

Hamburger Beiträge zur Mathematik

Nr. 997, Oktober 2025

Die Mathematik in der Geistesgeschichte

von Ernst Kleinert

Die Mathematik in der Geistesgeschichte

Übersicht (die Zahlen bedeuten die Abschnitte des Textes)

1 – 3 Die Aufgabe, Mathematik als objektiver Geist

4 – 6 Historischer Abriß bis zum 19. Jahrhundert

7 – 9 Hilbertsche Axiomatik, Vergleich mit Platon, heutige Ausbreitung der Mathematik

10 – 11 Zwei Charakteristika heutiger Mathematik

12 – 14 Mathematisch-metamathematische Begrenzungen

15 – 17 Mathematik und Lebenswelt

18 – 26 Besprechung einiger „Millenium Problems“ und weiterer aktueller Probleme
(25: die abc-Vermutung)

27 – 30 Kombinatorik

31 – 34 Mathematik als Denkprothese und Gefahr

35 – 37 Tieferlegung der Fundamente? Mengen vs. Kategorien,

38 – 40 Ausblick.

Anhang: Mathematik als Wissenschaft vom Unendlichen

Einleitung, A – C Das Unendliche bei den Griechen, D Unendlichkeit bei Mengen, E Unendlichkeit von Typen, F strukturelle Unendlichkeit, G Kategorientheorie als Ordnungswissenschaft, H Zum Kontinuum, I Asymptotik, J Universelle Objekte, K – L Solitäre, M – O Die Spannung zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen, Resumé.

Anmerkungen und Nachweise

Wenn eine Tierart ihre Höhlen oder Nester verließ, sich feste Wohnstätten baute, ihre Nahrung züchtete, statt sie zu sammeln oder zu jagen, dazu Gerätschaften und Maschinen konstruierte, schließlich eine Wissenschaft entwickelte, Philosophie und Kunst, dann würde ein Zoologe wohl urteilen, daß sich die Gattung verändert habe. Homo sapiens hat, wie es scheint, über viele tausend Jahre hinweg seine organische Konstitution nicht mehr verändert. Wie aber schon der Name sagt, ist die sapientia, und das meint hier die Fähigkeit zu reflektiertem theoretischem Agieren, die uns nach allgemeiner Ansicht von den Tieren unterscheidet, ebenfalls konstitutiv für die Gattung; demnach gehört, wie Günter Dux es ausgedrückt hat, Geistesgeschichte zur Gattungsgeschichte ¹. „Geistesgeschichte“ meint hier weniger die Geschichte der Erzeugnisse jener Fähigkeit als die der Fähigkeit selbst, die natürlich von den ersteren nicht unabhängig ist: sie entwickelt sich beim Studium früherer Erzeugnisse und durch die weitere Arbeit an den Problemen. Der Weg von den Mythen früher Völker bis zu den Denkmöglichkeiten der Moderne entspricht dem von den Höhlen zur modernen Lebenswelt.

Man wird einwenden: Aber bestanden diese Möglichkeiten nicht immer schon? Hat sich nicht gezeigt, daß ganze Populationen, aus einem archaischen Zustand in den modernen transferiert, innerhalb weniger Generationen integriert werden können? Überspringt nicht jede einzelne Ontogenese ganze Jahrtausende? Die Antwort liegt nahe: es ist unendlich viel leichter, Geschaffenes zu rezipieren, als Vergleichbares selbst zu schaffen. Die zugrundeliegende phylogenetische Tatsache hat eine einfache soziologische Erklärung: Wie Dux darlegt (S.25), führt die Sozialisation, und damit auch das übliche Lernpensum, zu jedem Zeitpunkt nur soweit, daß selbständige Lebensführung möglich wird. Im Altertum brauchte man dafür nur sehr wenig Mathematik, nicht mehr als heute die ersten Grundschuljahre erbringen, und daran hat sich über lange Zeit nichts geändert. Hätte man den neugeborenen Archimedes (vorwärts zeitreisend) ins Europa des 18.Jahrhunderts entführt und dort aufgezogen, hätte er die gerade entstandene Infinitesimalrechnung ohne Zweifel mühelos erlernt und ihre Entwicklung mit seinem Namen verbunden. Ob man sie (rückwärts zeitreisend) dem erwachsenen Archimedes hätte erklären können, muß fraglich bleiben. Zu dem, was man von Spengler lernen kann, gehört die Einsicht, daß alle vormodernen Kulturen – jede eine Neuentdeckung des Geistes – einen *spezifischen*, also auch begrenzten geistigen Horizont hatten, einen Rahmen für alles Denken und Spekulieren, und daß dieser Rahmen uns Heutigen fremder ist, als uns scheinen mag (und das gilt auch vom klassischen Altertum). Es gab immer Einzelne, die „ihrer Zeit voraus“ über diesen Rahmen hinausdachten, aber dafür gibt es Grenzen. Auch dem größten Geist ist es nicht gegeben, sich über *alle* Beschränkungen des Zeitalters hinwegzusetzen, dem er entstammt und in dem er folglich auch seine geistigen Wurzeln hat; schon die Muttersprache lenkt, wie W.v.Humboldt erkannte, den Blick auf die Dinge und ihre Ordnungen in bestimmte Bahnen. Vollends muß alles, was Schule machen will, sich in

diesem Rahmen halten, dessen Bestehen mit dem des jeweiligen Gemeinwesens verknüpft ist und seine Schicksale teilt. Das ist einer der Gründe für die Langsamkeit des Gesamtgangs, verglichen mit den Höhenflügen der Großen.

Die Denkmöglichkeiten haben sich also, anders als die organische Konstitution, durch die verschiedenen Kulturen hindurch und mehr oder weniger abhängig von Vorgängern fortentwickelt, besser vielleicht: entfaltet, bis hin zur jetzt sich abzeichnenden, in manchen Bereichen, wie dem der Wissenschaft, schon verwirklichten Weltkultur, die alles Alte in sich aufnimmt, soweit es noch greifbar ist, sei es auch nur in musealer Weise. Dabei hat sich vor die geistigen Horizonte früherer Zeiten eine elektronisch ausgestaffierte Lebens- oder Erlebniswelt geschoben, die alles, was in jenen Transzendenz war, als etwas Veraltetes und Überwundenes erscheinen läßt. Die Entwicklung, und damit die Phylogenese von homo sapiens, ist offenbar nicht abgeschlossen, im Gegenteil: es kommen Dinge in Sicht oder werden ahnbar, die alles Heutige noch einmal ebenso überholen könnten, wie dieses das Alte überholt hat; man denke nur an die in jüngster Zeit dingfest gemachte Quantenverschränkung und ihre möglichen, praktischen wie theoretischen Folgen, die auf eine weitere Relativierung, wenn nicht Revolution unseres Verständnisses von Raum, Zeit und Wissen hinauszulaufen scheinen; auf Vergleichbares in der Mathematik werden wir noch eingehen. Wir stellen uns die Frage, welche Rolle der Mathematik in diesem Prozeß der Geistesgeschichte zukommt.

2

Die Essenz der Geschichte ist, nach Hegel, das „Zu-sich-selbst-Kommen“ des Geistes. Mir scheint offensichtlich zu sein, daß diese Hegelsche Formel, in formaler Allgemeinheit, einen wesentlichen Gehalt der Geschichte ausspricht; ob sie *allen* Gehalt in sich schließt, ist eine andere Frage und hier nicht zu erörtern (ich habe auch keine Antwort auf sie). Zu klären bleibt der Begriff des Geistes. In den letzten Abschnitten seiner „Enzyklopädie“ entwickelt Hegel eine Trichotomie, welche den Geist in die Formen des subjektiven, objektiven und absoluten Geistes einteilt. Der Subjektive geht uns hier nichts an, einen „absoluten Geist“ weise ich mit Kant zurück. Über eine Entität, die in einem strikten Sinn „absolut“ genannt werden kann, können wir nur spekulieren, aber nichts Positives aussagen. Die Philosophie hat solche immer wieder zu fassen gesucht, im Brahma, im Tao, im Hen, in der Substanz, doch all das sind bloße Namen; nur die Mystiker haben eine *Erfahrung*, die über unsere gegenwärtige Verfassung hinausweist auf das, was man vielleicht das Absolute nennen kann, die sie aber nicht mitteilen können; nur den Weg zu ihr können sie lehren. Immerhin beweist diese Erfahrung (die mir wenigstens nicht zweifelhaft ist), daß die Bemühung darum nicht sinnlos sein muß; nur haben wir (noch) keine Sprache für sie. Sie war bisher immer nur Sache von Wenigen, das galt aber auch einmal für Lesen und Schreiben.

Ich übernehme von Hegel den Ausdruck „objektiver Geist“, aber nicht ganz in seinem Sinne. Ich verstehe darunter „objektivierten“, also manifestierten, aufweisbaren Geist, Erzeugnisse menschlichen Bemühens, *Strukturen* theoretisch zu entwerfen und, wo möglich, in die Welt zu bringen. Solche finden sich in Staatsverfassungen, Gesetzeswerken oder Moralen (auch bei Hegel zum objektiven Geist gehörig), ferner in Wissenschaft, Philosophie und Kunst (die beiden letzteren zählte Hegel zum „absoluten“

Geist). Zu diesem objektiven Geist gehört also, und zwar in einem ausgezeichneten Sinne, die Mathematik (die in den 200 Paragraphen der „Philosophie des Geistes“ nicht einmal einen Unterabschnitt einnimmt). Das Auszeichnende zeigt sich ganz äußerlich daran, daß mathematica, soweit vorhanden und vergleichbar, in allen Kulturen übereinstimmen, sehr im Unterschied zu Kunst, Religion und Philosophie; die Menschheit hat Götter sehr verschiedener Art gesehen, aber sie kennt nur *ein* kleines Einmaleins. In diesem Sinne ist die Mathematik „absoluter“ als andere Manifestationen des objektiven Geistes, nämlich anders als diese nicht kulturspezifisch^{1a}. Der Grund dafür ist leicht zu benennen: der Mensch hat bestimmte Möglichkeiten, Welt aufzufassen, das Aufgefaßte auf Begriffe zu bringen und in theoretischer Aktion zu bearbeiten; die Gesamtheit dieser Möglichkeiten nenne ich die kategoriale Verfassung. Die Mathematik erfährt und entfaltet Gesetzmäßigkeiten, welche dieser Verfassung innewohnen; ich verweise auf meine „Mathematik für Philosophen“ für nähere Ausführungen². Weil diese Verfassung konstitutiv für die Gattung ist, also für alle ihre Mitglieder dieselbe, sind auch ihre Gesetzmäßigkeiten überall dieselben. Und aus dieser ihrer Herkunft erklärt sich ferner die – zunächst doch erstaunliche – Tatsache, daß die idealen Objekte und Sachverhalte der Mathematik geeignet sind, erfahrbare Sachverhalte und Prozesse zu modellieren und damit traktabel zu machen.

Die oberste Erkenntnisaufgabe des Menschen ist, mit den Worten von Scheler, seine „Stellung im Kosmos“ zu erkennen. Dazu gehört die Erkenntnis seiner Erkenntnismöglichkeiten, und zu diesen gehört die Mathematik. Insofern es Aufgabe der Philosophie ist, jene Verfassung zu verstehen, kann man also sagen: die Mathematik enthält den beweisbaren Teil der Philosophie.

3

Wir kommen jetzt zu unserm eigentlichen Thema, der Rolle der Mathematik in der Geistesgeschichte, und weisen wir zunächst auf einige Besonderheiten dieser Rolle hin. Ein modicum an mathematica, der Umgang mit Zahlen und Figuren auf der elementarsten Ebene, ist schon in den frühesten Formen menschlicher, also instinktberaubter Existenz unentbehrlich. Von dem Augenblick an, da ein Lebewesen bewußt planen muß und die Vorsorge nicht mehr programmiert ist, muß es auch *wissen*, daß 2 mal 2 dasselbe ergibt wie 3 plus 1. Diskrete Quantität ist ubiquitär, damit auch die Notwendigkeit, mit ihr umzugehen. Sodann: über den Wahrheitsgehalt mathematischer Aussagen kann es nie längere Unsicherheit geben; auf der frühesten Stufe sind sie jederzeit nachprüfbar; dasselbe gilt von dem Augenblick an, da es Axiomatik und damit Beweise gibt. Man kann dann wohl Vermutungen hegen, deren hypothetischer Charakter jedoch klar bleibt, auch wenn man von der Richtigkeit noch so überzeugt ist. Wie es scheint, hat es in solchen Fragen fast nie längeren Dissens gegeben; so hat man das methodische Problem des Parallelenaxioms von Anfang an gesehen³. Und schließlich: wir haben (soweit ich sehe) nirgends eine Nachricht über bedeutende, aber verlorengegangene mathematica; wo einzelne Resultate nicht mehr greifbar sind, kennen wir wenigstens die Methoden und können abschätzen, wie weit man damit kommen konnte. Wir wissen nicht genau, auf welchem Wege die Pythagoreer das Irrationale entdeckt haben, aber wir können plausible Rekonstruktionen angeben. Kaum vorstellbar erscheint, daß unser heutiges Wissen, in tausenden von Bibliotheken und Dateien rund um den Globus gespeichert, einmal

verloren gehen könnte. Am nächsten kommt diesem (fast) rein akkumulierenden Gang der Mathematik weniger die Naturwissenschaft, die lange auf Spekulation angewiesen war und erst in der Neuzeit, mit der Verbindung von Theorie und Experiment, den „sicheren Gang der Wissenschaft“ gefunden hat, sondern die Philosophie. Zwar haben wir von den Vorsokratikern nur Fragmente und spätere Referate, aber ihre Grundgedanken sind einigermaßen kenntlich. Einige der wichtigsten Denker, Buddha, Konfuzius, Sokrates, haben ihre Lehren nicht einmal aufgeschrieben, sondern nur mündlich verbreitet; dennoch ist von ihren großen Konzepten keines „überholt“. Die „wesentlichen Denker“ sagen zwar nicht, wie Heidegger im Humanismusbrief meint, stets „das Selbe“, aber es geht ihnen allen um die Grundfragen, wie Kant sie zusammengefaßt hat. Zum Kontrast blicke man auf die Kunst: große Werke sind jederzeit möglich, auch sie verlieren nie etwas von ihrer Größe und werden auch nie überholt. Aber Stile entwickeln sich und erlöschen auch wieder, und deswegen gibt es keinen Ersatz für das Verlorene. Von der restlos verschwundenen klassischen Malerei der Griechen, die ihnen mehr galt als ihre Plastik, von den Wunderbildern der Zeuxis und Parrhasios, haben wir gar keinen lebendigen Eindruck, nur einen fernen Abglanz, die viel späteren, aus dem Lavaschutt wiederauferstandenen Fresken römischer Villen rund um den Golf von Neapel.

