den Ort des Schranks und den der Tasse in ihm in abstracto erfaßt, etwa durch Koordinaten; das In-Sein der Tasse im Schrank spiegelt sich dann in einer Inklusionsbeziehung (Schachtelung) von Koordinatenintervallen. Vielleicht aber spielt auch die Gestalt von Tasse und Schrank dabei eine Rolle; die Differentialgeometrie bietet hier beliebige Präzisierungen, eine Mechanisierung des Gestalterkennens scheint schon geleistet[11]. Das In-Sein erscheint dann als positives Resultat eines Abgleichs von Merkmalen. Sind

Schrank und Tasse Bestandteile eines musealen Arrangements, könnte man die Tasse im Sinn der (mathematischen) Kategorientheorie als Unterobjekt des Objekts „Schrank" auffassen (über das kategoriale In unten mehr). Keine mathematische Theorie kann alle lebensweltlichen Bezüge und Aspekte der Tasse im Schrank erfassen, allein schon, weil diese Bezüge unübersehbar sind. Aber das ist auch nicht die Aufgabe solcher Theorien. Umgekehrt ist jeder Bezug und Aspekt mathematikfähig, wenn er hinreichend präzise formuliert werden kann.

16

Innen und außen sind steigerungsfähig; es kann aber nicht nur verschiedene Grade des In-Seins geben, etwa als Entfernung von einem Mittelpunkt, sondern auch verschiedene Arten, etwa bei Hierarchien: so hat jede größere Institution Verwaltungs- und Fachpersonal, mit jeweils eigenen Sub-Hierarchien. Alles Mehr oder Weniger erfaßt die Mathematik durch partiell geordnete Mengen oder (was auf dasselbe hinausläuft) gerichtete Graphen. Verschiedene Nachfolger desselben Elements bedeuten dann verschiedene Arten des Weiter-Innen-Seins; als die innerste Schicht erscheinen Elemente ohne Nachfolger, als äußerste solche ohne Vorgänger. Ist die Ordnung Mengeninklusion, wird man die kleinere Menge als die weiter innen befindliche ansehen; das Innerste einer Potenzmenge wäre demnach die leere Menge. Das erscheint stimmig: würde man in das Innere der Dinge so völlig eindringen, daß nichts mehr zu durchdringen bleibt, stünde man vor dem Nichts, das man aber ebensogut als das absolute Außen ansehen kann: nichts mehr vor sich haben, wäre dasselbe wie alles hinter sich haben. Hierher gehören Wendungen wie „Aus dem Alter bin ich heraus".

Hier verdient eine mathematische Konstruktion Erwähnung, die Enden eines topologischen Raums. Sie sind definiert als Äquivalenzklassen von Zusammenhangskomponenten der Teilräume mit kompaktem Komplement, wobei zwei solche Komponenten äquivalent sind, wenn sie (informell gesprochen) bis auf ein Kompaktum übereinstimmen. Ein kompakter Raum hat demnach keine Enden, die reelle Gerade zwei, wie die Anschauung erwarten läßt, die Ebene aber nur eines, repräsentiert durch den Nordpol der stereographischen Projektion. Die Menge der Enden drückt aus, auf wieviele Weisen der Raum sich „ins Unendliche erstrecken" kann, und ist diesem Sinn sein „absolutes Außen". Das Bemerkenswerte ist, daß die Konstruktion nur vom Raum selbst abhängt, der also dieses „Außen" selbst hervorbringt.

17

Das In-sein eines Objekts als Unterobjekt eines anderen von gleicher Art ist ein Thema der kategorialen Mathematik. Das räumliche In ist hier subsumiert; wenn ein Gegenstand A einen andern Gegenstand B enthält, dann ist auch der von B eingenommene Ort in dem von A eingenommenen enthalten, etwa als Untermannigfaltigkeit. Etwas deutlicher als die schon besprochene Tasse im Schrank wäre eine Kapelle im Palast: im Grundriß des Palastes erscheint die Kapelle als Teilgraph. Aber auch nicht-räumliches In kann eine Unterstruktur bezeichnen, etwa ein Paragraph in einem Gesetzbuch.

Schon die flüchtigste Musterung macht klar, daß in verschiedenen Kategorien ein Objekt auf verschiedene Weisen Unterobjekt eines anderen Objekts sein kann; jede mathematikfähige Struktur hat ihre eigenen Weisen des In-Seins. Die Teilgraphen eines Graphen zerfallen in zwei Klassen, je nachdem ob sie mit zwei Endpunkten einer Kante des umfassenden Graphen auch diese Kante enthalten. Eine Untergruppe einer Gruppe enthält immer auch das Einselement, worin eine gewisse Rigidität zum Ausdruck kommt, wohingegen ein Unterraum eines Raums in diesem bewegt und deformiert werden kann. Untergruppen können normal, charakteristisch, direkte Faktoren sein, Unterräume offen oder abgeschlossen, zusammenhängend, dicht usw. Ein nicht geringer Teil der einschlägigen Theorien ist damit befaßt, verschiedene Eigenschaften von Unterobjekten zu definieren und ihre wechselseitigen Implikationen zu studieren.

18

Sehr häufig ist von Bedeutung, die verschiedenen Einbettungen eines Objekts A in ein anderes Objekt B zu studieren. Ist die Einbettung umkehrbar, liegt ein Isomorphismus vor, ein Grundbegriff aller am Begriff der Struktur orientierten Mathematik: isomorphe Objekte können, wenigstens in der Sprache der zuständigen Kategorie, nicht voneinander unterschieden werden. Schon der Fall A = B ist hier nicht trivial: eine umkehrbare Einbettung von A in sich selbst in ein Automorphismus, Automorphismengruppen enthalten Informationen über die Symmetrien eines Objekts, seine möglichen Weisen, „in sich selbst zu sein“, am sichtbarsten in der Geometrie, von fundamentaler Bedeutung in der Algebra. Auch nicht-umkehrbare Selbsteinbettungen können von Interesse sein: daß man die Menge der natürlichen Zahlen auf sehr „dünne“ Teilmengen von sich selbst (etwa die Quadratzahlen) injektiv abbilden kann, gehörte zu den ersten „Paradoxien des Unendlichen“. Gehen alle Einbettungen von A in B durch Automorphismen von B auseinander hervor, kann man dies als eine Homogenitätseigenschaft ansehen, besonders sichtbar, wenn A ein Punkt und B eine glatte Mannigfaltigkeit ist: der Raum B ist homogen, seine Automorphismengruppe transitiv. Ein besonders spektakuläres Einbettungsproblem ist Gegenstand der Knotentheorie: ein Knoten ist eine Einbettung der Kreislinie in den dreidimensionalen Raum; alle Knotenlinien sind also per definitionem isomorph, nämlich zur Kreislinie; die Komplikation, das Verschlungensein der Linie kommt (im Gegensatz zum Augenschein) nicht dieser selbst zu, sondern der Einbettung; ihre wichtigste Invariante ist die Fundamentalgruppe des Komplements der Knotenlinie.

19

Die erste Aufgabe einer streng kategorialen Behandlung des In ist die „pfeiltheoretische“ Formulierung des Begriffs „Unterobjekt“. Ist A eine Teilmenge von C, kann man die Identität von A als Einbettung, d.h. injektive Abbildung von A nach C auffassen. Allgemeiner nennt man in Kategorien vom Typus „Menge plus Struktur“ einen injektiven Morphismus f eine Einbettung und sein Bild ein Unterobjekt des Zielobjekts von f. Die injektiven Mengenabbildungen $f\colon A \to C$ lassen sich durch die folgende Kürzungseigenschaft rein abbildungstheoretisch charakterisieren: sind $g,h\colon D \to A$ zwei Abbildungen, so ist $fg = fh$ nur dann, wenn $g = h$; in der Kategoriensprache nennt man dann f einen Monomorphismus. Sodann wird man zwei Monomorphismen $f\colon A \to C$ und $g\colon B \to C$ dasselbe Unterobjekt von C zuordnen, wenn sie sich nur durch einen

Isomorphismus $A \simeq B$ voneinander unterscheiden. So gelangt man zum kategorialen Begriff eines Unterobjekts des Objekts C, nämlich eine Äquivalenzklasse von Monomorphismen mit Zielobjekt C.

Diese pfeiltheoretische Umdeutung der Inklusion als eines Abgebildetseins mag auf den ersten Blick künstlich erscheinen, nur dem Bedürfnis der Kategorientheorie geschuldet, sich von den Mengenbegriffen zu lösen. Man sieht aber leicht, daß sie adäquat, ja notwendig ist. Ein und dasselbe Objekt A kann Unterobjekt verschiedener Objekte B und C sein, und man muß unterscheiden können zwischen A als Unterobjekt von B und A als Unterobjekt von C, außerdem natürlich A als Objekt eigenen Rechts denken können. Die sachgemäße Formalisierung dieser Situation ist offensichtlich die oben beschriebene kategoriale. Sie hat oft auch ein ganz reales fundamentum in re: die Tasse ist nur im Schrank, weil jemand sie hineingestellt hat. Man beachte auch, daß ein Objekt auf verschiedene Weisen Unterobjekt eines andern sein kann, so wie es für die Tasse verschiedene Plätze im Schrank gibt. Logisch betrachtet: wenn die Aussage „A ist in B“ nicht notwendig wahr ist, dann kann sie nur dann wahr sein, wenn A mit B in Verbindung gebracht worden ist, und die universelle mathematische Form des In-Verbindung-Bringens ist ein Morphismus in einer geeigneten Kategorie.

20

Die Dynamisierung des In-Seins im Begriff des Monomorphismus ist Voraussetzung für die Definitions eines Objekts, das die verschiedenen, in der jeweiligen Kategorie möglichen Arten des In-Seins klassifiziert, des sogenannten subobject-classifiers, im folgenden mit SOC abgekürzt[12]. Wir orientieren uns an der Mengenkategorie $\mathcal{M}$. Bekanntlich kann man die Teilmengen N einer Menge M durch ihre charakteristischen Funktionen

$$\chi_N : M \to \{0,1\} =: \Omega \ , \ \chi_N(m) = 1 \text{ genau dann, wenn } m \in N$$

beschreiben, und jede Funktion $M \to \Omega$ ist charakteristische Funktion der Teilmenge der m, die auf 1 abgebildet werden, so daß die Potenzmenge $P(M)$ auf kanonische Weise mit $\mathcal{M}(M, \Omega)$ identifiziert wird; weiterhin ist jedesmal das (kommutative) Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{tr} \\ M & \xrightarrow[\chi_N]{} & \Omega \end{array}$$

in welchem $N \to E$ die kanonische Abbildung auf das Endobjekt $E = \{1\}$ und tr die Abbildung $1 \to 1$ ist, ein cartesisches Diagramm oder Faserprodukt [13]. Letzteres ist nun eine rein pfeiltheoretische Bildung; dementsprechend nennen wir ein Objekt Ω einer Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Pfeil $\mathrm{tr}: E \to \Omega$ vom Endobjekt E einen SOC in

$\mathcal{C}$, wenn für jeden Monomorphismus $f: A \to B$ in $\mathcal{C}$ genau ein Morphismus $\chi_f : B \to \Omega$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "tr"] \\ B \arrow[r, "\chi_f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

zu einem Faserprodukt macht. Ein SOC ist (wie alle Objekte mit universellen Abbildungseigenschaften) stets bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Die gängigen Kategorien vom Typ „Menge plus Struktur" besitzen keinen SOC, wohl aber Funktorkategorien; und jede kleine Kategorie läßt sich nach Yoneda in eine solche einbetten.

21

Der SOC, sagten wir, klassifiziert die kategoriespezifischen Arten und Grade des In-seins. Die Mengenkategorie kennt nur zwei: eine Menge ist Teilmenge einer andern, oder sie ist es nicht; weitere Qualifikationen, etwa nach der Größe des Durchschnitts, erfordern die Einführung weiterer Strukturen, sind jedenfalls durch den SOC nicht ausdrückbar [14]. Feiner ist die Abstufung des In-seins, die wir in der Kategorie $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ der geordneten Mengenpaare finden. Ein Unterobjekt von $M = (M_1, M_2)$ ist ein $S = (S_1, S_2)$ mit $S_i \subset M_i$ für $i = 1, 2$. Hier gestattet das In-Sein eines Elements $x = (x_1, x_2)$ von M bezüglich S a limine eine vierfache Einteilung, je nachdem ob beide x_i in S_i liegen oder eines oder keines; dementsprechend hat der SOC die vier Elemente (1,1), (1,0), (0,1) und (0,0). Die Verallgemeinerung auf die Kategorie, deren Objekte geordnete n-Tupel $(M_1, ..., M_n)$ von Mengen sind, ist klar; der SOC hat dann 2^n Elemente. Seine Funktionsweise macht die folgende naheliegende Interpretation deutlich: wir nehmen $M_1 = ... = M_n = M$ und interpretieren die Teilmengen S_i (extensional) als Eigenschaften, welche die Elemente von M haben können oder nicht. Die charakteristische Funktion des Unterobjekts S gibt dann von jedem diagonal eingebetteten Element $x = (x,...,x)$ an, welche der Eigenschaften ihm zukommt. Man kann hierin eine Formalisierung geläufiger Redeweisen wie „Er gehört nur halb dazu" sehen; der SOC übernimmt sozusagen die Buchhaltung für die Aspekt-Analyse.