4

Es folge nun ein (sehr grober) historischer Überblick. In geistesgeschichtlich ernstzunehmender Rolle finden wir Mathematik zuerst in Altbabylon. Ohne geometrische Grundbegriffe, verbunden mit einer brauchbaren Kalenderrechnung, ist keine Wissenschaft vom Sternenhimmel möglich ^{3a}. Weiter sind von dort, wie auch aus dem alten Ägypten und China, Rechenanweisungen überliefert für Aufgaben, wie sie der riesige Verwaltungs- und Vermessungsaufwand der großen Stromtalkulturen mit sich bringt ⁴. Die ihr eigentümliche Selbständigkeit, sozusagen ihren aufrechten Gang erlangt die Mathematik erst bei den Griechen, die Geometrie, Zahlen- und Proportionenlehre aus der immanenten Logik dieser Gegenstände heraus entwickeln, als Denkbereiche eigenen Rechts. Bei Euklid ist von Anwendungen gar keine Rede, dafür werden, im Unterschied zu allem Früheren, Aussagen *bewiesen*. Damit wird die Mathematik zu einer Geisteswissenschaft und gewinnt Bedeutung für die Philosophie. Für die Pythagoreer waren die (natürlichen) Zahlen die fundamentalen Ordnungsfaktoren des Kosmos, und deswegen nahmen sie die Entdeckung des Irrationalen so ernst. Ob das Verhältnis von Quadratseite und -Diagonale rational oder irrational ist, hat keine praktische Bedeutung; es ist sogar sinnlos, etwa zu fragen, was *mathematisch genau* die Höhe meines Schreibtischs ist. Die pythagoreische Idee ist aber damit nicht tot: die natürlichen Zahlen bilden immer noch die Grundlage unseres Zahlensystems (s.u. Abschnitt 33), und in der Physik des Kleinsten, seit der Entdeckung des Planckschen Wirkungsquantums, haben ganzzahlige Verhältnisse eine neue und nicht vorhersehbare Bedeutung erlangt. Platons „Timaios“ mit seiner mathematischen, in pythagoreischem Geiste entworfenen Kosmologie (reguläre Polyeder als Grundbausteine des Kosmos) war eines der einflußreichsten Bücher des Altertums und hat noch Heisenberg beeindruckt ⁵. Am sichtbarsten ist die Allherrschaft der Zahlen in der Tendenz aller neuzeitlichen Wissenschaft, Qualitäten durch Quantitäten auszudrücken, wie Farben und Töne durch Wellenlängen, wobei man (im cgs-System) mit drei Sorten auskommt, Länge, Masse und

Zeit.

Die Mathematik des klassischen Altertums kulminiert in der hellenistischen Epoche; die Zeit des Imperium Romanum hat nichts wesentlich Neues mehr hervorgebracht, den Alexandriner Diophant ausgenommen (um 250 n.Chr.), der aber auch der griechischen Tradition angehörte. Nach dem Ende Westroms wird das griechische Erbe von den Arabern verwaltet (genauer: Angehörigen der arabischen Kultur, die Spengler die „magische“ genannt hat), aus deren Händen es dann (seit dem 11.Jahrhundert) ins europäische Mittelalter gelangt, zusammen mit dem großen Beitrag der Inder, denen wir unser Positionssystem der Zahlen verdanken.

5

Zu einer geistesgeschichtlichen Großmacht wird die Mathematik jedoch erst in der Neuzeit, als man, mit den Worten von Galilei, gelernt hat, das Buch der Natur mathematisch zu lesen; damit beginnt der Aufstieg des Abendlands zur wissenschaftlich-technischen, damit auch politischen und militärischen Vormacht (eine mittlerweile ausgespielte Rolle). Vor allem die Infinitesimalrechnung triumphiert von Anfang an in Geometrie und Mechanik, später in allen Bereichen der mathematischen Physik. C.F.v.Weizsäcker nennt einmal die Naturwissenschaft den „harten Kern“ der Neuzeit; man könnte hinzufügen, daß die Infinitesimalrechnung, mit ihren Weiterungen in der Theorie der Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und Funktionalanalysis, den harten Kern dieser Wissenschaft bildet. Ebenso rapid wie diese entwickelt sich nun die Mathematik und erobert sich neue Gebiete, die über die alten Grenzen der „Zahlen und Figuren“ weit hinausführen. Als nächstes ist hier die Kombinatorik zu nennen, der wir aber, aus noch zu erklärenden Gründen, eigene Abschnitte vorbehalten (s.u. 27ff). Sodann die Wahrscheinlichkeitstheorie, die heute (in ihren elementaren Formen) zu den jedermann geläufigen mathematica gehört und schon im Schulunterricht vorkommt (unter dem wenig passenden Titel „Stochastik“). „Wahrscheinlich“ ist eine Nachbildung von „verisimilis“, „der Wahrheit ähnlich“; aber im Altertum ist (soweit ich sehe) niemand auf die Idee gekommen, diese Ähnlichkeit mathematisch zu quantifizieren, geschweige denn einen Kalkül daraus zu machen. Wenn wir von Wahrscheinlichkeit sprechen, meinen wir meistens eine Zahl zwischen 0 und 1, und wenn wir ein Ereignis für wahrscheinlich halten, dann meinen wir, daß die Wahrscheinlichkeit dafür deutlich größer ist als $\frac{1}{2}$. Bei hinreichender Kenntnis des jeweils relevanten Maßraums ^{5a} hat man damit gegen die *tyche*, das blinde Schicksal, etwas bessere Karten. Im 19.Jahrhundert entsteht die allgemeine Topologie, die ebenfalls keine Vorläufer hat: alle frühere Geometrie war Wissenschaft von Figuren im Raum gewesen, aber nicht von diesem selbst. Jetzt zeigt sich, daß die „Räumlichkeit an sich“ durch eine sehr einfache, aus dem Umgebungsbegriff entwickelte Axiomatik von erstaunlicher Anwendbarkeit ausgedrückt werden kann. Wo sie erfüllt ist, sprechen wir von einem „topologischen“ Raum; der Begriff läßt sich so verfeinern, daß er (im Begriff der Mannigfaltigkeit) nicht nur den gewöhnlichen Anschauungsraum, sondern auch alle Gegenstände in diesem erfaßt; andererseits hat er sehr anschauungsferne Realisierungen, seit langem selbst in Algebra und Zahlentheorie. Man hat das 20.Jahrhundert, in dem seine ganze Ubiquität sichtbar wurde, geradezu das „Jahrhundert der Topologie“ genannt ^{5b}.

Dem 19. Jahrhundert gehört auch die abstrakte Algebra mit dem Fundamentalbegriff der Gruppe, neben dem des topologischen Raums wohl der wichtigste Strukturbegriff der modernen Mathematik, der in allen Einzeldisziplinen seine Rolle spielt. Die *raison d'être* von Gruppen ist, auf Mengen zu operieren; dieses Konzept beherrscht schon die Kongruenzen und Symmetrien der Geometrie. Diese kannten natürlich auch die Griechen, aber sie bemerkten nicht, daß die Operationen selbst, welche kongruente oder ähnliche Figuren ineinander überführen, gewissen Gesetzen gehorchen, assoziativ verknüpfbar und umkehrbar, und damit eine „geschlossene Struktur“ bilden; so lassen sich die Symmetrien eines regulären Vielecks durch Drehungen und Spiegelungen leicht und übersichtlich beschreiben. Felix Klein hat in seinem „Erlanger Programm“ unternommen, verschiedene Arten von Geometrien durch die ihnen zugeordneten Transformationsgruppen zu klassifizieren. Daß die Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks in genauer Entsprechung („isomorph“) sind zu den Möglichkeiten, drei Gegenstände in eine Reihenfolge zu bringen, ist ohne den Gruppenbegriff nicht einmal exakt formulierbar – ein bescheidener, aber doch vielversprechender Einblick in die „Tiefenstruktur“ unserer Welt, diesfalls die kombinatorische. Seit Descartes den Raum zu einer Gruppe gemacht hat, kann man geometrische Probleme in Algebra übersetzen; ein gewaltiger Schritt, denn mit Figuren kann man nicht rechnen, wohl aber mit den algebraischen Größen, die ihnen zugeordnet sind, insbesondere ihren Koordinaten; umgekehrt lassen sich Beziehungen zwischen Größen geometrisch veranschaulichen. In jede zeitliche Beschreibung von Vorgängen geht die additive Struktur der Zeitachse ein, Grundlage für eine effiziente Dynamik. Der Gruppenbegriff enthält auch den Schlüssel für das alte Problem der Lösungen von Polynomgleichungen (Theorie von Galois), und zwar in einer den ersten Urhebern solcher Fragen unvorstellbaren Allgemeinheit. Hier ist die Einführung des komplexen Zahlkörpers zu nennen, von Gauß als algebraisch abgeschlossen nachgewiesen (als das erste solche Beispiel) und seitdem der natürliche Rahmen für die höhere Zahlentheorie und eine Infinitesimalrechnung mit besonders starken Resultaten (leicht irreführend einfach „Funktionentheorie“ genannt). Er entsteht, indem die gewöhnliche euklidische Ebene, die schon eine „natürliche“ Vektorraumstruktur trägt, mit einer Multiplikation versehen wird, derart, daß alle üblichen Rechenregeln erhalten bleiben (nur die Anordnung geht verloren); später konnte man zeigen, daß dies in keiner höheren Dimension mehr möglich ist (siehe dazu Anhang K).

Natürlich werden auch die alten Disziplinen weiter entwickelt: die Geometrie erhebt sich von Kurven und Flächen zu Gebilden beliebiger Dimension, wobei die Einbettung ins „Projektive“ diese Gebilde in befriedigender Weise „abschließt“ (siehe Anhang B); die Zahlentheorie ergreift die algebraischen Größen beliebigen Grades und entdeckt die Infinitesimalrechnung als kraftvolles Hilfsmittel. Sie kann überhaupt als die am meisten entwickelte mathematische Disziplin gelten, insofern sie (fast) alle anderen als Hilfswissenschaften zu benutzen gelernt hat. Die Mathematik, sagte Gauß, ist die Königin der Wissenschaften, und die Zahlentheorie ist die Königin der mathematischen Wissenschaften.

6

Von einem philosophischen Gesichtspunkt jedoch wird man als die wichtigste Leistung des 19. Jahrhunderts die Mengentheorie ansehen. Auf ihre Bedeutung für die Organisation

der Mathematik gehen wir unten noch ein (s.u. 11), hier soll ein anderer, vielleicht der spektakulärste Aspekt hervorgehoben werden: zu ersten Mal in der Geschichte des menschlichen Denkens werden sachhaltige, vor allem aber *beweisbare* Aussagen über das Unendliche möglich. Schon Galilei war es aufgefallen, daß es in gewissem Sinne ebenso viele gerade wie natürliche Zahlen überhaupt gibt, was doch der Anschauung zuwiderläuft; jetzt setzt sich der „richtige“ Begriff von Gleichzähligkeit (oder Gleichmächtigkeit) durch: zwei Mengen haben „gleich viele Elemente“, wenn sich ihre Elemente umkehrbar eindeutig einander zuordnen lassen ⁶. Cantors „Diagonalargument“ zeigt, daß es – in diesem Sinne – sogar ebenso viele natürliche wie rationale Zahlen gibt, was für die Anschauung eine noch viel größere Zumutung darstellt, liegen doch zwischen je zwei natürlichen Zahlen schon unendlich viele rationale. Beide Mengen sind „abzählbar unendlich“, aber die reellen Zahlen sind es nicht, wie ein weiteres Diagonalargument zeigt ⁷. Auch die Arithmetik der Mengen, mit disjunkten Vereinigungen als Addition und Mengenprodukten als Multiplikation, zeigt ungewohnte Regeln: es ist $N + N = N$, sogar $\aleph_1 = N \times N$. Schließlich entsteht eine unendliche Hierarchie von Unendlichkeiten, indem keine Menge mit ihrer Potenzmenge gleichmächtig sein kann. Auch das Unendliche hat also seine Gesetze, aber es sind andere als die gewohnten, gegen die sie leicht als „Paradoxien“ erscheinen. Es ist zunächst ein bloß quantitatives (Hegel hätte es wohl als ein „schlechtes“ Unendliches angesehen), wird aber in kategorialen Limiten, wie absoluten Galoisgruppen oder Komplettierungen, auch „strukturell unendlich“ (ich verweise auf den Anhang für eine nähere Ausführung dieses großen Themas).

7

Brachten so das 18. und das 19. Jahrhundert Durchbrüche an allen zuvor gekannten und, vielleicht noch wichtiger, einigen neu eröffneten Fronten, so liegt, für unser Thema, das Wichtigste des 20. im Methodischen (obwohl es natürlich neben einer nicht mehr überschaubaren Flut von Einzelergebnissen auch neue Entwicklungen brachte). Hier ist (als historisch Erstes) die axiomatische Methode zu nennen, wie sie von Hilbert in ihre heutige Form gebracht wurde. Die geometrische Axiomatik Euklids (genauer: Definitionen, Postulate und Axiome) bezieht sich auf Gegenstände der Anschauung, die in unmittelbarer Evidenz gegeben sind. Eine zwischen zwei Stäben gespannte Schnur zeigt, intuitiv evident, die eindeutig bestimmte kürzeste Verbindung zwischen ihren Endpunkten; der Grundsatz aller Geometrie, daß je zwei Punkte eine eindeutige Gerade festlegen, ergibt sich daraus durch die Idealisierung, daß „Punkte“ keine Ausdehnung und „Geraden“ keine Breite haben dürfen, ohne welche die Aussage unklar oder sogar falsch wird. Euklids sorgfältige, beinahe umständlich zu nennende Ausführungen zeigen ein klares Bewußtsein davon, daß der *mathematische* Gebrauch von Begriffen, die auch in der Alltagssprache vorkommen, eigene Regeln hat, die vorab zu klären sind. Aber kein Grieche wäre auf den Einfall gekommen, daß die Axiome der ebenen Geometrie Realisierungen haben könnten, die von der ursprünglichen geometrischen Intuition ganz verschieden sind (die kleinste ist eine Menge mit vier Elementen, der zweidimensionale Standardraum über dem Primkörper mit zwei Elementen; ersetzt man diesen durch den komplexen Körper, werden die Geraden, reell gesehen, zu Ebenen). Bei Hilbert wird das „Fachwerk der Begriffe“ abgelöst von seinem Ursprung, anders ausgedrückt: die Syntax von der Semantik, oder, wie die Logiker auch sagen, die Theorie von ihren Modellen;

eine Axiomatik im modernen Sinne ist ein *Aussagenschema*, dessen Realisierungen sehr verschieden sein können. Man muß nicht wissen, was Raum, Zeit und Zahl „wirklich sind“; der Mathematik genügen wenige Basisaussagen, auf die man sich einigen kann, als gemeinsamen Nenner verschiedener Auffassungen. Mathematische Sätze sind in gewissem Sinne elliptisch: behauptet wird, genau genommen, nicht der Satz, sondern daß er aus den Axiomen folgt. Dabei bleibt die Axiomatik prinzipiell disponibel, ist eher Arbeitshypothese als „letzte Wahrheit“; diese geistige Freiheit, alles in epoché zu setzen, ist die Voraussetzung für eine mathematische Logik, welche die grundsätzlichen Möglichkeiten des Mathematisierens zum Thema macht. Zum „sicheren Gang der Wissenschaft“ gehört auch, daß sie nicht nur nach vorn blickt, sondern jederzeit auch bereit ist, ihre Methoden zu revidieren. Das ist die heutige Form dessen, was man früher den „ordo geometricus“ nannte; ob es die endgültige ist, muß dahingestellt bleiben (s.u. 35ff).

8

Eine Axiomatik konstituiert eine Grundordnung von Begriffen, die für alles folgende festliegt; eine solche Ordnung herzustellen, ist der „philosophische Teil“ der Aufgabe. Das erinnert an eine Unterscheidung, die Platon im Liniengleichnis entwickelt (Pol. VI, 509ff): wie sich im Bereich des Wahrnehmbaren die Gegenstände von ihren Abbildern unterscheiden, so im Bereich des Denkbaren die Ideen von den mathematica. Die Mathematiker, so heißt es 511b, gehen von Voraussetzungen aus (*hypothesis* = wörtlich: Unterstellung), aus denen sie allerhand ableiten, die sie aber nicht mehr hinterfragen (und das auch gar nicht können, wie er 511a zu konzedieren scheint), während das „dialektische“, das eigentlich philosophische Denken nach dem „Nichtvoraussetzungshaften“ (*anhypotheton*), den wahren Anfängen (*archai*) strebt, die unmittelbar erfaßt werden sollen, ohne symbolische oder logische Operationen. Man wird kaum sagen können, daß bei Euklid (ein halbes Jahrhundert nach Platon) diese Forderung erfüllt ist (man denke nur an seine „Definition“ einer Geraden), a fortiori nicht in der Mathematik aus Platons Zeit; andererseits ist fraglich, ob und wie sie überhaupt erfüllbar wird. Wenn wir heute mathematische Objekte aus den Begriffen von Menge und Element ableiten, haben wir komplexe Begriffe aus einfacheren entwickelt, „Stamm Begriffen des reinen Verstandes“, wie Kant vielleicht gesagt hätte (KrV. B 107), der „Inhärenz und Subsistenz“ als erste seiner Kategorien der Relation nennt. Haben wir aber damit die einzelnen mathematica auf ihre *archai* zurückgeführt, oder haben wir nicht vielmehr mittels der Elemente des theoretischen Agierens ein Sprachspiel konstruiert, eben die Mengentheorie, in dem sie sich alle definieren und studieren lassen?