Von ganz anderer Faktur ist der SOC der Kategorie, deren Objekte Mengenabbildungen $f: M_0 \to M_1$ sind und deren Morphismen durch kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} N_0 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N_1 \arrow[d] \\ M_0 \arrow[r, "f"'] & M_1 \end{tikzcd}$$

definiert werden. Ein Unterobjekt liegt vor, wenn die vertikalen Pfeile Inklusionen von Teilmengen sind; dann ist g einfach die Einschränkung von f auf die Teilmenge N_0. Bezüglich dieser Gegebenheiten kann sich ein $x \in M_0$ auf drei Weisen verhalten: (1) es ist $x \in N_0$ (und dann von selbst $f(x) \in N_1$), (2) es ist $x \notin N_0$, aber $f(x) \in N_1$, (3) es ist $f(x) \notin N_1$ (und dann auch $x \notin N_0$). Der SOC dieser Kategorie ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \rightarrow & \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{1,0,-1\} & \underset{s}{\rightarrow} & \{1,0\}\,, \end{array}$$

in dem die obere Zeile das Endobjekt E ist und die vertikalen Pfeile, die zusammen den Pfeil $tr: E \rightarrow \Omega$ unserer Kategorie bilden, jeweils 1 auf 1 abbilden, während s durch $s(1) = s(0) = 1$ und $s(-1) = 0$ definiert ist. Die charakteristische Funktion unseres Unterobjekts ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \overset{f}{\rightarrow} & M_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{1,0,-1\} & \underset{s}{\rightarrow} & \{1,0\} \end{array}$$

in dem der rechte vertikale Pfeil die charakteristische Funktion von N_1 in der Mengen-kategorie und der linke so definiert ist, daß das Diagramm kommutiert, nämlich $x \rightarrow 1$ für $x \in N_0$, $x \rightarrow 0$ für $x \notin N_0$, aber $f(x) \in N_1$ und $x \rightarrow -1$ für $f(x) \notin N_1$. Eine naheliegende Interpretation dieses Arrangements von Mengen und Abbildungen ist die folgende: die Mengen M_0 und M_1 repräsentieren zwei Zustände desselben Systems M zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, die Funktion f den Übergang vom ersten Zustand zum zweiten, die Teilmengen N_i wiederum eine Eigenschaft N von Elementen von M zu den beiden Zeitpunkten; die Kommutativität des Diagramms bedeutet, daß die Eigenschaft N beim Übergang erhalten bleibt. Dann kann ein Element von M die Eigenschaft N schon zu Anfang haben (und hat sie dann auch nachher), oder es kann sie zu Anfang nicht haben, aber beim Übergang annehmen, oder auch nach dem Übergang nicht haben; der Formalismus ist also Aspektanalyse bei zeitlicher Veränderung. Diesen drei Möglichkeiten entsprechen die drei Elemente (= Morphismen $E \rightarrow \Omega$) von Ω, nämlich $(1 \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow 1)$, oder $\rightarrow (0 \rightarrow 1)$, oder $\rightarrow (-1 \rightarrow 0)$. Auch hier liegt die Verallgemeinerung auf der Hand, nämlich auf eine beliebige Folge von Zeitpunkten; gleichzeitig kann die Anzahl der zu erfassenden Eigenschaften (Hinsichten) beliebig sein.

22

Diese Beispiele machen erstens deutlich, daß sich das In-Sein in geeigneten Kategorien beliebig differenzieren läßt, und zweitens, daß der SOC ein Objekt von essentiell logischem Charakter ist. Die beiden Elemente des SOC für die Mengenkategorie sind gleichzeitig die Wahrheitswerte für die Interpretation formaler Sprachen in dieser Kategorie gemäß der Semantik von Tarski. Dieser Sachverhalt gestattet eine weitreichende Verallgemeinerung. Den Mengenoperationen, die man für die Aufstellung der Tarskischen Semantik benötigt, lassen sich pfeiltheoretische Fassungen geben; dies führt zu einer Klasse von Kategorien, die all diese Operationen gestatten, den sog. Topoi. Demnach läßt sich jeder Topos für eine Semantik formaler Sprachen heranziehen, und es zeigt sich, daß der SOC wie im Mengenfall als Objekt der Wahrheitswerte fungiert. Die Arten des In-Seins bestimmen damit die Arten des Der-Fall-Seins, der „Wirklichkeit", soweit sie in Termini der jeweiligen Kategorie unterschieden und ausgedrückt werden können; das In-Sein ist das primäre Der-Fall-Sein, auf welches jedes weitere zurückgeführt werden kann (und diese Rückführung ist nichts anderes als die Aufstellung der Semantik). Hier gewinnt mathematische Realität, was wir oben das „logische In" genannt haben.

Unübersehbar ist der Bezug zu Heideggers Daseinsanalyse, insbesondere der Unterscheidung von Erschlossenheit und Satzwahrheit: das primär Erschlossene, αληθεσ, ist das, was ich immer schon in der Welt antreffe, was mein In-der-Welt-Sein mitkonstituiert. Varietäten des Mit-in-der-Welt-Seins sind Varietäten des Erschlossen-Seins; Heidegger unterscheidet Dasein, Vorhandensein, Zuhandensein. Die adaequatio, die Satzwahrheit, wie sie Aristoteles formuliert und Tarski in seiner Mengensemantik formalisiert hat, ist daraus abgeleitet, nämlich als ein Verhältnis des Erschlossenen zu einer Aussage darüber. Die Diskussion darüber, in welchem Sinn oder Umfang das Gewahrwerden (Erschlossensein) von der Versprachlichung abhängt, ist nicht abgeschlossen. „Die Grenzen meiner Sprache sind die Grenzen meiner Welt" - aber hat nicht das Tier eine Welt ohne Sprache? Sicher ist das menschliche Welt-Haben vom tierischen verschieden (s.u.), aber offenbar nicht durchgängig. Daß übrigens die kategoriale Logik eine Formalisierung dieses Heideggerschen Grundgedankens bietet, dürfte für Mathematiker wie für Philosophen gleichermaßen überraschend kommen. Eine Parallele dazu kann man darin sehen, daß Einverleiben und Ausstoßen die Vorläufer von Bejahung und Verneinung in der Ontogenese sind [15]. Und noch eine Hegelsche Reminiszenz: als das schlechthin Wahre zeigt sich hier offenkundig das Ganze, repräsentiert durch die Identität: jeder Morphismus $A \rightarrow X$ faktorisiert trivial durch die Identität von X.