Es scheint, daß Platon in späteren Jahren seine Ideenlehre auf solche „Stamm Begriffe“ eingeschränkt hat, aber natürlich nicht nur logisch-mathematischer, sondern auch ästhetischer und ethischer Natur („das Schöne“, „das Gerechte“ und zuoberst „das Gute“). Im Siebenten Brief hält er an der Idee des Kreises fest (342b), und seine Erläuterung dazu muß hier wenigstens teilweise angeführt werden: „Wir bezeichnen etwas als Kreis, was den eben von uns angegebenen Namen führt; sein in Worten und Redeweisen ausgedrückter Begriff ist das zweite. Wo nämlich das Umgrenzende allerwärts von der Mitte gleichweit absteht, das dürfte der Begriff von dem sein, was den Namen des Runden, des Umringenden und des Kreises führt. Das Dritte ist, was da

hingemalt und wieder ausgelöscht, abgerundet und dieser Eigenschaft wieder beraubt wird; von diesem allen widerfährt dem Kreise an sich (*autos ho kyklos*), um den sich unsere ganze Rede dreht, als einem davon Verschiedenen, nichts“. Wie er schon zuvor gesagt hat, schließt sich als Viertes die Kenntnis (*episteme*) an, und „als fünftes muß man das annehmen, was da erkennbar (*gnoston*) und wahrhaft ist (*alethos estin*)“ (Übersetzung von Schleiermacher).

Was ist heute aus dem Kreis geworden? Ein Differentialgeometer würde ihn vielleicht charakterisieren als eine ebene geschlossene Kurve konstanter Krümmung, ein Gruppentheoretiker als die einzige kompakte Liesche Gruppe der Dimension Eins, ein algebraischer Geometer verallgemeinern zu dem Funktor K , der jedem kommutativen Ring R die Menge

$$K(R) = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zuordnet, wobei im Falle eines Körpers der Charakteristik 2 der Kreis zu einer Geraden entartet, die in jedem Punkt singulär ist (!), und ein Zahlentheoretiker würde die Beziehung beisteuern, die zwischen den rationalen Punkten des Einheitskreises und den Pythagoreischen Zahltripeln besteht. Noch viel allgemeiner kann, was Platon den Begriff des Kreises nennt (die Punkte mit gleichem Abstand von einem festen Punkt), für beliebige metrische Räume formuliert werden, so daß z.B. ein „Kreis“ auf einer Geraden aus zwei Punkten besteht, im dreidimensionalen Raum aber aus einer Kugelfläche; ist der Raum ein Körper mit einem nichtarchimedischen Absolutbetrag, stößt man auf die verblüffende Tatsache, daß in einem Kreis jeder Punkt Mittelpunkt sein kann. Haben wir uns mit alldem einem *anhypotheton* genähert, dem „Kreis an sich“, erscheinen die angeführten mathematica als Abbilder der Idee des Kreises, im Sinne des Liniengleichnisses? Oder haben wir nicht im Gegenteil mit all diesen Beispielen die Lage hoffnungslos kompliziert, ist nicht die ursprüngliche einfache „Idee“ in Aspekte und Verallgemeinerungen aufgelöst und in einigen Fällen kaum noch erkennbar? Wir haben auch keineswegs (und so könnte man die Forderung nach Rückgang zu einem *anhypotheton* verstehen) die von Platon als *definientia* angeführten Begriffe – Punkt, Umgebung, Mitte, Abstand – auf Ursprünge (*archai*) zurückgeführt (sind sie überhaupt hintergehbare?), sondern nur gezeigt, daß sie sich in unserem mengentheoretischen Sprachspiel, dessen Grundbegriffe aber nicht geometrischer Anschauung, sondern theoretischer Aktion entstammen, konstruieren lassen. Doch wie anders soll man sich vom Begriff her der Idee nähern, als durch Explikation aller ihm inhärierenden Möglichkeiten? So verschieden aber unsere Mathematik mit ihren Axiomen und Methoden von derjenigen Platons ist, wir werden seiner Versicherung zustimmen, daß die Bemühungen jedenfalls nicht fruchtlos sind: „Aber das Durchführen (*diagoge*) durch diese alle, welches zu jedem Einzelnen hinauf- oder hinabsteigt, erzeugt doch endlich ein Wissen des seiner Natur nach Richtigen (*eu pephykotos*) in dem seiner Natur nach Befähigten (*eu pephykoti*)“ (343e)7a.

9

Entstammten Euklids geometrische Axiome der Anschauung räumlicher Gebilde, so gehören die Begriffe von Menge und Element der Sphäre des reinen Denkens an. Mit der

modernen Axiomatik hat dieses die Mathematik ganz an sich gezogen, und sein Produkt, die „abstrakte“ Theorie, ein Gebäude aus Fiktionen, wird anwendbar auf jeden Bereich von Objekten und Sachverhalten, in dem die Axiome realisiert sind: alles, was die Theorie aus ihnen ableitet, muß in diesem Bereich geltender Sachverhalt sein; erst so wird dem Ertrag der rein theoretischen Arbeit das ganze Feld seiner Auswirkung eröffnet. Was Geltung beansprucht, muß sich einschreiben lassen in das „Fachwerk der Begriffe“, derart, daß die Geltung öffentlich ausweisbar wird; erst so wird der Geist ein „objektiver“ im stärksten Sinne, unabhängig von kulturspezifischen und individuellen Intuitionen. Diese tragen natürlich alle Inspiration mit, ja stellen sich schon beim Nachvollzug der Resultate von selbst ein, spielen aber für die Geltung keine Rolle, sondern fungieren gewissermaßen als Trittsteine für den Gedanken.

Aber noch mehr: Mathematik wird nicht mehr, wie in ihren Anfängen, durch spezifische Gegenstände definiert, sondern durch ihre Methode: überall da, wo ein Bereich von Objekten sich genügend scharf begrifflich fassen läßt und Beziehungen aufweist, denen ein konstruktiv-deduktives Potential innewohnt, kann Mathematik entstehen⁸. Diese wird damit zu einer allgemeinen Strukturwissenschaft, der allgemeinsten, in der strenge Definitionen und Beweise möglich sind; erst damit ist der ganze Bereich ihrer Zuständigkeit erschlossen, freilich auch der ihrer Aufgaben. Noch nie gab es soviel Mathematik, und noch nie hatte sie so viel zu tun. Naturgemäß erforscht man vorzugsweise solche Strukturen, die vom aktuellen Stand betrachtet ein besonderes, praktisches oder theoretisches Interesse haben. Aber das Gesamtgebäude ist offen für alles, was die genannten Voraussetzungen erfüllt, und es kann kein Zweifel bestehen, daß noch vieles Eingang finden wird, wofür wir heute noch keine Namen haben. Wir können schon manches nennen, wovon frühere Zeitalter die Mathematikfähigkeit sich nicht hätten vorstellen können: eine Mathematik der Spiele, der Systeme, des Regelns, aber auch des Chaos; die Fraktalmathematik realisiert sogar eine der phantastischsten Ideen, nämlich die von Leibniz in der Monadologie (64, 67) entwickelte, daß das Ganze noch im Kleinsten enthalten ist (was sich allerdings mit den heutigen Vorstellungen vom Aufbau der Materie kaum vereinbaren läßt). Die Mathematik hat zahlreiche Denkmöglichkeiten zu Denkwirklichkeiten gemacht, vage Spekulationen ungewisser Konsistenz zu Gedankengebäuden vollkommener Strenge aufgeführt, deren Konsistenz zurückgeführt ist auf die unserer Grundbegriffe. Das ist die größte uns erreichbare Gewißheit, die freilich auch keine „absolute“ ist, aber mit der wir stehen oder fallen. Die „schöne Welt“ der Pythagoreer war ein kühner Vorstoß, erwies sich aber als sachlich und methodisch zu einfach; sie wird vom und im Geiste neu erbaut, und schöner und größer, als sie je war⁹. Damit ist die Rolle der Mathematik in der Geistesgeschichte formal bezeichnet; im folgenden soll näher beschrieben werden, wie sie ihr gerecht wird.

10

Ein „struktureller“ Grund für die Begrenztheit aller vormodernen Mathematik liegt darin, daß sie immer nur konkrete Objekte unserer Anschauung, eben Zahlen und Figuren, zu Gegenständen gemacht hat, aber nicht die Formen des theoretischen Agierens selbst, die wir auf reale und ideale Objekte anwenden. Die (soviel ich sehe) einzige Ausnahme davon bildet die Proportionenlehre, die geniale Tat des Eudoxos, deren mathematisches Potential die Griechen jedoch nicht gesehen, jedenfalls nicht entwickelt haben, aus

Gründen, über die wir nur spekulieren können ¹⁰. Zunächst ist hier der Begriff der Relation zu nennen, mit dem Spezialfall der Funktion, dessen Allgegenwärtigkeit im theoretischen Agieren schon des Alltags nicht ausgeführt zu werden braucht; auf Schritt und Tritt fragen wir, wie Sachverhalte voneinander abhängen und auseinander hervorgehen; alles Erkennen ist ein Beziehen, wie die Philosophie seit langem weiß ¹¹. Erst Relations- und Funktionsbegriffe, deren Elemente heute der mathematische Novize erlernt, erschließen uns die Möglichkeit, Zusammenhang und Einheit der Welt *mathematisch* zu fassen. Sie mathematisch zu ergreifen und zu entwickeln, blieb der Neuzeit vorbehalten; das ist vielleicht das stärkste Beispiel für den Unterschied (Spenglersch gesagt) zwischen „apollinischer“ und „faustischer“ Mathematik. Einen der Gründe dafür können wir nennen: eine effiziente mathematische Beschreibung von Prozessen, also Zuständen als Funktionen der Zeit, setzt voraus, daß der Definitionsbereich, die „Zeitachse“, eine dafür hinreichende mathematische Struktur trägt, und das läuft hinaus auf eine Mathematik des Kontinuums. Es ist bekannt, wie die Begründer der Infinitesimalrechnung mit diesem Problem zu kämpfen hatten und sich genötigt sahen, das unendlich Kleine heranzuziehen, was ihnen den Spott Berkeleys eintrug; erst das 19. Jahrhundert brachte mit dem Limesbegriff eine befriedigende Lösung des Problems (siehe Anhang M), und erst im 20. wurden auch (in der Theorie von Robinson) die Infinitesimalien mathematikfähig und ihre Erfinder nach 250 Jahren logisch salviert (wofür übrigens die mathematische Entwicklung der Logik erforderlich war).

11

Als stärksten einheitstiftenden Begriff hat das 19. Jahrhundert den der Menge in die Mathematik gezogen; doch erst das folgende hat, namentlich durch die Arbeit des Bourbakikreises, die große Vereinheitlichung gebracht, die heute Grundlage fast aller Mathematik ist: alle mathematischen Gegenstände können als Mengen konstruiert werden, nicht allein „konkrete“ Objekte wie Zahlen und Figuren, sondern auch die Beziehungen zwischen ihnen: eine Zahl a (sagen wir, eine natürliche), ist größer als eine Zahl b , wenn das geordnete Paar (a,b) ein Element der Teilmenge von $N \times N$ ist, die durch die Größenbeziehung definiert ist; in dieser extensionalen Weise können Relationen, insbesondere Funktionen als Mengen gedacht werden; so kommt auch ihnen eine Kardinalzahl zu. Daß es so ein gemeinsames Dach für alle mathematica gibt, macht es erst möglich, von einer Einheit der Mathematik zu sprechen, und diese wirkt sich dadurch aus, daß verschiedene Disziplinen, etwa Topologie, Algebra und Analysis, untereinander anwendungsfähig sind. (Die mathematische Kategorientheorie erlaubt es, den Mengenbegriff aus einem verallgemeinerten Funktionsbegriff, dem des Morphismus zu entwickeln, worauf wir unten (36) noch eingehen werden.)

Manche haben diese „Vermengung“ der Mathematik als eine Art feindlicher Übernahme betrachtet, und man muß zugestehen: so natürlich eine mathematische Mengentheorie ist, so wenig natürlich erscheint es, *alle* mathematica zu Mengen zu machen; vielleicht am meisten problematisch ist hier der (sehr bedeutende) Fall des Kontinuums ¹². Auch führt ein naiver Gebrauch des Mengenbegriffs zur Russellschen Antinomie; das konnte durch eine Korrektur der Axiomatik vermieden werden; aber immer noch ermöglicht die (heute verbreitete) Version von Zermelo-Fraenkel sonderbare Aussagen wie den gänzlich

uneinsichtigen Wohlordnungssatz. Andererseits sind die Zaubereien der (schon erwähnten) Robinsonschen Theorie nicht denkbar ohne das (nicht-konstruktiv verwendete) Lemma von Zorn. Begriffliche Spekulation reicht eben weiter als Intuition; dieser entzieht sich schon der vierdimensionale Raum, ein „strukturell“ harmloses Gebilde (und Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie), sogar die in ihm enthaltene 3-Sphäre, eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, der Rand einer vierdimensionalen Vollkugel, aber nicht in den dreidimensionalen Raum einbettbar. Alles wesentliche Denken führt zu Konzeptionen, von denen man sich zwar noch „Bilder“ machen kann, aber keine adäquate Vorstellung; als Erstes ist hier alles Unendliche zu nennen. Letzte Worte zur Grundlegung der Mathematik sind nicht gesprochen. Aber daß ein einziger undefinierter Grundbegriff und eine einzige Grundrelation, die Elementbeziehung, ausreichen, um das mathematische Gesamtgebäude aufzuführen, das scheint mir eine Tatsache zu sein, an der man nicht vorbeigehen kann (erklärbar vielleicht dadurch, daß die Elementbeziehung die „S ist p“-Beziehung der Logik in sich schließt, aber allgemeiner ist)¹³. Die Mengenaxiomatik selbst ist übrigens überraschend komplex, mehr als die für die ebene Geometrie oder die natürlichen Zahlen. An erster Stelle steht das Axiom der Extensionalität: Mengen sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten; es folgen die elementaren Prozesse der Mengenbildung, die sich mühelos anhand von Alltagshandlungen exemplifizieren lassen (siehe Anhang D). Schließlich wird ein Axiom benötigt, welches ein Modell für $\mathbb{N}$ und damit die „kleinste“ unendliche Menge garantiert; damit zugleich, wie schon Cantor fand, eine ganze (selbst unendliche) Hierarchie von Unendlichkeiten.