Die Definition des SOC (in der Mengenkategorie) war erst möglich, nachdem wir Teilmengen mit charakteristischen Funktionen identifiziert haben. Logisch betrachtet, nämlich im Sinne der Russellschen Typentheorie, bedeutet dies einen Übergang zur nächsthöheren Stufe. Ich habe anderswo dargelegt [16], wie diese „Verflüssigung" der Objekte, genauer der Vorrang der Morphismen vor den Objekten, geradezu ein Bauprinzip des heutigen mathematischen Theoriegebäudes ist. Metaphysisch betrachtet ist der Übergang ein Schritt von einer Substanz- zu einer Prozeßontologie.

23

Die Unterobjekte eines festen Objekts X kann man vergleichen, indem man $f: A \rightarrow X$ „kleiner" als $g: B \rightarrow X$ nennt, wenn f durch g faktorisiert, also $f = gh$ für ein $h: A \rightarrow B$. Der Morphismus h ist dann selbst monomorph, und im Mengenfall gilt also tatsächlich $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$, so daß die Faktorisierung von Einbettungen eine pfeiltheoretische

Version der Inklusion von Teilmengen darstellt. In Topoi bilden die Unterobjekte eines festen X wie im Mengenfall (aber z.B. nicht bei Gruppen) selbst ein Objekt Sub(X) der Kategorie, welches die Struktur einer partiell geordneten Menge trägt, genauer einer Heytingalgebra (einem Beispiel sind wir in Abschn. 13 schon begegnet), grob gesagt ein Verband mit einem Komplement- oder (logisch verstanden) Negationsoperator $a \rightarrow a'$, der fast alle Axiome einer Booleschen Algebra erfüllt, ausgenommen (im Allgemeinen) den Satz vom Ausgeschlossenen Dritten $a \vee a' = 1$ und auch $(a')' = a$ (duplex negatio affirmat). Der SOC ist stets isomorph zu Sub(E), der Heytingalgebra der Unterobjekte des Endobjekts. In unserem Beispiel der Mengentupel $\mathcal{M} \times .... \times \mathcal{M}$ (n Faktoren) ist er die Potenzmenge der Koordinatenmenge $\{1,...,n\}$, also Boolesch. In der Kategorie der Mengenabbildungen $f\colon M_0 \rightarrow M_1$ hat Sub(E), entsprechend den drei Elementen von Ω, die drei Elemente

$$1 = \mathrm{id}(E), \qquad 0 = \begin{array}{ccc} \emptyset & \rightarrow & \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{1\} & \rightarrow & \{1\} \end{array} \qquad u = \begin{array}{ccc} \emptyset & \rightarrow & \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{1\} & \rightarrow & \{1\} \end{array}$$

und kann schon aus Anzahlgründen nicht boolesch sein. Die Anordnung ist $0 < u < 1$, das Komplement von u ist $u' = 0$, demnach $(u')' = 0' = 1$ und $u \vee u' = u$. Die Logik allgemeiner Topoi ist intuitionistisch.

Die Möglichkeiten kategorialer Logik sind beim mathematischen Publikum noch wenig bekannt, noch weniger sind es die so eröffneten Varianten und Weiterungen der klassischen Logik, und weit entfernt scheinen Anwendungen, die ich mir vor allem in einer adäquaten Beschreibung des Mikrokosmos denken kann. Vielleicht ist auch hier die mathematische Entfaltung ihrer naturwissenschaftlichen Reifikation voraus, wie im Fall der Differentialgeometrie.

24

Insofern das Außen dual ist zum Innen, wird es kategorial zu beschreiben sein durch Umkehrung der Pfeile. Dual zu Monomorphismen sind Epimorphismen, Morphismen f mit der „dualen" Kürzungseigenschaft $gf = hf \Rightarrow g = h$; im Mengenfall sind dies die surjektiven Abbildungen. Es scheint nicht unplausibel, die Arten des „Außenseins" eines Objekts, genauer des „Außer-sich-Selbst-Seins" in erster Annäherung wenigstens durch die Varietät seiner möglichen Bilder zu fassen. Dual zum SOC kann man einen IC, einen „Abbild-Klassifikator" definieren, indem man die Pfeile umkehrt, „monomorph" durch „epimorph" und „Endobjekt" durch „Anfangsobjekt" ersetzt. Hat eine Kategorie $\mathcal{C}$ einen SOC, dann hat die duale Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ einen IC. Dual zur Mengenkategorie ist, vermöge des kontravarianten Potenzmengenfunktors P, die Kategorie der vollständigen atomaren Booleschen Algebren. Es wird $P(\{1\}) = \{\emptyset,\{1\}\}$ und $P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, dual zur Mengenabbildung $tr\colon \{1\} \rightarrow \{0,1\}$ ist $P(tr)\colon P(\{0,1\}) \rightarrow P(\{1\})$, und für jeden surjektiven Morphismus $f\colon M \rightarrow N$ vollständiger atomarer Boolescher Algebren gibt es genau einen „charakteristischen“ Morphismus $P(\{0,1\}) \to M$ derart daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P(\{0,1\}) & \to & P(\{1\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & N \end{array}$$

cocartesisch oder ein Fasercoprodukt ist (die Definition dieses Morphismus bleibt dem interessierten Leser als Aufgabe überlassen). Auf den ersten Blick mag es übrigens scheinen, als ob die Dualisierung „mehr Struktur“ erzeuge, da $P(\{0,1\})$ doppelt soviele Elemente hat wie $\{0,1\}$; das wird kompensiert dadurch, daß Morphismen Boolescher Algebren anders als Mengenabbildungen algebraischen Restriktionen unterliegen, z.B. stets Null auf Null und Eins auf Eins abbilden müssen [17].

Die Dualisierung verläuft automatisch, wenn man zur dualen Kategorie übergeht. Eine ganz andere Antwort erhält man, wenn man *innerhalb von* $\mathcal{M}$ nach einem IC fragt. Bezeichnen wir diesen mit X, so muß dem Pfeil tr: $\{1\} \to \{0,1\}$ ein Pfeil $X \to \emptyset$ entsprechen, denn $\emptyset$ ist Anfangsobjekt von $\mathcal{M}$, und es folgt daß $X = \emptyset$ sein muß, eine Absurdität. Das zeigt, daß die Dualität von „injektiv“ und „surjektiv“ in der Mengenkategorie ihre Grenzen hat. Dies wird noch deutlicher, wenn man Teilmengen und Bildmengen explizit beschreiben will. Ist M eine Menge mit n Elementen, so kommen alle Mengen mit höchstens n Elementen als Teilmengen wie als Bildmengen vor; aber es ist eine ganz andere Aufgabe, die k-elementigen Teilmengen von M anzugeben, als die Partitionen in k Teilmengen (welche die Fasern einer Abbildung auf eine Menge mit k Elementen sein müssen); schon die Anzahlformel ist für die letzteren schwieriger [18]. Allgemein scheinen die „Co-Topoi“ nicht entfernt so bedeutsam zu sein wie die Topoi. Darin liegt ein Aspekt der Asymmetrie von Außen und Innen, der sicherlich weitere Aufklärung verdient.

25

Innen und Außen werden durch den Rand voneinander geschieden, und wie sie hat auch dieser Begriff primäre und metaphorische Verwendungen. Letztere sind oft mit einer gewissen Unschärfe verbunden: „am Rande der Gesellschaft“, „am Rande des Erträglichen“, allgemeiner „Randphänomene“ - es ist nicht ganz klar, ob sie dazugehören oder nicht (wie wir gleich sehen werden, liegt das in der Natur dieses Begriffs). Auch der primäre Gebrauch hat seine Eigenheiten. „Am Rand des Abgrunds“ meint immer *vor* demselben, der Kelchesrand ist nur ein kleiner Teil dessen, was man mathematisch als den Rand dieses Gegenstands ansehen müßte. Für „Rand“ kann oft, aber nicht immer „Grenze“ eingesetzt werden; mit diesem Begriff verbindet sich leicht die Vorstellung eines entschiedeneren Abschlusses, wie in „Grenzen setzen“; er setzt stets ein Jenseits voraus, gegen das es abzugrenzen gilt, während „Rand“ mehr neutral den Ort bezeichnet, an dem etwas aufhört oder anfängt. Von „Grenzbereich“ sprechen wir eher, wenn wir uns der Grenze von innen nähern, wie bei „Grenzerfahrungen“.

Die einfachste Mathematisierung des Inseins, die Mengeninklusion, kann den Rand nicht fassen; dazu bedarf es der Einführung einer Topologie (was freilich mittels Mengenbegriffen geschieht und nicht schwierig ist). Der Rand ∂Y eines Unterraums Y des topologischen Raumes X besteht aus den Punkten von X, deren sämtliche Umgebungen sowohl Punkte aus Y enthalten als auch solche, die nicht in Y liegen. Der Unterraum heißt abgeschlossen, wenn er seinen Rand enthält, offen, wenn er zu seinem Rand disjunkt ist. Dieser Randbegriff kommt mit dem intuitiven überein: liegt ein Punkt auf dem Rand des Würfels, enthält jede (auch noch so kleine) Kugel, deren Mittelpunkt er ist, sowohl Punkte des Würfels als auch solche des umgebenden Raumes, und umgekehrt muß ein Punkt mit dieser Eigenschaft auf dem Rand liegen, denn liegt ein Punkt innerhalb oder außerhalb des Würfels (hat also einen positiven Abstand zum Rand), dann liegt eine genügend kleine Kugel, deren Mittelpunkt er ist, auch noch ganz im Inneren oder ganz im Äußeren [19].

Diese Überlegung hängt nicht davon ab, ob wir den Rand zum Würfel rechnen oder nicht, und das wird zum entscheidenden Problem, wenn wir die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ vor das Urteil der Intuition stellen. Rechnen wir den Rand zum Würfel, ist dieser abgeschlossen, der ihn umgebende Raum offen; rechnen wir ihn zum Raum, verhält es sich umgekehrt. Intuitiv werden die meisten die erste Option wählen, doch mit welcher Begründung? Vielleicht weil er (etwa hölzern) von größerer Festigkeit ist als die Luft? Aber wenn er auf der (ebenfalls hölzernen) Schreibtischplatte liegt, wem gehört dann der Rand? Man sieht, daß sich hier ausweglose Aporien auftun. Auch die Physik hilft nicht weiter; weder irgendwelche Elementarteilchen noch die von ihnen getragenen Kraftfelder kann man mit Plausibilität für randkonstituierend erklären. Der Rand ist eine mathematisch-logische Fiktion, keine irgendwie antreffbare Entität [20], die wir gleichwohl nicht entbehren können. Denn der Rand ist der Ort, an dem das sehende Auge und die tastende Hand Widerstand erfahren, und es ist diese Widerständigkeit, die für uns die Gegenständlichkeit erst konstituiert. Ich sehe, genau genommen, nicht den Würfel, sondern seinen Rand (und nur teilweise); ein vollkommen durchsichtiger Gegenstand wäre unsichtbar. Es hat etwas Paradoxes, daß wir nur räumlich Ausgedehntes wahrnehmen können, unser wichtigster Sinn, der Gesichtssinn, aber nur eine zweidimensionale Projektion liefert. Bemerkenswert ist in diesem Kontext, daß beim Begriff einer Mannigfaltigkeit mit Rand dieser intrinsisch definiert ist, insbesondere unabhängig von Einbettungen in einen umgebenden Raum; er besteht aus denjenigen Punkten, die Halbräume als Umgebungen haben.

Hier sollte auch vermerkt werden, daß Gehör, Geruch und Geschmack keine Ränder und damit kein Innen und Außen kennen; es gibt nur Schwellen der Wahrnehmbarkeit. Höchstens metaphorisch kann man vom Innern eines Klangs sprechen. Klänge können sich überlagern und einen Gesamtklang bilden, dabei jedoch einzeln wahrnehmbar bleiben (die raison d´ etre polyphoner Musik). Mischt man dagegen Farben, entsteht *eine* neue Farbe, die ihre Bestandteile nicht mehr erkennen läßt. Verschmelzung von Gestalten ist im strikten Sinne gar nicht möglich; wo doch davon die Rede ist, wie in der Kunstbetrachtung, sind einzelne Gestaltmomente zu einer neuen Gestalt zusammengesetzt, aber die ursprünglichen Gestalten eben nur noch als Momente vorhanden. Dementsprechend wird eine Mathematik der Klänge von kombinatorischem, nicht topologischem Charakter sein.

26

Für unsere Wahrnehmung tritt also der Rand als Repräsentant des Gegenstandes auf, und dies ist mathematisch ohne weiteres nachzuzeichnen. Es ist nicht schwer, das Innere eines räumlichen Kompaktums unter Heranziehung des Normalenbündels auf dem Rand zu charakterisieren; ist der Körper konvex, ist das Innere einfach die Vereinigung aller Verbindungslinien aller Paare von Randpunkten. Der Rand „leistet“ aber noch viel mehr. Es ist intuitiv plausibel, daß es möglich sein wollte, einen Flächeninhalt anhand der Kenntnis seiner Berandung zu ermitteln; hinter dem von Gauß ersonnenen Verfahren steckt ein gleichfalls von ihm stammender Integralsatz, der seinerseits ein Spezialfall des Stokesschen Satzes ist: unter geeigneten Voraussetzungen kann Integration über das Innere ersetzt werden durch Integration über den Rand. Der einfachste Fall ist der „Hauptsatz“ der elementaren Infinitesimalrechnung: die Fläche unter einem Funktionsgraphen (= Integral der Funktion über ein Intervall) ist die Differenz der Werte einer Stammfunktion an den beiden Intervallgrenzen (= Integral der Stammfunktion über den Rand). Eine andere Anwendung ist eine Art Erhaltungssatz: betrachtet man eine (inkompressible) Strömung in einem kompakten Raumabschnitt, so ist wieder intuitiv klar, daß der Fluß über den Rand die Ergiebigkeit der im Innern vorhandenen Quellen und Senken wiedergibt; die mathematischen Präzisierung ist der Divergenzsatz. Eine weitere Anwendung des Gaußschen Satzes ist, daß die Werte, die eine harmonische Funktion im Innern annimmt, schon durch die Werte auf dem Rand ausgedrückt werden können, insbesondere also durch sie bestimmt sind; dasselbe gilt für holomorphe Funktionen in der Ebene (Cauchysche Integralformel). Beeindruckend schlicht faßt die Formel von Stokes in ihrer allgemeinsten Fassung