12

Sodann sind Resultate zu nennen, die zwar zur Mathematik gehören, aber ihrem Gehalt nach metamathematischen Charakter haben: ich meine solche über die Reichweite, oder die grundsätzlichen Möglichkeiten mathematischer Verfahren. Sie hatten Vorläufer. Schon die Entdeckung des Irrationalen durch die Pythagoreer kann man als ein solches ansehen: die „Wechselwegnahme“, nämlich des jeweils kürzeren vom längeren Geradenstück und beginnend mit Diagonale und Seite eines Quadrats, führt zu keinem Ende, anders als beim größten gemeinsamen Teiler ganzer Zahlen. Seit Gauß die nichteuklidischen Geometrien entdeckte, hat niemand mehr versucht, das Parallelenaxiom aus den andern geometrischen Axiomen abzuleiten, seit Abel niemand mehr, die allgemeine Gleichung 5. Grades durch Wurzelausdrücke zu lösen, und als gegen Ende des 19. Jahrhunderts die Transzendenz von π bewiesen wurde, war allen Versuchen, den Kreis mit Zirkel und Lineal zu quadrieren, der Boden entzogen¹⁴. Das waren spezifische Probleme; von größerer Allgemeinheit sind Sätze über algorithmische Unentscheidbarkeit, wie sie im letzten Jahrhundert erzielt wurden und die jeweils ganze Klassen von Problemen betreffen. Unter einem *Algorithmus* versteht man ein mechanisch ablaufendes Verfahren, Probleme durch a priori gegebene Prozeduren zu lösen. In ganz einfachen Fällen genügen Probierv Verfahren; so wenn gefragt wird, ob eine gegebene natürliche Zahl Summe von zwei Quadratzahlen oder zwei Primzahlen ist. Eine Klasse von Problemen heißt *algorithmisch entscheidbar*, wenn es einen Algorithmus gibt, der für jedes Problem dieser Klasse in *endlich vielen* Schritten eine Lösung liefert, andernfalls unentscheidbar. (Man beachte: das letztere schließt nicht aus, daß es für jedes solche Problem einen Algorithmus gibt, nur gibt es keinen, der alle diese löst.) Ein populäres

Beispiel ist die Frage nach der Lösbarkeit „diophantischer“ Gleichungen; sie gilt der *ganzzahligen* Lösung von Polynomgleichungen in endlich vielen Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten. Hilbert präsentierte die Frage, ob es dafür einen Algorithmus gibt, in seiner berühmten Problemsammlung zu Beginn des letzten Jahrhunderts; sie wurde 1970 im negativen Sinne entschieden. Auch hier existiert ein Probiervorgehen, weil die Argumentmenge abzählbar ist, aber es ist nicht problemgerecht: gibt es keine Lösung, läuft es ad infinitum; im andern Fall liefert es mehr, als gefragt wurde. Von ähnlichem Typ sind die Dehnschen Probleme der Gruppentheorie: unter einer *Präsentation* einer Gruppe versteht man die Angabe eines Systems von Erzeugern und definierenden Relationen zwischen ihnen; durch dieses Datum ist die Gruppe (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt. Aus rein logischen Gründen sollte sich daher aus ihm ableiten lassen, ob zwei Präsentationen isomorphe Gruppen beschreiben („Isomorphieproblem“) und auch, ob ein Potenzprodukt dieser Erzeuger (ein „Wort“) das Einselement darstellt („Wortproblem“); beide Probleme haben sich als algorithmisch unentscheidbar erwiesen.

13

Die beiden letzten Beispiele betrafen spezielle Klassen von Entscheidungsproblemen, für die natürlich auch nur spezielle Algorithmen in Frage kommen; eine sehr allgemeine, vielleicht die allgemeinste Klasse von Algorithmen repräsentieren die nach ihrem Erfinder benannten *Turingmaschinen* zur Berechnung von Funktionen. (Man beachte hier, daß jedes Entscheidungsproblem, in das eine natürliche Zahl als Parameter eingeht, in eine Folge von Berechnungsproblemen übersetzt werden kann: man definiert eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ durch $f(n) = 0$ bzw. $= 1$, wenn das Problem für den Parameter n unlösbar bzw. lösbar ist; zu berechnen ist dann die Folge $f(1), f(2), \dots$, wobei die Maschine stoppt, wenn ein $f(n) = 0$ erreicht ist; in unseren beiden Beispielen ist es leicht, solche Parameter zu finden.) Eine Turingmaschine bearbeitet eine Eingabe gemäß einem Programm, das von der jeweils zu berechnenden Funktion abhängt. Die Funktionsweise ist erstaunlich simpel: man denke sich die Eingabe in einer 0-1-Folge verschlüsselt und in Felder auf einem nach beiden Seiten offenen Band eingetragen. Auf diesem bewegt sich ein „Operator“, welchem eine endliche Folge von „Zuständen“ implementiert ist. Jeder Zustand enthält eine Anweisung, das jeweils vorgefundene Zeichen (0 oder 1) stehen zu lassen oder zu ersetzen, sich nach rechts oder links zum nächsten Feld zu bewegen und sich in den nächsten Zustand zu versetzen, oder keine solche Anweisung; wenn dieser Fall eintritt, stoppt er. Das *Halteproblem* ist die Frage, ob es einen Algorithmus gibt, der a priori zu entscheiden erlaubt, und zwar für alle Maschinen und alle Eingaben, ob die Maschine stoppen wird oder nicht; sie wurde schon von Turing selbst im negativen Sinn beantwortet. Das Interesse dieses Resultates liegt darin, daß Turing-Berechenbarkeit sich als äquivalent mit anderen, mehr „natürlich“ anmutenden Berechnungsarten erwiesen hat (rekursive Funktionen, Markoffketten); die Church-Turing-These sagt, daß jeder „vernünftige“ Sinn von „Berechenbarkeit“ damit schon erfaßt ist. Demnach existiert keine „universelle“ Rechnungsmethode, die auf alle Probleme anwendbar ist, wie es Leibniz vorschwebte (s.u. 29).

Die bekanntesten unter den mathematisch-metamathematischen Resultaten sind jedoch die Sätze von Gödel. Der erste, als „Unvollständigkeitssatz“ bekannt, sagt, daß es in einer (mathematischen) Theorie, welche die der natürlichen Zahlen enthält (einschließlich deren Addition und Multiplikation), stets Aussagen gibt, die mit den Mitteln dieser Theorie nicht entscheidbar sind. Dieses Phänomen kann man mittels der Trennung von Theorie und Modellen leicht verständlich machen: eine Theorie hat Modelle oder Realisierungen, gewöhnlich durch Mengen. Wenn in einem Modell eine Aussage gilt, die in einem andern nicht gilt, dann kann diese Aussage in der abstrakten Theorie nicht entschieden werden (sofern diese konsistent ist). Sie kann natürlich entscheidbar werden in einer erweiterten, also mehr spezifizierten Theorie, aber diese wird dann neue Unentscheidbarkeiten enthalten – solchen entkommt man also auf keine Weise und kann nur hoffen, daß „wirklich wichtige“ Fragen nicht zu ihnen gehören; das ist natürlich durch nichts garantiert (auch gibt es für das Prädikat „wirklich wichtig“ schwerlich eine allgemein verbindliche Definition). Der zweite Satz von Gödel sagt, daß eine solche Theorie ihre eigene Konsistenz nicht beweisen kann; auch das mathematische Denken kann sich also nicht „am eigenen Zopf aus dem Sumpf ziehen“.

Herzstück der Beweise ist eine Art Selbstreferentialität der natürlichen Zahlen, die sich einigermaßen verdeutlichen läßt: jede Formel der Theorie ist eine endliche Folge von Symbolen (Quantoren, Junktoren, Variable, Konstanten, Relations- und Funktionssymbole, Klammern); diese selbst bilden eine abzählbare Menge; wir denken jedem von ihnen eine natürliche Zahl eineindeutig zugeordnet, so daß also verschiedenen Symbolen verschiedene Zahlen entsprechen. Nun denken wir uns die Primzahlen der Größe nach abgezählt, $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ usw. und ordnen einer gegebenen Formel die Zahl zu, welche $p(n)$ zur a -ten Potenz enthält, wenn an der n -ten Stelle der Formel das Symbol mit der Nummer a steht. Wegen der Eindeutigkeit der Primzerlegung kann die Formel aus der Zahl zurückgewonnen werden; wir erhalten also eine Einbettung der (abzählbaren) Menge aller Formeln in $\mathbb{N}$. Nun ist (in der Sprache der formalen Logik) ein Beweis einer Formel selbst eine Formel; in dieser Weise kann man *Aussagen* über natürliche Zahlen in die „Sprache“ der Zahlen „übersetzen“; das ist die angedeutete Selbstreferentialität. Dieses Verfahren nennt man „Gödelisierung“; etwas Ähnliches gehörte implizit schon zu einer berühmten (unten zu diskutierenden) Vision von Leibniz, die sich damit als allzu kühn erwiesen hat. Übrigens ist die multiplikative Struktur von $\mathbb{N}$ unabdingbar für den Beweis; es kann gezeigt werden, daß die Theorie von $\mathbb{N}$ nur mit der Addition entscheidbar ist ^{14a}.

Die zuletzt referierten Resultate zeigen, daß die Mathematik die Fähigkeit zur Selbstreflexion entwickelt hat. Ontogenetisch ausgedrückt bedeutet das den Übergang zum Stadium des Erwachsenseins. Der Geist der Mathematik hat sich selbst entdeckt; das bedeutet aber auch, daß ihm seine eigentlichen Aufgaben noch bevorstehen; unten wird deutlicher werden, was damit gemeint ist. Allerhand dazu beigetragen hat schon die Kategorientheorie, auch eine Metatheorie des mathematischen Verfahrens, aber selbst ein Stück Mathematik; wir werden auf sie zurückkommen (s.u. 36f).

Als nächstes fragen wir nach der Rolle, welche die Mathematik in der heutigen Lebenswelt spielt. Das führt sogleich auf die traditionelle Einteilung des mathematischen Gesamtwissens in eine „reine“ und eine „angewandte“ Mathematik, wobei ganze Disziplinen der einen oder anderen Seite zugeschlagen werden. Das war (und ist) ein rein akademischer Notbehelf und von der Sache her nicht gedeckt. Jedes Stück Mathematik, das irgendwo angewandt wird, war zuvor „reine“ Mathematik, und von keinem „reinen“ Stück kann man mit Sicherheit behaupten, daß es nie und nirgends anwendbar sein wird, auch wenn das noch so wenig vorstellbar scheint. Die Primzahlen und vollends die Eindeutigkeit der Primzerlegung ganzer Zahlen kamen in früheren Lebenswelten (wie auch heute im gewöhnlichen Alltag) so wenig vor, daß Euklid diese Eindeutigkeit, das eigentlich charakteristische Merkmal der Primzahlen, gar nicht erwähnt; heute ist sie die Grundlage eines effizienten Verschlüsselungsverfahrens von großer Bedeutung (wovon dessen Benutzer freilich nichts merkt).

Man kann aber sinnvoll fragen, welche Teile jenes Gesamtwissens heute außerhalb der Mathematik selbst Verwendung finden. Fragen wir einmal, was geschähe, wenn plötzlich, durch eine Mutation oder Seuche, alles Verständnis höherer Mathematik, sagen wir von der gymnasialen Oberstufe aufwärts, aussetzen würde. Zunächst würde natürlich (mit der mathematischen) alle Forschung enden, die mit mathematischen Modellen arbeitet, und das betrifft nicht nur Physik (die gar keine anderen Modelle kennt), sondern auch Biologie und Soziologie; betroffen wären auch alle Industriezweige, die eigene Grundlagenforschung betreiben, wie die Pharmazie. Es blieben nur Disziplinen, die (mit der Diltheyschen Unterscheidung) mehr auf Verstehen als auf Erklären gerichtet sind, wie Geschichtswissenschaft und Philologie, oder deren Tätigkeit vorwiegend im Registrieren und Klassifizieren besteht, wie Archäologie und Botanik. Sodann wäre es naiv, zu glauben, daß der Betrieb auf der erreichten Stufe weitergehen könnte, indem man einfach mit den gewohnten Prozeduren fortfährt. Das würde solange gutgehen, bis die ersten Defekte auftreten, deren Behebung eine Kenntnis der zugrunde liegenden Theorie verlangt. Ein auf theoretischer Grundlage mit wissenschaftlichen Methoden aufgebautes System kann dauerhaft nur von solchen instandgehalten werden, die auch die Prinzipien kennen, nach denen es funktioniert; eine gewisse Bekanntschaft mit ihnen erfordert schon die sachgemäße Bedienung technischer Großanlagen (wogegen Geräte, die der Endverbraucher in die Hand bekommt, „idiotensicher“ sein müssen). Insbesondere gilt das für die Systeme, die heute die Gesellschaft am meisten zusammenhalten, nämlich für alle elektronische Datenverarbeitung im Verein mit der dazu gehörenden Informations- und Kommunikationstechnologie. Wenn alles Mitteilen, Verbuchen, Verwalten und Planen wieder auf Handbetrieb umgestellt werden müßte, würde eine drastische Reduktion der Möglichkeiten die Folge sein, weil die Menschen längst nicht mehr leisten können, was die Rechner fast instantan produzieren. Das Analoge gilt für alle Bereiche der Technik, die im ganzen auf das Niveau etwa des frühen 19. Jahrhunderts zurückfallen würde. Die sozialen Katastrophen, die mit einem solchen Rückfall verbunden wären, brauchen wir nicht auszumalen.

Wer dennoch glaubt, die Menschheit sei schon lange zu weit gegangen und es sei besser, zu einfacheren Zuständen zurückzukehren, der lese Alfred Kubins Roman „Die andere

Seite“. Die Uhr nur zurückzudrehen, würde nicht genügen, eine „heilere“ Welt herzustellen; man müßte auch dafür sorgen, daß sie danach anders geht. Eine Alternative wäre ein Zustand, wie ihn Huxley in „Brave New World“ beschrieben hat, in dem eine Funktionselite den Betrieb am Laufen hält und dafür sorgt, daß der Rest gefüttert und unterhalten wird; schwerlich wünschbar und sicherlich nicht von Dauer. Schon lange ist zur Binsenwahrheit geworden, daß das geschichtlich überkommene Räuber-Beute-Denken mit der wissenschaftlich-technischen Entwicklung nicht vereinbar ist („Dschinghis Khan mit Telegraphen“). In der Neuzeit hat sich der objektive Geist der Mathematik, bestehend in abstrakten Theorien und manifestiert in Schrifttum, verschwistert mit dem objektiven Geist der Technik, manifestiert in den Industrien, durch die und von denen wir leben. Jenseits aller Vorurteile: eine Synthesis von Geist und Leben, die den Geist ebenso verändert hat wie das Leben und mitunter eher den Eindruck einer Zwangsgemeinschaft erweckt („Geist als Widersacher des Lebens“). Wie unvollkommen sie noch sein mag: homo sapiens muß durch diese Prüfung hindurch (vielleicht die entscheidende in seiner Laufbahn).

16

Welche mathematica sind also für den Bestand der gegenwärtigen Lebenswelt indispensabel? Die Informatik haben wir schon genannt, die heute eigene Hochschulen hat; ein Sammelfach, das neben einer mathematischen Grundausbildung und der eigentlichen Informationstheorie (die eng mit der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammenhängt) Fächer wie mathematische Logik, diskrete Mathematik und Automatentheorie vereinigt. Mit diesen Mitteln, praktisch umgesetzt durch große Rechnerkapazitäten, arbeitet auch die sog. „Künstliche Intelligenz“; der automatischen Gestalterkennung liegen ganz elementare geometrische Prinzipien zugrunde, die aber mit großem algorithmischem Aufwand eingesetzt werden. In Soziologie, Volkswirtschaft, im Versicherungs- und überhaupt allem Geldwesen ist Statistik unentbehrlich. Wer einen Navigationssatelliten in Umlauf bringen oder einen Raumflug kontrollieren will, muß die Gesetze der Himmelsmechanik beherrschen. Was dabei an Rechenarbeiten anfällt, ist von Menschen nicht mehr zu leisten; aber jemand muß die Algorithmen kennen, die von den Computern abgearbeitet werden, und die dahinterstehende Theorie. In einem Kraftwerk muß es jemanden geben, der die Gesetze der Elektrodynamik kennt, denen die gewaltigen Energien gehorchen; ist das Kraftwerk atomar betrieben, auch jemanden, dem die Quantenmechanik mit ihrem funktionalanalytischen Apparat vertraut ist. Wer am *design* von Fahrzeugen arbeitet, muß etwas von Aerodynamik verstehen; dasselbe gilt natürlich für die Wettervorhersager.

17

Man muß sich allerdings bei solchen Betrachtungen vor dem Fehler hüten, mathematica zu unterscheiden, die wir heute den Anwendungen theoretisch zugrundelegen, die aber für eine erste Praxis gar nicht gebraucht werden. Allen Sachverhalten und Prozessen der physischen Welt, die wir zu „exakten“ Wissenschaften machen können, wohnen mathematische Strukturen inne, den natürlichen nicht weniger als den menschengemachten. Aber einfache Gerätschaften wie Hebel oder Flaschenzug hat man natürlich lange vor aller Theorie gekannt. Wer eine Mühle an einen Bach bauen will,

braucht keine mathematische Strömungslehre; wohl aber jemand, der einen Kanal oder Staudamm plant oder ein Netz von *pipelines*. Es gibt allerdings Grenzfälle. Der Erbauer des Parthenon hat sicherlich Grund-, Seiten- und Aufriß mit allen Proportionen auch der kleineren Bauteile vorgedacht; ob aber auch bei der Krümmung des Stylobats, der Entasis und Einwärtsneigung der Säulen Mathematik beteiligt war, ist ungewiß; dergleichen würde man heute mit Hilfe optischer Präzisionsinstrumente bewerkstelligen, die es ohne die einschlägige physikalische Theorie (verbunden mit entsprechenden Fertigungstechniken) nicht gäbe. Man muß damit rechnen, daß die alten Bauleute rein handwerkliche, in langer Praxis entstandene Techniken kannten, die heute nicht mehr in Gebrauch sind, wie das Verfahren, glatt aufeinanderliegende Flächen herzustellen; vielleicht auch solche, die wir gar nicht mehr kennen. Archaische Mauern zeigen, daß man vor aller Mathematik imstande war, auch große unregelmäßige Blöcke passend zu machen; man hat gerätselt, wie Steinzeitmenschen die tonnenschweren Quader von Stonehenge, die Ägypter die noch viel schwereren Obeliskten bewegt und aufgerichtet haben. Wie dem auch sei: von einem gewissen Stand der Entwicklung an ist ohne entsprechend entwickelte Mathematik kein Auskommen mehr. Mit der Komplexität der Einrichtungen wächst die Notwendigkeit theoretischer Durchdringung und damit auch mathematischer Unterfütterung; das gilt nicht nur für technische Großprojekte, sondern auch für alle Verwaltung und Planung, vom Einbringen der Ernte bis zum Feldzug.

Bei alledem ist daran zu erinnern, daß spätestens seit den Griechen die Mathematik nicht mehr in Anwendungen aufging, ja sich von aller Erfahrbarkeit entfernte. Das gilt schon für rationale Zahlen, die zu groß oder auch zu klein für diese Welt sind, damit a fortiori für alles Irrationale. In der Neuzeit hat sich diese Entwicklung geradezu überschlagen. Die höheren Dimensionen, mit denen heute die Studenten schon in den ersten Semestern vertraut werden, haben wir schon angeführt (sie sind, für sich genommen, algebraisch wie topologisch simpel, es geht um das, was in ihnen sozusagen „strukturell stattfindet“). Die rationalen Zahlen tragen nicht nur den gewöhnlichen Größenbegriff, sondern jede Primzahl p erzeugt einen solchen, den „ p -adischen Absolutbetrag“, und alle diese sind untereinander verschieden. Jeder von ihnen erzeugt eine Topologie, die total unzusammenhängend, aber nicht diskret ist und in der das archimedische Axiom nicht gilt; dafür hat sie die (schon erwähnte) Eigenschaft, daß in einem p -adisch definierten Kreis jeder Punkt Mittelpunkt ist. Die zugehörigen Komplettierungen, alle von der gleichen Mächtigkeit des Kontinuums, gestatten eine neue Art Analysis. Restklassenbildung der ganzen Zahlen nach einer Primzahl p erzeugt einen Bereich, der noch alle üblichen Rechenregeln erfüllt, aber in dem das p -fache eines jeden Elements $= 0$ ist (man spricht von „positiver Charakteristik“). Mit all diesen Bereichen läßt sich in der üblichen Weise Geometrie treiben; für manche Zwecke ist es nötig, sie alle zu einem Gesamtbereich zusammenzufassen („Idele“ und „Adele“). Die Kategorientheorie hat Logiken hervorgebracht, in denen die Wahrheitswerte nicht mehr nur 0 und 1 sind, sondern allgemeinere Boolesche Algebren bilden, sogar Heytingalgebren, in denen zwar noch der Satz vom Widerspruch, aber nicht mehr das Tertium non Datur gilt. All das zusammen konstituiert veritable *ways of worldmaking* – Welten, über die wir allerhand aussagen können, die uns aber nicht erfahrbar sind und deren Rolle in künftigem Denken und künftiger Technik wir noch nicht absehen.

Wir haben die „Mathematik in der Lebenswelt“ wenigstens in Ausschnitten geschildert und hätten nun die „reine“ Mathematik, oder die Mathematik in ihrer eigenen „Innenwelt“, ausführlicher darzustellen, wie dies etwa Dieudonné in seinem Buch „A Panorama of Pure Mathematics“ getan hat. Da sich dies aus naheliegenden Gründen verbietet, halten wir uns an einen Leitfaden, den uns die mathematical community selbst anbietet. Im Jahr 2000 hat das amerikanische Clay Institute unter dem Titel „Millenium Problems“ eine Liste von 7 Problemen vorgelegt ¹⁵, die allgemein als die damals wichtigsten angesehen wurden, und für die Lösung eines jeden von ihnen ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt; nur eines von ihnen (die Nummer 4 der folgenden Liste) ist mittlerweile gelöst. Ich zähle sie mit ihren Namen auf: (1) die Riemannsche Vermutung, (2) die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer, (3) die Hodgevermutung, (4) die Poincarévermutung, (5) das $P = NP?$ - Problem, (6) die Frage nach der Lösbarkeit der Navier-Stokes-Gleichung, (7) das Existenz- und „mass-gap“-Problem der Yang-Mills-Theorie. Die vier ersten gehören der „reinen“ Mathematik an; (1) und (2) der (algebraischen) Zahlentheorie, (3) der algebraischen Geometrie, (4) der Topologie; die beiden letzten der mathematischen Physik, (6) der Hydrodynamik, (7) der Quantenfeldtheorie; Problem (5) stellt die Grundfrage der Theorie der Berechnungskomplexität. Ich nenne einige weitere, denen ich einen vergleichbaren Status zusprechen würde: das Programm von Langlands (algebraische Zahlentheorie), die „Standardvermutungen“ der algebraischen Geometrie, schließlich in der „elementaren“ Zahlentheorie die abc-Vermutung und die Collatzvermutung. (Probleme ähnlicher Bedeutung gibt es wohl auch in anderen Gebieten der Mathematik, in denen ich aber nicht genügend bewandert bin.)

Explizite Formulierungen bleiben weitgehend erspart, da sie nur Mathematikern verständlich wären, die sie aber (zumeist) ohnehin kennen. Nur die Collatzvermutung bildet hier eine Ausnahme, die man ohne weiteres dem „Mann auf der Straße“ erklären kann: sei n eine natürliche Zahl. Wenn n gerade ist, dividiere man durch 2, wenn n ungerade ist, bilde man $3n + 1$ und dividiere durch 2; dann fahre man so fort. Die Vermutung besagt, daß man immer in endlich vielen Schritten auf die 1 herunterkommt; diese selbst erzeugt den Zyklus $1 - 2 - 1$, nach der Vermutung der einzige, der beim Verfahren auftritt. Dem Laien fällt wohl schwer, zu glauben, daß dieses Problem der entwickeltsten aller mathematischen Disziplinen, eben der Zahlentheorie, schon fast 100 Jahre widerstanden hat. (Der nichtinitiierte Leser sollte die ersten 10 Zahlen durchrechnen, wobei er den erratischen Charakter der gefragten Eigenschaft schon ahnen wird; es wird ihm aber abgeraten, sich am allgemeinen Fall zu versuchen.) Es ist sicherlich das Problem, welches bei der größten Simplizität der Fragestellung die hartnäckigste Unzugänglichkeit aufweist; nicht das wichtigste der Zahlentheorie, wohl aber das am meisten vexierende. Denkt man ein wenig darüber nach, bekommt man das Gefühl, daß sich dahinter eine fundamentale Eigenschaft der Teilbarkeitsbeziehung verbergen muß; aber noch niemand hat sie dingfest machen können ^{15a}. Nichts zeigt so deutlich, daß die „Rationalität“ der rationalen, ja schon der natürlichen Zahlen, die ja, dem Wortsinn nach, unsere Fähigkeit meint, von ihren Eigenschaften *rationem reddere* zu können, auf weniger festen Füßen steht, als man glauben könnte.

Unserer Leitfrage gemäß versuchen wir jetzt, die in diesen Problemen gefragten Sachverhalte „philosophisch“ zu verstehen, genauer: ihre Bedeutung für die Stellung der Mathematik im objektiven Geist kenntlich zu machen; wir beschränken uns dabei auf diejenigen, die man beschreiben kann, ohne allzu technisch zu werden. (Ich habe mich bemüht, nicht über das hinauszugehen, was man im Rahmen einer mathematischen Grundausbildung lernen kann, wie sie an deutschen Universitäten üblich ist; das war nicht in allen Fällen möglich.) Am einfachsten ist das bei Problem 5, das sich den schon besprochenen Begrenzungsresultaten anschließt. Jeder Algorithmus verwandelt eine Eingabe in eine Ausgabe; beides kann man sich dyadisch verschlüsselt als Folge einer Anzahl n von Nullen und Einsen denken; die Laufzeit eines Algorithmus hängt von der Länge der Eingabe ab, also von n , und kann nach oben abgeschätzt werden. Wenn dafür eine Potenz von n genügt, heißt der Algorithmus polynomial; nur solche Algorithmen (mit nicht zu großen Exponenten) gelten als praktikabel; man bezeichnet diese Klasse einfach mit P . Paradigmatisch ist das Problem des Handlungsreisenden, der eine Anzahl n von Städten aufzusuchen hat und sich nach dem kürzesten Weg fragt, der ihn genau einmal zu jeder von diesen führt und wieder zurück (das Problem wird gewöhnlich mit TSP bezeichnet, „travelling salesman problem“). Es stellt sich nicht nur für die Routenplanung von Touristen oder Paketdiensten, sondern auch bei der DNA-Sequenzierung und beim Entwerfen von Mikrochips. Naives Aufzählen, Ausrechnen und Vergleichen aller möglichen Wege erfordert $n!$ Rechnungen (die Vergleiche nicht mitgezählt; man beachte: die Fakultät $n!$ wächst schneller als jede Exponentialfunktion an), womit man schnell in astronomische Größenordnungen gerät. Man kann natürlich in polynomialer Zeit jeden vorgeschlagenen Weg ausrechnen und feststellen, ob seine Länge unter einer vorgegebenen Schranke liegt, weiß damit aber nicht, ob es nicht noch einen kürzeren gibt; das nennt man „nondeterministic polynomial“. Ähnliches gilt für eine ganze Klasse von Problemen (mit NP bezeichnet). Es wird allgemein angenommen, daß $P \neq NP$ ist, doch ist das nicht bewiesen. Wenn die Annahme zutrifft, ist damit eine Grenze zwar nicht für das rein theoretische Agieren (wie bei den Gödelschen Sätzen), wohl aber für seine praktische Umsetzung aufgewiesen. Damit würde die Frage des Pragmatismus virulent, welche Bedeutung die „triviale“ Aussage hat, daß es unter den $n!$ möglichen Wegen (mindestens) einen kürzesten gibt; ist das mehr als ein Luftschloss? Doch sollte nicht verschwiegen werden, daß man mittlerweile polynomiale Algorithmen kennt, die auch für große n brauchbare Approximationen liefern, z.B. solche mit garantierter Höchstabweichung vom Optimum.

Die Probleme 6 und 7 entstammen der mathematischen Physik. Die Gleichung von Navier-Stokes (Problem 6) beschreibt die Strömung eines Fluids als Funktion der Zeit, bei gegebenen Randbedingungen (Druck und Temperatur); „Fluid“ meint dabei alles, was fließen kann, also nicht nur Flüssigkeiten, sondern auch Gase; das zeigt sogleich die große Allgemeinheit der Fragestellung, die aller Aero- und Hydrodynamik zugrundeliegt. Es handelt sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in drei Variablen (den Raumkoordinaten); das ist ein Typus, für den man keine allgemein anwendbaren Verfahren zur Auffindung exakter Lösungen kennt. Gefragt ist die Existenz

einer glatten (unendlich oft differenzierbaren) Lösung, die für alle positiven Zeiten definiert ist. Schon diese letztere Forderung zeigt den „akademischen“ Charakter des Problems: jedes mathematische Modell enthält Idealisierungen, die *on the long run* ihren Einfluß notwendig spüren lassen. Ein solche liegt auch schon darin, daß die Lösung wenigstens zweimal differenzierbar sein muß; es ist eine pragmatisch sinnlose Frage, ob die zeitliche Entwicklung einer Observablen auch nur stetig im mathematisch strikten Sinne ist, erst recht differenzierbar, geschweige denn glatt; doch der gesamten klassischen Dynamik, die seit Newton von Differentialgleichungen beherrscht wird, liegt die Hypothese zugrunde, daß die Natur keine Sprünge mache. Im vorliegenden Fall legt die Praxis das Modell mit sichtlichem Erfolg zugrunde; ihr genügen Näherungen, für die es numerische Verfahren gibt. Die Theorie gibt der Praxis einen Leitfaden vor, der sich so gut bewährt, daß die Frage nach „idealen“ Lösungen auftaucht, welche diese Bewährung a posteriori erklären, und so läuft nun die Theorie der von ihr erst ermöglichten Praxis hinterher. Hier kommt einem die nachträgliche Bestätigung von Keplers empirisch gefundenen Planetengesetzen durch die Newtonsche Himmelsmechanik in den Sinn. Auch an Heraklit mag man denken: „Unsichtbare Harmonie ist besser als sichtbare.“ Bemerkenswert ist übrigens, daß keine Vermutung ausgesprochen wird; die Experten rechnen also mit der Möglichkeit von Gegenbeispielen. Man fragt sich, welche physikalische Bedeutung solchen Gegenbeispielen zukommen würde.

21

Problem 4 hat seinen Ursprung in der Klassifikation der kompakten (zusammenhängenden) Flächen im dreidimensionalen Raum, die im 19. Jahrhundert gelang. Die Liste beginnt mit der zweidimensionalen Sphäre (Kugeloberfläche), dann folgt ein Torus (Ringfläche), dann eine Verschmelzung von zwei Ringflächen zu einer „Brezelfläche“, schließlich deren Verlängerung durch Ankleben weiterer Ringflächen. Die Sphäre ist die einzige unter diesen mit der Eigenschaft, daß eine geschlossene zusammenhängende Kurve auf ihr stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne daß dabei die Fläche verlassen wird; diese Eigenschaft der Fläche, die man allgemeiner für topologische Räume definieren kann, nennt man „einfach zusammenhängend“. Poincaré vermutete 1904, daß dies auch in der nächsthöheren Dimension gilt: die 3-Sphäre, also der Rand einer vierdimensionalen Kugel (selbst ein dreidimensionales Gebilde), ist (bis auf Homöomorphie) die einzige einfach zusammenhängende kompakte dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Das Entsprechende kann man für alle Dimensionen fragen, und merkwürdigerweise erwiesen sich die Dimensionen ≥ 4 als zugänglicher: nach einer langen Inkubationszeit wurde 1960 zuerst der Fall $\dim > 4$ im positiven Sinn gelöst, 1982 der Fall $\dim = 4$ und um 2002 der ursprüngliche Fall $\dim = 3$.

Die besondere Schwierigkeit der Dimension 3 illustriert vielleicht die Schwierigkeit der Frage, warum unser Anschauungsraum dreidimensional ist. Die Dreidimensionalität muß durch besondere geometrische oder topologische Eigenschaften ausgezeichnet sein, ebenso auch die Vierdimensionalität der Raum-Zeit-Erfahrungswelt (schon vor der Allgemeinen Relativitätstheorie). Einen kleinen Hinweis geben schon die Platonischen Körper: in drei Dimensionen die bekannten 5, in vieren 6, von da ab immer nur noch 3 (Schläfli 1852); in der Ebene dagegen unendlich viele, nämlich alle regulären n -Ecke.