$$\int_S d\,\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Sachverhalte zusammen, die für die Intuition nur in ganz einfachen Fällen deutlich, im allgemeinen bestenfalls Ahnungen sind, deren strukturelle Einheit aber von keiner Intuition antizipiert werden könnte. Diese „Dominierung“ des Innern durch den Rand ist sozusagen ein Gegenstück zum Innern als dem Eigentlichen und hat natürlich gewisse Homogenitätsannahmen zur Voraussetzung. Rein liegt sie vor, wo es nur auf die Form (Gestalt) ankommt. Interessant in diesem Zusammenhang ist, daß ein Torso uns die Formidee einer Skulptur deutlicher zu zeigen scheint als eine intakte Figur; er zeigt nämlich nicht nur die Idee, sondern zugleich ihren Sieg über den Stoff, im Kontrast von polierter Haut und körniger Bruchfläche.

27

Der oben gegebene, erste mathematische Randbegriff ist sehr einfach und gestattet noch allerlei Pathologien, wie sie die Anschauung nicht kennt. Ein Unterraum kann sein eigener Rand sein; er kann einen leeren Rand haben, obwohl vom leeren wie vom ganzen Raum verschieden; der Rand kann der ganze Raum sein; das Innere eines Unterraums (diejenigen seiner Punkte, die nicht Randpunkte sind) kann leer sein, zugleich sein Abschluß (der Unterraum zusammen mit seinem Rand) der ganze Raum; ja dieser kann sogar der

Abschluß eines einzigen Punkts sein. (Der mathematisch geschulte Leser wird leicht Beispiele für all dies finden können.) Der Wildwuchs der Pathologien wird kräftig beschnitten, wenn man differenzierbare Strukturen einführt. Ist Y eine glatte Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit X, dann ist der Rand von Y eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim(Y) - 1$ (die nun allerdings Singularitäten haben kann wie Ecken, Kanten, Spitzen und ihre höherdimensionalen Verallgemeinerungen). Dies „erklärt", warum wir den Rand „selbst" nicht sehen; denn sehen können wir nur Dreidimensionales. Gleichwohl ist der Rand nicht „nichts"; als Punktmenge ist er sogar von derselben Kardinalität wie der Körper, ja der ganze Raum [21] . Ein gewöhnlicher räumlicher Gegenstand wie unsere Tasse ist mathematisch gesehen eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Es ist übrigens ein nichttrivialer, wenngleich intuitiv plausibler Satz, daß eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit *ohne* Rand nicht in den dreidimensionalen Raum eingebettet werden kann, sondern dafür eine Dimension mehr erfordert wird; so wie eine Kreislinie erst auf einer Fläche, eine (geschlossene) Fläche erst im Raum existiert.

28

Der Begriff der Grenze ist konstitutiv für Plessners Theorie von den „Stufen des Organischen", die in dreifacher Dichotomie vom unbelebten zum planzlichen, tierischen und schließlich menschlichen Dasein führt [22] . Die erste Dichotomie ist eine Charakterisierung des Lebendigen durch ein besonders Verhältnis von Außen und Innen: „Körperliche Dinge der Anschauung, an welchen eine prinzipiell divergente Außen-Innenbeziehung als zu ihrem Sein gehörig gegenständlich auftritt, heißen lebendig" (S.89). Die „Divergenz" in der Außen-Innen-Beziehung liegt im verschiedenen Verhalten zur Grenze. Hier sind zwei Fälle möglich. Im ersten Fall ist die Grenze „nur das virtuelle Zwischen dem Körper und den anstoßenden Medien, das Worin er anfängt (aufhört), insofern ein Anderes in ihm aufhört (anfängt). Dann gehört die Grenze weder dem Körper noch den anstoßenden Medien allein an, sondern beiden, insofern das Zu-Ende-Sein des einen der Anfang des Andern ist" (S.103). Dies ist der Fall des unbelebten Seins. Der unbelebte Körper begrenzt seine Umgebung ebensogut wie er von dieser begrenzt wird; es besteht kein qualitativer Unterschied in diesem wechselseitigen Grenze-Sein. (Plessners Formulierungen zeigen aufs neue die logischen Probleme des Randbegriffs, die nur mathematisch zu klären sind.)

Den zweiten Fall beschreibt Plessner so: „Die Grenze gehört reell dem Körper an, der damit nicht nur als begrenzter an seinen Konturen den Übergang zu dem anstoßenden Medium gewährleistet, sondern in seiner Begrenzung *vollzieht* und dieser Übergang selbst ist" (S.103 unten) Der erste Satz dieses Passus zeigt, daß der Körper jetzt als topologisch abgeschlossen, seinen Rand enthaltend anzusehen ist. Charakteristischer als dieser topologische Aspekt ist der dynamische, der hier angedeutet wird: der belebte Körper weist seinen Übergang zur Umgebung nicht einfach auf, er vollzieht ihn, und zwar mittels der Grenze, die also nicht als bloßer Ort eines Übergangs erscheint, sondern als Organ (Haut oder Menbran). Mathematisch läßt dies an Gleichgewichtsbedingungen denken, wie sie aus Extremalprinzipien folgen; sie decken aber das von Plessner Gemeinte nicht ab, denn solche sind auch im Bereich des Unbelebten für die Gestalt und das Bestehen von Grenzen verantwortlich, wie bei Minimalflächen. Plessner will „aus dem im Fall II gegebenen Ansatz diejenigen Grundfunktionen [..] entwickeln, deren Vorhandensein an belebten

Körpern als charakteristisch für ihre Sonderstellung geltend gemacht wird“ (S.106). Als seine Aufgabe sieht er „eine apriorische Theorie der organischen Wesensmerkmale“ (S.107), und sein Buch unternimmt den Versuch dazu „unter ausschließlicher Zugrundelegung der oben entwickelten Auffassung, daß das Phänomen der Lebendigkeit nur auf dem besonderen Verhältnis eines Körpers zu seiner Grenze beruht“ (S.121). Ein lebendiges Wesen füllt nicht einfach einen Raum aus, es *behauptet* ihn (S.131). Dieses besondere Verhältnis zum Raum nennt Plessner „Positionalität“ (S.129); sie impliziert ein ständiges Über-sich-hinaus-Sein wie auch ein In-sich-hinein-Sein. Aus der Positionalität folgt der Prozeßcharakter des Lebendigseins; ein Lebewesen vollzieht sein Dasein.