Nur in drei Dimensionen existieren nichttriviale Knoten (Einbettungen der Kreislinie). Die Physiker haben weiteres ausgemacht; so zeigte Ehrenfest 1917, daß in Dimensionen >3 keine stabilen Planetenbahnen möglich wären (die Geltung des Newtonschen Gravitationsgesetzes vorausgesetzt). Das allgemeine Dimensionsproblem, die Frage, welche Dimension dem uns umgebenden Raum „wirklich“ zukommt, ist offen; manche spekulieren mit zusätzlichen Dimensionen im Mikroraum (Stringtheorie), andererseits gibt es neuerdings Erklärungen für die Dreidimensionalität, die auf der Physik des „Urknalls“ basieren ¹⁶.

22

Wir gehen jetzt über zu den Problemen, die der Zahlentheorie angehören (diese im weitesten Sinne verstanden), und betrachten als erstes die Probleme 1 und 2 (das erste, die Riemannsche Vermutung, wird von vielen als das wichtigste von allen angesehen). Sie haben einen gemeinsamen Ursprung, der sich, im einfachsten Fall und in einfachsten Terminus, so beschreiben läßt: als arithmetisch-geometrisches Gebilde bezeichnen wir ein Objekt in einem affinen (oder projektiven) Raum beliebiger Dimension, welches definiert ist durch das Verschwinden polynomialer, über den rationalen Zahlen definierter Gleichungen in den Koordinaten; in der Ebene z.B. eine Gerade mit rationaler Steigung und einer rationalen Nullstelle oder ein Kreis mit rationalem Radius und Mittelpunkt 0. Einem solchen Gebilde (das noch Regularitätsbedingungen genügen sollte, die wir übergehen) ordnet man eine Funktion einer komplexen Veränderlichen zu, die auf einer rechten Halbebene in Form eines unendlichen, über die Primzahlen erstreckten Produkts definiert ist und dort eine analytische Funktion darstellt (aus der Konvergenz des Produkts folgt übrigens, daß dieses nicht verschwinden kann). Man erwartet nun, daß diese Funktion auf die ganze komplexe Ebene fortgesetzt werden kann, nur endlich viele Pole hat und einer Funktionalgleichung genügt, welche die Werte an verschiedenen, durch eine einfache affine Abbildung auseinander hervorgehenden Stellen verknüpft; ferner, daß ihre Ordnungen und Leitkoeffizienten an den Null- und Polstellen arithmetisch-algebraische Informationen über das vorgegebene Gebilde enthalten (eingeschlossen Informationen über den Definitionsbereich, im einfachsten Fall die rationalen Zahlen, allgemein ein sog. „globaler“ Körper). Diese Erwartungen sind Gegenstand eines ganzen Komplexes äußerst tiefliegender Vermutungen, die hier auch nicht näherungsweise beschrieben werden können und von denen nur ein kleiner Teil bewiesen ist.

23

Bei Problem 1 ist das zugrundeliegende Gebilde das einfachste denkbare, nämlich ein einzelner Punkt (definiert über $\mathbb{Z}$), die entstehende Funktion die Riemannsche Zetafunktion, gewöhnlich als unendliche Reihe definiert (die sich mittels der eindeutigen Primzerlegung in $\mathbb{Z}$ leicht in ein Produkt der beschriebenen Art umwandeln läßt). Die Reihe konvergiert für $\text{Re } s > 1$ ($\text{Re } s$ ist der Realteil der komplexen Zahl s); schon Riemann selbst hat die Fortsetzung und die Funktionalgleichung bewiesen, welche die Werte an den Stellen s und $1 - s$ korreliert; aus der expliziten Gestalt der Fortsetzung geht hervor, daß die negativen ganzen Zahlen $-1, -2, -3, \dots$ Nullstellen sind; der einzige Pol ist $s = 1$. Es bleibt die Frage nach den Nullstellen im „kritischen Streifen“ $0 < \text{Re } s < 1$

(auf seinen Rändern gibt es keine). Riemann berechnete die ersten von ihnen und fand, daß sie alle auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1/2$ liegen, verfolgte die Frage aber dann nicht weiter und hat die nach ihm benannte Vermutung nicht explizit ausgesprochen: sie besagt, daß alle Nullstellen im Streifen auf dieser Geraden liegen. Diese unspektakulär anmutende Aussage würde eine ganze Reihe von Folgerungen haben, die teilweise mit der Zetafunktion in gar keinem Zusammenhang zu stehen scheinen, aber – gerade dadurch – die Bedeutung der Vermutung erkennen lassen; die vielleicht wichtigste ist eine Anwendung auf die Primzahlfunktion $\pi(x) = \text{Anzahl der Primzahlen unterhalb der reellen Zahl } x$. Seit dem Ende des vorletzten Jahrhunderts ist bekannt, was Gauß schon an seinem Anfang vermutet hatte, daß sie asymptotisch wächst wie die Funktion $x/\log x$, das heißt es ist $\pi(x) = x/\log x + r(x)$, wobei der Quotient von Fehlerterm $r(x)$ und Hauptterm $x/\log x$ gegen 0 strebt. Aus der Vermutung würde sich ein Fehlerterm ergeben, von dem man schon weiß, daß er nicht mehr verbessert werden kann; damit wäre eine fundamentale Frage der Zahlentheorie in gewissem Sinn endgültig beantwortet.

24

Problem 2 handelt von „elliptischen Kurven“; das sind glatte ebene Kurven, die durch eine kubische Gleichung definiert werden können, wie etwa $y^2 = x^3 + 1$ (eine Ellipse ist keine elliptische Kurve!), vermehrt um einen „unendlich fernen“ Punkt im projektiven Abschluß der Ebene (siehe Anhang B). Solche Kurven unterscheiden sich von allen Kurven höheren Grades dadurch, daß ihre Punkte eine natürliche kommutative Gruppenstruktur tragen: zu gegebenen Punkten A, B bilde man ihre Verbindungsgerade; diese schneidet die Kurve in einem weiteren Punkt C , und man erklärt die Addition durch die Forderung $A + B + C = 0$, wobei 0 der unendlich ferne Punkt ist. Ist die Kurve über $\mathbb{Q}$ definiert und sind A und B rational, so auch C (Grund: für ein rationales Polynom vom Grad 3 mit zwei rationalen Nullstellen ist auch die dritte rational). Schon länger ist bekannt, daß die rationalen Punkte eine endlich erzeugte Gruppe bilden (Mordell 1922); neueren Datums ist die (endliche) Liste der möglichen Torsionsanteile (Mazur 1977). Es bleibt die Frage nach dem freien Rang dieser Gruppe, und hier kommt die zugeordnete Funktion ins Spiel, die man (nach ihren ersten Erforschern) als Hasse-Weil-L-Funktion $L(E,s)$ der Kurve E bezeichnet. Das unendliche Produkt konvergiert für $\operatorname{Re} s > 3/2$, und die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer besagt, daß dieser Rang gleich der Nullstellenordnung von $L(E,s)$ im Punkt $s = 1$ ist. Die Vermutung wurde aufgestellt, bevor noch bekannt war (und natürlich ebenfalls vermutet wurde), daß $L(E,s)$ an diesem Punkt überhaupt definiert ist. Dies weiß man seit der Arbeit von Wiles (1994), genauer: $L(E, s)$ ist auf der ganzen Ebene definiert und holomorph, und die Funktionalgleichung korreliert die Werte an den Stellen s und $2 - s$. Die Vermutung selbst ist nur in Spezialfällen bewiesen; man weiß, daß die Gruppe genau dann unendlich ist, wenn $L(E, 1) \neq 0$.

Das Gemeinsame aller Fälle läßt sich so beschreiben: das unendliche Produkt kodifiziert Informationen über das Gebilde, welche sein Verhalten an den einzelnen „Primstellen“ betreffen; man spricht von „lokalen“ Informationen. Der sozusagen unterirdische Prozeß der analytischen Fortsetzung, analytisch begriffen, aber in seiner „arithmetischen Wirksamkeit“ nicht verstanden, führt zu Informationen über das Gebilde selbst, die man „globale“ nennt, die aber nur in bestimmten Bereichen der komplexen Ebene außerhalb

des ursprünglichen Definitionsbereichs „anzutreffen“ sind. Was sich hier andeutet, sind Beziehungen zwischen Arithmetik, Geometrie und (komplexer) Analysis, also zwischen Zahlen, Figuren und dem Kontinuum, die in ihrer Gesamtheit, trotz aller immensen schon geleisteten Arbeit, noch immer ein Mysterium darstellen, welches zu entschlüsseln der menschliche Geist aufgerufen ist ^{16a}. Denn es ist zu erwarten, daß solche Entschlüsselung unser Verständnis jener Grundbegriffe verändern und uns damit dem „Zu-sich-selbst-Kommen“ des Geistes näher bringen wird. (Übrigens darf vermutet werden, daß die Lösung von (1) oder (2) sehr bald auch die zahlreicher vergleichbarer Fälle nach sich ziehen würde.)

25

Wir besprechen nun noch die abc-Vermutung. Sie ist nicht ganz so elementar wie die Collatzvermutung, läßt aber ihren „strukturellen Gehalt“ leichter erkennen und hat vor allem, sehr im Gegensatz zu jener, eine lange Reihe substantieller Folgerungen, mehr sogar als die Riemannsche Vermutung. Ihren Namen hat sie nach ihrer üblich gewordenen Formulierung: es bezeichne zunächst, für natürliches n , $\text{rad}(n)$ das Produkt der Primteiler von n (genannt das „Radikal“). Die Vermutung sagt: sei $r > 1$ eine reelle Zahl. Dann existiert eine reelle Konstante $C = C(r)$ derart, daß für beliebige teilerfremde natürliche Zahlen a und b und $c = a + b$ die Ungleichung

$$(*) \quad c < C(\text{rad}(abc))^r$$

besteht. Machen wir uns zuerst den Gehalt dieser Aussage klar: aus der Teilerfremdheit von a und b folgt, daß auch c zu beiden teilerfremd ist; die Primzerlegung von a und b sagt uns also nichts über die von c ; ich nenne das die „fundamentale Inkompatibilität von Addition und Multiplikation“ in den natürlichen Zahlen. Die Ungleichung (*) beschränkt diese Inkompatibilität in der folgenden Weise: das Radikal ist klein gegen a , b und c , wenn diese Zahlen hohe Potenzen sind; sie schließt also aus, daß die Summe von zwei hohen Potenzen wieder eine solche ist. Sie wird falsch für $r = 1$, denn man kann beweisen, daß der Quotient $\text{rad}(abc)/c$ beliebig klein werden kann, so daß auch für ein noch so großes C die Ungleichung nicht mehr allgemein besteht. Die Qualität der Aussage zeigt sich, wenn man nach Fällen sucht, in denen sie für $r = C = 1$ verletzt ist, also $c \geq \text{rad}(abc)$ ist; man nennt solche Tripel „abc-Treffer“. Die beiden kleinsten sind $(1, 8, 9)$ und $(5, 27, 32)$; man kann zeigen, daß es unendliche viele solche Tripel gibt, aber die Rechnungen zeigen auch, daß sie äußerst dünn gesät sind. Das erste Tripel, also die Gleichung $1 + 2^3 = 3^2$, ist sogar der einzige Fall, in dem sich zwei Potenzen natürlicher Zahlen mit Exponenten > 1 nur um 1 unterscheiden; das war die „Catalansche Vermutung“, die im vorletzten Jahrhundert aufgestellt und erst 2002 mit Methoden der algebraischen Zahlentheorie bewiesen wurde; sie ergibt sich (vergleichsweise) leicht aus der abc-Vermutung, wie auch die Fermatsche Vermutung. Auch diese ist ein Beispiel für die „Inkompatibilität“: die Bildung von Potenzen ist gewissermaßen die „einfachste“ multiplikative Operation, aber es hat sich gezeigt, daß für $m > 2$ die Summe von zwei m -ten Potenzen natürlicher Zahlen nicht wieder eine solche sein kann. Die (1985 aufgestellte) abc-Vermutung ist die erste *allgemeine* Aussage dieses Typs.

Ein „volles Verständnis“ des Verhältnisses von Addition und Multiplikation in den natürlichen Zahlen würde das Folgende einschließen: der „multiplikative Typus“ einer Zahl a sei die (ungeordnete) Folge der Exponenten in der Primzerlegung¹⁷; man gebe an, wie diese Typen in der natürlichen Folge der Zahlen aufeinander folgen. Die Catalansche Vermutung drückt sich dann so aus, daß Typen $(m, \dots, m)$ und $(n, \dots, n)$ für $m, n > 1$ nicht aufeinander folgen können; die Frage nach den Primzahlzwillingen ist, ob der Typ (1) unendlich oft mit Abstand 2 auftritt. Es ist klar, daß ein solches „volles Verständnis“ eine gewagte Utopie darstellt, vielleicht sogar unmöglich ist; jedenfalls aber sollte sich in dieser Richtung mehr erreichen lassen, als wir heute haben. Es könnte gut sein, daß sich unsere Vorstellung von den Zahlen, die (bei Mathematikern) gewöhnlich von dem einfachen Eins-nach-dem-Andern der Peanoaxiome ausgeht, noch Gesetze aufweist, die wir kaum erst ahnen, und ein fundamentaler Ordnungsfaktor unserer Weltwahrnehmung ganz neue Züge gewinnt; auch das würde zum Zu-sich-selbst-Kommen des Geistes gehören¹⁸.

Wir verweilen noch, ihrer fundamentalen Rolle wegen, bei den natürlichen Zahlen. Die additive Struktur von $\mathbb{N}$ ist simpel, die multiplikative ist, für sich genommen, ebenfalls wenig problematisch, nämlich eine unendliche direkte Summe der additiven. Folglich entstehen alle Probleme der Zahlentheorie daraus, daß man das „Zusammenspiel“ der beiden Strukturen nicht zureichend versteht. Man könnte sagen, daß die Multiplikation das einfache Eins-nach-dem-Andern der additiven Struktur mit „Substrukturen“ anreichert, von denen wir einige nur *on the long run verstehen*; der Primzahlsatz ist ein solches Resultat. Das haben die Griechen noch nicht gesehen. Euklids Behandlung der Zahlen in seinem Buch VII bleibt unbefriedigend, weil er die additive Struktur zuwenig berücksichtigt. Er beweist in § 30, daß eine Primzahl, die ein Produkt von Zahlen teilt, auch einen Faktor teilen muß, und in § 32, daß jede Zahl, die keine Primzahl ist, durch eine solche teilbar ist, aber er macht nicht den – aus unserer Sicht – sehr kleinen Schritt zu der Folgerung, daß jede Zahl ein Produkt von Primzahlen und diese Primzerlegung eindeutig ist; der Grund ist anscheinend darin zu suchen, daß ihm das Prinzip der vollständigen Induktion fehlt. Sein Blick auf die Zahlen bleibt fokussiert auf den statischen Aspekt der Proportion (so sagt er „messen“, wo wir „teilen“ sagen); der dynamische oder genetische Aspekt, konstituiert durch die Nachfolgerabbildung, ist erst in der Neuzeit in seiner Bedeutung erkannt und der Zahlenwelt zugrundegelegt worden (noch ein sprechendes Beispiel für die Spenglersche Unterscheidung von „Apollinischer“ und „Faustischer“ Mathematik)¹⁹.

Die vollständige Induktion ist übrigens ein Beispiel für eine elementare, aber merkwürdig spät entdeckte Denkmöglichkeit; sie scheint erst im 17. Jahrhundert klar erkannt worden zu sein. Natürlich wußten auch die Griechen, daß man durch sukzessive Addition der Eins alle (natürlichen) Zahlen erreichen kann (Euklid *definiert* „Zahl“ durch diese Eigenschaft). Man kann das auch so ausdrücken: eine Menge von Zahlen, welche die Eins und mit jeder Zahl n auch $n+1$ enthält, ist die ganze Menge der Zahlen. Sei nun E eine Eigenschaft, die man für die Zahlen definieren kann, und $E(n)$ eine Abkürzung für die Aussage, daß n die Eigenschaft E hat. Wenn dann $E(1)$ gilt und aus $E(n)$ stets $E(n+1)$ folgt, dann gilt $E(n)$ für alle n ; das ist das Induktionsprinzip. Was damit beweistechnisch erreicht ist, liegt am Tage: man braucht nur $E(1)$ „direkt“ zu beweisen (was oft trivial ist), und kann dann beim allgemeinen Beweis von $E(n)$ voraussetzen, daß E schon für alle

Vorgänger gilt, was den Beweis natürlich sehr vereinfachen kann. Die ungemeine Bedeutung des Prinzips beruht darauf, daß die Eigenschaft E sich gar nicht „in erster Linie“ auf Zahlen beziehen muß; man kann solche E überall definieren, wo eine Klasse von Objekten die Zahlen als Parameter hat, und das kommt, da den Zahlen „alles unterworfen“ ist (s.u. 29), sehr häufig vor; zum Beispiel in der Topologie als Dimension. Allerdings eignen sich nicht alle solchen Fälle für dieses Verfahren; das Problem ist immer, wie man die Induktionsvoraussetzung zur Anwendung bringen kann. In der Zahlentheorie ist die Existenz einer Primzerlegung trivial, nicht aber ihre Eindeutigkeit, und diese „eignet sich schlecht“ zum Induzieren (das ist leicht, wenn man den erwähnten Satz aus Euklids §30 schon hat; ein vollständiger Induktionsbeweis existiert, aber er hat einen artifiziellen Charakter und gibt auch keinen „strukturellen“ Aufschluß^{19a}).

Das Induktionsprinzip eignet sich auch für die „rekursive“ Definition von Funktionen f auf $\mathbb{N}$: man muß nur $f(1)$ definieren und erklären, wie $f(n+1)$ aus $f(n)$ hervorgeht und hat damit f für alle Argumente (das ist ein Spezialfall des allgemeinen Prinzips). Die primordialen Beispiele sind die Definitionen von Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$: für festes m definiert man $m+1$ als den Nachfolger $s(m)$ von m , sodann $m + (n+1) = s(m + n)$, und ähnlich für die Multiplikation (der Beweis der üblichen Rechenregeln erfordert dann ein wenig Fingerspitzengefühl). Auch hier ist es oft der Fall, daß eine „globale“ Definition von f gar nicht „vernünftig“ angegeben werden kann, wohl aber eine „lokale“, der Schritt von n nach $n+1$. Zum Beispiel kann niemand die n -te Primzahl explizit angeben, leicht aber definieren als die kleinste Zahl, die nicht durch die ersten $n-1$ Primzahlen teilbar ist. Ein anderes Beispiel ist die Kommutatorreihe einer Gruppe. So wird das Prinzip des „Eins-nach-dem-Anderen“ von den Größen auf Aussagen über die Größen und Funktionen der Größen übertragen. Und wie das alte Bild von den „Zwergen auf den Schultern von Riesen“ andeutet, liegt hierin ein Prinzip allen menschlichen Erkenntnisfortgangs.

26

Einige Worte noch zu den Problemen, die wir (wie oben angedeutet) nicht näher besprechen können. Die zur algebraischen Geometrie gehörenden (Problem (3) und die Standardvermutungen) sprechen aus, daß geometrische Gebilde, die durch das Verschwinden von Polynomgleichungen definiert werden können, ein gewisses „Wohlverhalten“ aufweisen, das sie von allgemeinen Mannigfaltigkeiten unterscheidet. Die Folge ist eine Art „Rigidität“, die sich elementar veranschaulichen läßt: eine durch eine polynomiale Gleichung $y = f(x)$ definierte ebene Kurve ist durch $\text{grad}(f) + 1$ ihrer Punkte schon eindeutig festgelegt, eine Gerade also (wie jeder sieht) schon durch zwei; eine beliebige glatte Kurve aber kann an beliebigen Stellen abgeschnitten und durch eine andere glatt fortgesetzt werden. Auch kann eine polynomiale Kurve höchstens $\text{grad}(f)$ Nullstellen haben; im Gegensatz etwa zur Sinuskurve, die durch eine Potenzreihe, also ein „Polynom unendlicher Ordnung“ definiert ist. Das „Wohlverhalten“, welches diese Rigidität nach sich zieht, muß hier unerörtert bleiben; es bezieht sich (bei 3) auf die Frage, wie man unter allen Untermannigfaltigkeiten die algebraischen charakterisieren kann. Das Programm von Langlands schließlich impliziert eine Korrespondenz zwischen Darstellungen absoluter Galoisgruppen und Linearer Gruppen, bei welcher gewisse diesen zugeordnete L -Funktionen übereinstimmen; der einfachste Spezialfall davon ist

die Klassenkörpertheorie über den rationalen Zahlen mit dem Satz von Kronecker-Weber. Diese Tatsache allein läßt die Tragweite des Programms ahnen, dessen volle Durchführung vielleicht die größte Revolution der Zahlentheorie darstellen würde, die sich seit ihrem Beginn bei den Griechen ereignet hat. Die Korrespondenz selbst ist nur ein Spezialfall der „Langlands-Funktorialität“, eine der tiefsten und umfassendsten Strukturaussagen, an denen gegenwärtig gearbeitet wird.

Nochmals sei hervorgehoben, daß all diese mathematica hier nicht um ihrer selbst willen präsentiert wurden, sondern um eine Ahnung davon zu wecken, wie die Mathematik, ausgehend von Elementen unserer Anschauung und unseres Denkens, auf langem Wege und durch große Komplexität hindurch doch wieder zu neuen Synthesen und neuer Einfachheit gelangen kann, freilich auf begrifflich höherer Ebene und mit Methoden, von denen frühere Zeiten keine Begriffe hatten. Wo aber solcherart, nach beschwerlichem Aufstieg, „die Aussicht frei, der Geist erhoben“ wird und eine Denkmöglichkeit sich erfüllt, hat sich auch der Blick auf die Dinge gewandelt, hat die Phylogenese der kategorialen Organisation einen Schritt vorwärts getan.

27

Wir kehren jetzt zu den Elementen zurück, nämlich zu der oben versprochenen Diskussion der Kombinatorik. Der Ausdruck stammt aus Leibnizens Dissertation „De arte combinatoria“ (1666); im 17. Jahrhundert wurden die ersten mathematischen Probleme behandelt, die heute unter diesen Begriff fallen, so von Pascal und Fermat 20. Der allgemeine Begriff ist unvergleichlich viel weiter als der heute in der Mathematik gebräuchliche. Das spätlateinische Wort „combinare“ bedeutet einfach „zwei Dinge zusammenbringen“, und das läßt uns in einer beinahe leeren Allgemeinheit. Alles, was wir als ein „Muster“ ansprechen, hat kombinatorischen Charakter: eine Anordnung oder Verteilung von Entitäten gleicher oder verwandter Art, die durch die Weise ihres Gegebenseins als zusammengehörig erscheinen, dadurch auffallen und sich einprägen: Voraussetzung für alles Erkennen und Wiedererkennen. Ähnliches gilt auch für unsere Aktivitäten: die Welt umgibt uns als eine unübersehbare Kombination von Dingen, Sachverhalten und Prozessen, mit denen wir „zurechtkommen“ müssen. Kombinatorik ist immer dabei, wenn wir Dinge so arrangieren, daß sie „zusammenpassen“, und dafür gibt es zahllose Anlässe. Ein gut gedeckter Tisch, die Ornamentik einer Kirchenfassade, ein Konzertprogramm: alle „Harmonie“, synchron oder diachron wie in der Musik, ist etwas Kombinatorisches; die erste Mathematik davon sind Symmetrien und Proportionen. Nicht nur beim Sehen und Hören, auch beim Schmecken legen wir Wert auf eine Abstimmung der Ingredienzen (hier ist die Mathematik allerdings wenig entwickelt). Einen anderen Aspekt des combinare zeigen Brettspiele wie Schach und Go, bei denen es Zugfolgen und Stellungen vorauszudenken gilt, natürlich auch Spiele mit explizit mathematischem Charakter wie Solitaire oder das neuerdings beliebt gewordene Sudoku (das unter dem Stichwort „lateinische Quadrate“ sogar in die offizielle Rubrik „Kombinatorik“ fällt), auch „Denkspiele“ wie Skat und Bridge, überhaupt aller „Denksport“. Noch außerhalb aller Mathematik treiben wir also Kombinatorik zu unserer Unterhaltung oder unserm Vergnügen. Von Kombinationen sprechen wir auch bei Spielzügen in Mannschaftsspielen, etwa einem „fast break“ im Basketball mit einer Folge von Zu- und Abspielen, die durchaus trainiert werden muß. Ein weiterer Aspekt des Begriffs liegt vor,

wenn aus scheinbar disparaten Sachverhalten Schlüsse gezogen werden, wie es der asketische Held aus der Baker Street der Welt vorgemacht hat. Jeder kennt die besondere Befriedigung, wenn es gelingt, aus dem Sichtbaren das Unsichtbare, aus dem Unscheinbaren das Bedeutende zu erschließen und einen verborgenen Zusammenhang allein durch Gedankenkraft aufzudecken.

28

Was immer wir aus der großen Weltkombination zu Mathematik machen, weist kombinatorische Aspekte auf. Ein früh erfaßter und bewältigter liegt den Platonischen Körpern zugrunde: auf welche Weisen kann man kongruente, reguläre, ebene Vielecke zu einem konvexen Körper zusammensetzen? Früher sprach man von „kombinatorischer Topologie“ und meinte damit die Approximation beliebiger Mannigfaltigkeiten durch simpliziale Komplexe, Datensätze kombinatorischen Charakters; wohl das erste Beispiel ist Eulers Polyederformel. Die „kombinatorische Gruppentheorie“ befaßt sich mit der „Präsentation“ von Gruppen durch Erzeugende und definierende Relationen (wir haben sie schon erwähnt). Ein kombinatorischer Akt ist schon das Umordnen von Summanden, etwa um Terme gleicher Art oder gleichen Wachstums zusammenzufassen, was in Algebra und Analysis häufig vorkommt (die binomische Formel ist das einfachste Beispiel). Kombinatorisch sind gewisse Probleme der Zahlentheorie, so die Euler-Goldbach-Vermutung oder die Frage, welche Zahlen sich als Summe von Quadraten schreiben lassen und auf wieviele Weisen; schon der Primzerlegung eignet ein kombinatorisches Moment, das sich kompliziert in den höheren Zahlbereichen, in denen sie nicht mehr besteht. Kombinatorischen Charakter hat auch die Graphentheorie, die sich zu einer eigenen Disziplin verselbständigt hat; auch hier gehört Euler mit seinem Brückenproblem zu den ersten, die den elementaren und ubiquitären Graphenbegriff in die Mathematik gezogen haben. Zu denken gibt hier die späte Ankunft dieser elementaren Gebilde in der mathematischen Sphäre, Grundformen des theoretischen Agierens, die jedem auch ohne spezielles Vorwissen verständlich und (in kleinem Rahmen) auch traktabel sind²¹. Die Mathematik verteilt sozusagen das Kombinatorische der Welt auf ihre verschiedenen Disziplinen, und die „offiziell“ als Kombinatorik bezeichnete ist nur eine von ihnen, ja hat streng genommen gar keine Definition²².

29

Wichtiger als all diese „konkreten“ mathematica kombinatorischen Charakters ist die Rolle der Kombinatorik im theoretischen Agieren. Um mit der Welt zurechtzukommen, ist der Mensch genötigt und befähigt, ihre Einheit in eine Vielheit von Begriffen aufzulösen und sodann in theoretischer Aktion, also durch Kombination dieser Begriffe, in einer Weise wiederherzustellen, wie es für seine Zwecke erforderlich ist; die Grammatik seiner Sprache gibt das formale Schema dafür. Nur mit solchem, was sich seinen Blicken oder Händen unmittelbar darbietet, kann er begrifflos umgehen, und auch das nur dann, wenn er sich mit den Sachen auskennt; aber solches Auskennen ist ihm von der Natur nicht in ausreichendem Maß mitgegeben; ohne eine Anleitung, die einen ziemlichen Teil seiner ganzen Lebenszeit in Anspruch nimmt, findet er nicht in die ihn umgebende Lebenswelt, und die Anleitung wird immer „begrifflicher“ und ist über bloßes Lesen und Schreiben längst hinaus. Es war Leibniz, der den Königsgedanken

hatte, das Hantieren mit den Begriffen oder Ideen durch einen mathematischen Kalkül zu ersetzen, was wenigstens zwei unschätzbare Vorzüge brächte: erstens kann über die Korrektheit einer Rechnung kein Streit entstehen, und zweitens kann man mit Hilfe eines symbolischen Kalküls sehr viel weiter kommen als durch reines Denken (wie sich ja schon beim gewöhnlichen Rechnen zeigt). In einem Brief an den Herzog Johann Friedrich (1671), in dem sich der 25-jährige als vielseitiger Erfinder präsentiert, beschreibt er als erstes seine fundamentale Idee: „In Philosophia habe ich ein Mittel funden, dasjenige, was Cartesius und andere per Algebram et Analysin in Arithmetica et Geometria getan, in allen Scientien zuwege zu bringen per Artem Combinatoriam, welche Lullius und P.Kircher zwar excoliert, bei weitem aber in solche deren intima nicht gesehen. Dadurch alle Notiones compositae der ganzen Welt in wenig simplices als deren Alphabet reduziert und aus solchen Alphabets Kombination wiederumb alle Dinge, samt ihren theorematibus, und was nur von ihnen zu inventieren möglich, ordinata methodo mit der Zeit zu finden ein Weg gebahnet wird“²³. Hier spricht noch der Überschwang, zu dem jede große Idee verleitet, aber Leibniz hat den Gedanken nie aufgegeben. In einem späteren Text finden sich nähere Ausführungen²⁴. Den Zahlen, und nur ihnen, ist alles unterworfen^{24a}. „Die Zahl ist daher gewissermaßen eine metaphysische Grundgestalt, und die Arithmetik eine Art Statik des Universums.“ Dem hätte Pythagoras zugestimmt, der aber „den rechten Schlüssel des Geheimnisses nicht besaß.“ Der Grundgedanke ist, „daß man jedem Gegenstand eine bestimmte charakteristische Zahl beilegen kann...Niemand aber hat bisher eine Sprache oder Charakteristik in Angriff genommen, die zugleich die Technik der Entdeckung neuer Sätze und ihrer Beurteilung umfaßte.“ Etwas genauer: „Es müßte sich...eine Art Alphabet der menschlichen Gedanken ersinnen und durch die Verknüpfung seiner Buchstaben und die Analysis der Worte, die sich aus ihnen zusammensetzen, alles andere entdecken und beurteilen lassen.“ „Sind nun die charakteristischen Zahlen einmal für die meisten Begriffe festgesetzt, so wird das Menschengeschlecht gleichsam ein neues Organ besitzen, das die Leistungsfähigkeit des Geistes weit mehr erhöhen wird, als die optischen Instrumente die Sehschärfe der Augen verstärken und das die Mikroskope und Fernrohre im selben Maß übertreffen wird, wie die Vernunft dem Gesichtssinn überlegen ist.“ Es wirft ein Licht auf den Geist des damaligen Rationalismus, daß Leibniz als eine vordringliche Anwendung der *characteristica universalis* die leichtere Verbreitung der „wahren Religion“ nannte.