29

Die zweite Dichotomie betrifft die Organisationsformen des positionellen Daseins. Plessner unterscheidet eine „offene“ und eine „geschlossene“ Positionalität (diese Begriffe dürfen nicht mit den oben eingeführten mathematisch-topologischen verwechselt werden; jede Positionalität impliziert Geschlossenheit im topologischen Sinn). „Offen ist diejenige Form, welche den Organismus in allen seinen Lebensäußerungen unmittelbar seiner Umgebung eingliedert und ihn zum unselbständigen Abschnitt des ihm entsprechenden Lebenskreises macht“ (S.219). Sie kommt der planzlichen Seinsweise zu. Die Definition der geschlossenen Positionalität ist fast mathematisch dual, indem einfach die beiden Negationen gestrichen werden: „Geschlossen ist diejenige Form, welche den Organismus in allen seinen Lebensäußerungen mittelbar seiner Umgebung eingliedert und ihn zum selbständigen Abschnitt des ihm entsprechenden Lebenskreises macht“ (S.226) Nur bei geschlossener Form kann man von Empfindung und Handlung im eigentlichen Sinn sprechen; sie „widersprechen dem Wesen offener Form“ (S.225). Die geschlossene Form zeigt einen Ausgleich von Merken und Wirken, von passiver und aktiver Stellung gegen die Umgebung; bei der offenen überwiegt Passivität. Das einfachste Kennzeichen der größeren Selbständigkeit ist die Fähigkeit zur Ortsveränderung, physiologisch die Herausbildung eines repräsentierenden Zentralorgans (des Gehirns). Das Tier lebt „in der Relation des Gegenüber“ (S.240), in einer Position der „Frontalität“. Mathematisch denkt man hier an Vektorfelder; Plessner bedient sich gelegentlich einfacher Diagramme, die entfernt daran erinnern.

Die dritte Dichotomie schließlich gilt der geschlossenen Positionsform, die sich in die „zentrische“ des Tiers und die „exzentrische“ des Menschen gliedert; wobei die letztere eine Modifikation der ersteren darstellt und eine solche, sozusagen als Unterlage, in sich schließt. Die tierische Organisationsform heißt zentrisch, weil alle Rezeption und Aktion durch das Zentralorgan hindurchgeht. Der Übergang zur exzentrischen Position findet statt, wenn sich die Frontalität, statt gegen die Außenwelt, auch gegen die eigene Organisationsform und Positionalität richtet. Das zentrische Gefüge wird dabei nicht zerstört, sondern sozusagen überhöht durch eine Instanz, die sich zwischen Empfindung und Handlung einschaltet und die jede, theoretische oder praktische Handlung zum Gegenstand einer höherstufigen Handlung, einer Reflexion machen kann; aber auch wenn ich reflektierend die exzentrische Position einnehme, verlaufen zahlreiche Vorgänge in meinem Körper weiterhin zentrisch, von Schlaf und Ohnmacht nicht zu reden. Die zentrische Organisation können wir (wenigstens weitgehend und im Prinzip) mechanistisch verstehen, die exzentrische nicht, und zwar aus prinzipiellen Gründen [23].

Ich habe Plessners Denkansatz auch deswegen so ausführlich referiert, weil er, wie mir scheint, zur Axiomatisierung und damit Mathematisierung einlädt, denn er verbindet einen hohen Grad von Abstraktion mit deduktivem Potential. Sein Buch gipfelt in dem Versuch, aus der exzentrischen Positionalität allein die „anthropologischen Grundgesetze“ abzuleiten, nämlich das Gesetz der „natürlichen Künstlichkeit“, das der „vermittelten Unmittelbarkeit“ und das des „utopischen Standorts“. Freilich, so bedeutend die Einsichten sind, zu denen er dabei gelangt, so wenig läßt sich sagen, daß die Deduktionen logisch stringent sind. Auch wo die Ordnung der Begriffe überzeugt, ist sie keine mathematische, ist nicht *ordo geometricus.* Das ist nicht als Kritik gemeint; eher als Hinweis auf noch zu bewältigende Aufgaben.

Die Theorie von der exzentrischen Position des Menschen führt uns zu der zweifellos wichtigsten und schwierigsten Frage, die im Skopus unseres Themas liegt (und die wir oben auch schon angesprochen haben), nämlich der nach dem In-Sein des Ich in seinem Leib. Wir können sie im Rahmen dieses Aufsatzes schon deswegen nicht behandeln, weil ein adäquater Begriff vom Ich fehlt. Genauer: Unsere Ich-Konnotationen enthalten Momente des Abstrakten und des Konkreten, von Funktion und Person, von Substanz und Prozeß, die in ihrer Gesamtheit offenkundig inkonsistent sind, während jede Festlegung auf einzelne dieser Momente unvollständig bleiben muß. An mathematischen (und teilweise schon mathematisierten) Aspekten mangelt es nicht. Das Ich als wahrnehmendes impliziert eine zeitlich variable Verteilung von Aufmerksamkeit über den Leib (diese auf bestimmte Leibpartien zu fokussieren, gehört übrigens zu den yogischen Übungen). Das Ich als handelndes ist teilweise zu fassen als Substruktur in der hardware „Gehirn“; verschiedene Ich-Funktionen, die Übersetzung von Sachverhalten in propositionale Gehalte, dann das theoretische Bearbeiten dieser Gehalte, das Suchen, Ordnen, Schließen, Planen sind offenkundig mathematikfähig und in verschiedenen elektronischen Hilfsmitteln der heutigen Lebenswelt längst installiert; natürlich stets innerhalb wohldefinierter Grenzen und ohne die für die Ichheit charakteristische Offenheit. Nicht nur mathematisch dunkel bleiben die Ich-Aspekte der vollen Reflexivität, die sich zu jedem Gehalt in Distanz setzen kann, und die Jemeinigkeit im Ich-Denke, das unsere Vorstellungen begleitet. Aber damit verlassen wir unser Thema.

Anmerkungen und Nachweise

1) G.C.Lichtenberg, Von dem Nutzen, den die Mathematik einem bel esprit bringen kann, Werke in 2 Bänden, Frankfurt/M 1970, Bd.2, S.9ff.

2) Siehe dazu meinen Aufsatz „Mathematik und Determinismus“, Hamburger Beiträge zur Mathematik (2009).

3) Siehe etwa H.Zimmer, Philosophie und Religion Indiens, Frankfurt/M 1973, M.Eliade, Yoga, Frankfurt/M 1988.

4) Das Problem ist kategorialer Natur, erhellend vielleicht eine kleine Querdenkerei im

Stile von Karl Valentin: „In der Tasse ist ein Sprung, die Tasse ist im Schrank, also ist im Schrank ein Sprung." Das räumliche In ist transitiv, aber die nicht-räumliche Beimischung zerstört die Transitivität.

5) Metaphorisch ist auch „in der Zeit sein"; unsere Beziehung zur Zeit ist eine vollkommen andere als zum Raum, wenigstens solange man die Zeit nicht zur Zeitachse verräumlicht. Das räumliche In bezeichnet eine zweistellige Relation, A ist in B, dazu haben wir kein zeitliches Pendant. Analog wäre etwa „Der Vorgang A findet während des Vorganges B statt"; aber das wird niemand als in Insein von A in B auffassen, wenn nicht A noch in irgendeinem andern Sinn Teil von B ist. Ich verweise auf meinen Aufsatz „Das kategoriale System und der Ort der Mathematik", Hamburger Beiträge zur Mathematik, Nr.246 (2006).

6) Sein und Zeit, Tübingen 1979, besonders § 12 und § 28; S: 132: „...das In-Sein nicht als eine durch das Vorhandensein von „Welt" bewirkte oder auch nur ausgelöste Beschaffenheit eines vorhandenen Subjekts; das In-Sein vielmehr als wesenhafte Seinsart dieses Seienden selbst". Gegen Heideggers Versuch, das „In" auf das „Bei" zurückzuführen (S.54), ist jedoch einzuwenden, daß das (räumliche) In eine antisymmetrische und transitive Relation ist, also vom Ordnungstyp, während das Bei symmetrisch und meistens nicht transitiv ist, zur Äquivalenzbildung nur tendiert; das ist ein unüberbrückbarer struktureller Unterschied. Selbst wenn die von Heidegger beigebrachte Etymologie korrekt ist, beweist das nur, daß sich das Verständnis des Ausdrucks seither verändert hat. Auszugehen ist aber vom Gegenwärtigen.

7) Siehe etwa M. Greenberg, Lectures on Algebraic Topology, Reading/Mass., 1967, § 18.

8) Man beachte aber, daß das „in" bei „integriert" kein räumliches ist, sondern ein lateinisches privativum (wie bei intactus, unberührt).

9) Merkwürdig übrigens, daß das Pendant zum Außenseiter im Deutschen fehlt.

10) „Allerdings", Hamburger Ausgabe Bd. I S.359; im selben Gedicht heißt es noch: „Natur hat weder Kern noch Schale, alles ist sie mit einem Male". In einem andern, nicht weniger bekannten Wort Goethes freilich erscheint das Innere als das Eigentliche: „Lasset Bild und Lied zerfallen / doch im Innern ists getan." (Wilhelm Tischbeins Idyllen, a.a.O. S.376). Es bleibe dem Leser überlassen, über die Wesensart dieses Innern, in welchem offenbar Gedachtes oder Gewolltes in irgendeinem Sinne aufgehoben ist, nachzusinnen; gern würden wir natürlich einen Blick hineinwerfen.

10a) Für die Heytingalgebren siehe S.MacLane/I.Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer-Verlag 1992; auch unten Abschn. 23. Längere aufsteigende Ketten „echt dialektischer" Schritte kann es übrigens nicht geben, weil in einer Heytingalgebra stets $N = N^3$ ist. Ich habe aber ein Beispiel für eine partiell geordnete Menge mit einem „Negationsoperator" N, für den stets $x \leq N^2(x)$ *oder* $N^2(x) \leq x$ gilt, und für den es unendliche Ketten $x < N^2(x) < N^4(x) < \dots$ gibt.

11) Dies hat übrigens Ernst Jünger in seinem Roman „Heliopolis" (1949) mit der Idee vom

„Punktamt“ antizipiert, wie auch mit seinem „Phonophor“ das heute allgegenwärtige Gerät. Sein „Luminar“ (aus dem späteren „Eumeswil“) ist das Internet, wie wir es in ein paar Jahren haben werden.

12) Eine deutsche Bezeichnung ist mir nicht bekannt.

13) Dieser Begriff soll unerörtert bleiben, weil wir keinen weiteren Gebrauch von ihm machen. Für alles (mathematisch-) Kategoriale sei verwiesen auf MacLane/Moerdijk, Anm. 10a; dort findet man auch (Kap. I.4) eine Diskussion unserer (und vieler weiterer) Beispiele.

14) Der SOC klassifiziert *nicht*, wie der unglücklich gewählte Terminus suggeriert, die Isomorphieklassen von Unterobjekten, wie man schon am Mengenfall sieht: die möglichen Teilmengen einer Menge M sind alle Mengen N mit $\mathrm{card}(N) \leq \mathrm{card}(M)$.

15) Siehe R.Spitz, Yes and No, New York 1953.

16) Vom Vorrang der Morphismen über die Objekte, in: Beiträge zu einer Philosophie der Mathematik, Leipziger Universitätsverlag 2002.

17) Die Booleschen Algebren bilden eine gleichungsdefinierte Kategorie; sie ist damit algebraisch im Sinn von Lawvere.

18) Bemerkenswert auch: injektiv ist gleichbedeutend mit Existenz einer linksinversen Abbildung, surjektiv gleichbedeutend mit Existenz einer rechtsinversen. Aber der Beweis der ersten Äquivalenz ist konstruktiv möglich, während die zweite das Auswahlaxiom erfordert.

19) Hier verdient bemerkt zu werden, daß der Operator, der jeder Teilmenge ihren Rand zuordnet, zur Konstitution der Topologie benutzt werden kann, wie auch die Operatoren „Inneres“ und „abgeschlossene Hülle“. Eine geeignete Axiomatik findet man bei N.Sharma, V.Kant, Topology, Meerut (Indien) 1979.

20) Querdenkerei im Stile von Morgenstern: „Ein Rand geht einsam durch die Welt...“

21) Alle Mannigfaltigen aller Dimensionen (mindestens 1) haben die Kardinalität des Kontinuums; das folgt leicht aus Standardsätzen der Kardinalzahlarithmetik.

22) H.Plessner, Die Stufen des Organischen und der Mensch, de Gruyter, Berlin 1975. Das 1928 erschienene Buch scheint kaum angemessen rezipiert worden zu sein, stand vielleicht zu sehr (jedenfalls zu Unrecht) im Schatten der gleichzeitigen Werke von Scheler und Heidegger.

23) Siehe meinen Aufsatz zum Determinismus, Anm. 2.