30

Die „charakteristischen Zahlen“ erinnern an die oben beschriebene Gödelisierung, die den Symbolen einer formalisierten Theorie und damit deren Ausdrücken Zahlen zuordnet; und formalisieren läßt sich alles, was nur klar gedacht werden kann. Die große Einschränkung ist aber, daß die Gödelisierung nicht zur Entdeckung oder Prüfung, sondern nur zur Darstellung von Sätzen dienen kann; der erste Unvollständigkeitssatz besteht in der syntaktisch einwandfreien Formalisierung einer Aussage (dem Lügnerparadoxon verwandt), die weder bewiesen noch widerlegt werden kann. Tarski hat Gödels Sätze durch den Nachweis ergänzt, daß es keinen Algorithmus geben kann, der über Wahrheit oder Falschheit formalisierter Sätze entscheidet. Die Vision von Leibniz erweist sich also schon mit dieser Einschränkung als allzu optimistisch. Aber sie hat nicht nur (indem sie scheiterte) zur Einsicht in fundamentale Selbstbeschränkungen der Logik geführt, sondern bewährt sich an unzähligen Stellen. Die einzigen Kalküle oder

Algorithmen, die es zu Leibnizens Zeit gab, waren das Rechnen mit Zahlen und den abstrakten Symbolen der Algebra und Analysis, welches er in dem eben zitierten Text als Paradigmata anführt; die Kombinationen des Ramon Lull waren keine Kalküle, sondern eher ein Spiel mit philosophisch-theologischen Begriffen. Was wir heute einen Algorithmus nennen, ist eine Verallgemeinerung jenes Rechnens, und ihre Funktion geht weit über ein solches hinaus; die Rechenmaschinen haben sich zu Denkmaschinen entwickelt, die unendlich viel mehr können als die Grundrechenarten auszuführen. Algorithmen durchsuchen in Sekundenbruchteilen Tausende von Textseiten auf Stichworte und sortieren sie nach Relevanz, simulieren Prozesse aller Art auf Bildschirmen, kontrollieren die Bewegungen von Raumfahrzeugen, überwachen das Verkehrsaufkommen, extrapolieren das Wetter, ver- und entschlüsseln Nachrichten, sind dabei, das Übersetzen zu lernen und können Gesichter identifizieren (eine nicht eben beruhigende Tatsache). Mikrochips, wie sie heute in jeder etwas avancierten Elektronik stecken, fungieren als Algorithmen im Kleinsten. Die Fähigkeiten eines smartphone verleiten beinahe zu dem Verdacht, daß hier die Materie selbst gelernt hätte, mit ihren kleinsten Teilchen für uns zu denken und zu rechnen ²⁵. Die Beispiele algorithmisch unlösbarer Probleme, die wir kennengelernt haben, haben durchweg einen „zu universellen“ Charakter, es wurde zuviel gewollt. Es gibt keinen Algorithmus „für alles“, wohl aber für genügend spezifizierte Situationen. Ich weiß von keinem praktischen Problem, das mathematisierbar ist, aber einer Algorithmierung widerstanden hätte (die Navier-Stokes-Gleichung ist ein Beispiel dafür, daß man keine exakte Lösung braucht, wenn man mit Näherungsverfahren auskommt). So ist die Leibnizvision, topologisch ausgedrückt, „global“ nicht realisierbar, aber sie triumphiert im „Lokalen“.

31

Ein Gesichtspunkt, den auch Leibniz schon erwähnt hat, soll näher betrachtet werden. Die menschlichen Sinne sind auf einen mittleren Bereich eingestellt; wir sehen und hören nur in einem bestimmten Frequenzintervall, und Vergleichbares gilt für die anderen Sinne; auch gibt es für alle Sinne eine Grenze der Trennschärfe oder Unterscheidbarkeit. Wir haben gelernt, mit technischen Mitteln jenen Bereich zu erweitern und das Unterscheidungsvermögen zu verstärken, ganz ähnlich wie uns Verkehrsmittel zu größerer Geschwindigkeit verhelfen und sonst Unzugängliches erreichen lassen. Mit Tele- und Mikroskopen sehen wir, was unsern Augen zu fern oder zu klein ist, vor allem aber vieles, von dem wir ohne sie gar nichts wüßten. Freud hat den modernen Menschen einen „Prothesengott“ genannt; das meint nicht nur, daß er Ausfall oder Schwäche natürlicher Organe durch künstliche zu kompensieren gelernt hat, sondern auch solche sich zulegt, die ihm verschaffen, was die „Natur“ ihn niemals erreichen ließe. Die Philosophische Anthropologie hat das noch radikaler gefaßt: die *conditio humana* bringt es mit sich, daß beim Menschen das „Künstliche“ zum „Natürlichen“ gehört. Vergleichbares gilt nun auch für das Denkvermögen selbst, das ihm zum Künstlichen verhilft, und nirgends so evident wie in der Mathematik.

Schon das gewöhnliche Rechnen mit Stift und Papier läßt uns in Zahlbereichen exakt operieren, die dem reinen Denken („Kopfrechnen“) mit seinen natürlichen Komplexitätsschwellen nur im Groben zugänglich sind. Cassirer hat den Effekt treffend beschrieben: „Das Denken [...] bedarf nicht des ständigen Hinblicks auf die idealen

Sachverhalte selbst; es kann sich, auf weite Strecken hin, damit begnügen, an Stelle der Operationen mit den „Ideen“ die Operationen mit den „Zeichen“ zu setzen“²⁶. Es ist ja auf den ersten Blick erstaunlich, daß bloße Manipulation von Zeichen zu substantiellen Resultaten führen kann; dahinter steht die intelligente Abkürzung von schon gewonnenen Wahrheiten, die das Denken auf das jeweils Wesentliche fokussiert. Die Gleichung $a(bc) = (ab)c$ erfaßt man mit *einem* Blick, während man ihre Umschreibung in Worten (mindestens) zweimal lesen müßte. So werden die abstracta anschaulich, das Auge „denkt mit“ und läßt „erkennen“, was zu *erschließen* vielleicht unmöglich wäre; ein kaum abzuschätzender Synergieeffekt. Auch Information ex negativo ist so erhältlich: aus der Formel für das Volumen einer Pyramide, $\frac{1}{3}(\text{Grundfläche} \times \text{Höhe})$, liest man ohne weiteres ab, daß dieses Volumen nicht abhängt von der Gestalt der Grundfläche und der Lage der Spitze über ihr, was a limine keineswegs klar ist. Daher die Bedeutung einer kalkülfähigen Symbolik und das Beharrungsvermögen einer einmal eingeführten und bewährten. Ohne eine solche Symbolik, wie sie das Abendland etwa seit dem 17. Jahrhundert besitzt²⁷, ist modernes Rechnen, sei es in Algebra, Analysis oder sonstwo, nicht vorstellbar, und ihr Fehlen hat sicher beigetragen zu der Begrenztheit aller früheren Mathematik; dennoch ist staunenswert, wieweit die älteren Algebraiker ohne eine solche gekommen sind.

Die mathematische Prothetik wirkt aber nicht nur im Vielen und Großen; sie vermag auch Unterscheidungen zu präzisieren, die ohne sie vage und Sache von Meinungen blieben. Die Einteilung der Unendlichkeiten, beginnend mit „abzählbar“ und „überabzählbar“, haben wir schon genannt. Die „strukturelle Komplexität“ einer natürlichen Zahl, z.B. die Anzahl ihrer Teiler, hängt nicht von ihrer Größe ab, sondern von ihrer Primzerlegung. Die besten Beispiele aber gibt die Mathematik der Gestalten: so die Stufenfolge von „homotopieäquivalent“, „homöomorph“, „diffeomorph“ und „isometrisch“, oder die Unterscheidung von „zusammenhängend“ und „einfach zusammenhängend“. Das vielleicht einfachste Beispiel liegt in der Frage, wodurch sich, in einfachsten topologischen Begriffen, ein Geradenstück von einer Kreisfläche unterscheidet: jenes wird unzusammenhängend, wenn man einen inneren Punkt entfernt, diese nicht (sie verliert aber die Eigenschaft des „einfachen“ Zusammenhangs); also können sie nicht homöomorph sein, obwohl sie als Mengen gleichmächtig sind. Jeder wird der Behauptung zustimmen, daß Kugelfläche und Ringfläche „strukturell“ im einfachsten Sinne verschieden sind: sie können nicht „ohne Brüche“ ineinander deformiert werden, so wie die Kugelfläche zu einer Quadratfläche aufgeblasen werden kann (homöomorph, nicht diffeomorph); doch ohne die Grundbegriffe der Topologie läßt sich kein stringenter Beweis führen. Von hier aus ahnt man den ganzen Gehalt der Klassifikation der Flächen im Raum, die in Abschnitt 21 erwähnt wurde: man denke sich ein großes Gebäude, aus dem alle Türen und Fenster entfernt wurden. Die Oberfläche dieses Gebildes besteht dann aus allen inneren und äußeren Flächen und kann beliebig „labyrinthisch“ sein; dennoch ist sie durch eine einzige numerische Invariante (das „Geschlecht“) zu identifizieren und hat ein simples Modell. Hier kann auch die mathematische Unterscheidung von Knoten im Raum genannt werden (eine nicht abgeschlossene Aufgabe), bei der schon vergleichsweise einfache Beispiele die Vorstellungskraft an ihre Grenzen bringen.

Die Mechanisierung des Rechnens hat den Bereich des uns Zugänglichen noch gewaltig vergrößert. In manchen Zweigen der Zahlentheorie sind relevante Beispiele, durch die Vermutungen gestützt oder widerlegt werden könnten, nur mehr mit Computerhilfe zu erarbeiten (das gilt für alle oben besprochenen Vermutungen, soweit sie zur Zahlentheorie gehören), und die Größenordnungen, die dabei erreicht werden, legen ernsthaft nahe, von einem Umschlag der Quantität in Qualität zu sprechen; es tauchen Zahlen auf weit jenseits von allem, was sich in diesem Kosmos (soweit wir ihn kennen) in nicht-symbolischer Weise realisieren läßt. Manche Vermutungen, wie sie heute die Forschung leiten, ergeben sich aus rein „theoretischen“, heuristischen Überlegungen, manche aber auch erst durch Musterung einer großen Beispielsammlung. So ist jeder Algorithmus, etwas allgemeiner: jeder Kalkül eine Art Denkprothese, die nicht nur einzelne Ergebnisse liefert, sondern damit auch die Erkenntnis des allgemeinen Zusammenhangs befördert, in welchem diese stehen; er kann uns zwar nur zeigen, wie sich etwas im Einzelfall verhält, kann uns aber, genügend oft wiederholt, ein allgemeines Gesetz wenigstens vermuten lassen, das für alle gleichartigen Fälle besteht. Er kann Vermutungen durch Gegenbeispiele widerlegen; Vermutungen aufzustellen oder zu beweisen, bleibt freilich eine Aufgabe, die – vorerst wenigstens – die Fähigkeiten der Algorithmen übersteigt. Und es kommt nicht nur in der Logik vor, daß sich eine Frage als unentscheidbar erweist; das klassische Beispiel ist die Kontinuumshypothese.

Eine Denkprothese, aber in einem höheren Sinn, ist jede (in moderner Weise) axiomatische Theorie selbst. Wenn festgelegt ist, was über die Grundbegriffe ausgesagt werden darf, dann kann das Gebäude zu beliebiger Höhe aufgeführt werden, ohne daß jemals Unklarheit darüber entstehen kann, ob eine Konstruktion zulässig oder eine Folgerung korrekt ist. Das Hauptbeispiel ist natürlich die Mengenlehre, aus der die meisten heutigen Begriffe hervorgehen (ausgenommen ist nur der mathematische Kategorienbegriff). Um ein konkretes Beispiel zu geben: eine reelle Zahl ist (in der Standardkonstruktion, siehe Anhang M) eine Äquivalenzklasse rationaler Cauchyfolgen, eine solche Folge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in die rationalen; eine rationale Zahl ist eine Klasse von Paaren ganzer Zahlen, eine ganze Zahl eine Klasse von Paaren natürlicher Zahlen, eine natürliche Zahl ein Element der kleinsten Menge, die unter einer Nachfolgerabbildung abgeschlossen ist, und eine solche („rekursive“) Menge wird axiomatisch postuliert. Das alles braucht jemand, der mit reellen Zahlen und Funktionen arbeitet, nicht zu wissen. Er kann der Grundlagenforschung abnehmen, daß dieser Aufbau den reellen Zahlkörper als den einzigen archimedisch geordneten und vollständigen Körper hervorbringt; das kann er als Axiom nehmen (wie es in den Vorlesungen für Anfänger auch geschieht). Um eine Wittgensteinsche Metapher abzuwandeln: er kann die Leiter ignorieren, wenn er sich von der community hat überzeugen lassen, daß man auf ihr heraufsteigen kann, und sich im übrigen vom Kontinuum eigene Vorstellungen bilden ^{27a}.

Ich habe die Zahlentheorie die höchstentwickelte unter den mathematischen Disziplinen genannt; aber alle modernen Theorien, Topologie, Geometrie, Algebra haben sehr

hochstufige Begriffsbildungen hervorgebracht, von denen in ihren Anfängen nichts zu ahnen war. Der Preis für soviel Freiheit bei soviel Gewißheit ist, daß die Axiomatik im Rahmen der Theorie nicht mehr hinterfragt werden kann; das ist nur von einer Metaebene aus möglich. In dieser Hinsicht steht die Mathematik in genauem Gegensatz zur Philosophie, die jederzeit ihre eigene Metaebene ist und deren Hauptprobleme zu allen Zeiten in der Frage lagen, was über Grundbegriffe wie Sein, Geist, Seele, Wahrheit oder Gott ausgesagt werden kann. Wenn man es zugespitzt will: die stärkste Denkprothese ist die Fixierung der Grundbegriffe und Hypothesen, wie es die axiomatische Methode in ihrer modernen Form praktiziert; sie verhindert, daß sich Gesichtspunkte eindrängen, deren Verhältnis zu den angenommenen Grundbegriffen nicht geklärt ist. Ein solches Vorgehen ist der Philosophie versagt – sie darf nichts ausschließen, was im menschliches Erleben und Erkennen eine Rolle spielt, sondern muß sich immer dessen vielfach aporetischer Gesamtheit stellen und hat dabei nicht das einfache Wahrheitskriterium der Beweisbarkeit ^{27b}.

34

Die moderne Entwicklung, in ihren Anfängen als Aufbruch in ein besseres Zeitalter gefeiert, hat ihre fatalen Züge längst offenbart. Den Siegeszug der Algorithmen hat der frühere Schachmeister Kasparow einmal auf den Punkt gebracht: „Wovon wir wissen, wie es geht, das kann die Maschine besser.“ Für das Schachspiel hat sich das, wie es scheint, mittlerweile erfüllt. Hat sich der Mensch als Schachspieler damit abgeschafft? Offensichtlich nicht, ebensowenig wie ihn die Tatsache, daß er Maschinen bauen kann, die schneller und stärker sind als er, davon abgebracht hat, sich der Athletik zu widmen und olympische Spiele zu veranstalten, die allerdings mit ihren griechischen Urbildern nur noch den Namen gemeinsam haben. Ist es ein Wunder, daß eine Maschine, die alle Eröffnungen und Endspiele, alle taktischen und strategischen Erfahrungen aus den Meisterpartien gespeichert hat, viele Züge fehlerfrei vorausrechnen kann und keine Sekunde die Konzentration verliert, von einem einzelnen Menschen nicht mehr zu schlagen ist? Der Glaube, daß menschliches Ingenium über mechanisch prozessierte Information triumphieren kann, hat sich, in diesem Fall wenigstens, als Illusion erwiesen. Illusionen zu verlieren, sollte doch kein Anlaß zum Bedauern sein. Was aber, wenn eine Maschine, die man lange genug mit Gedichten oder Kompositionen oder Bildwerken historischer Meister gefüttert hat, von selbst solche hervorbringt, die auch Experten nicht mehr von Menschenwerk unterscheiden können? „Sollten die Computer eines Tages in der Lage sein, vollkommene Theaterstücke zu schreiben und unnachahmliche Bilder zu malen, so wäre es an der Zeit, sich ernsthaft Gedanken zu machen. Sollten sie auch noch zu lieben beginnen, so wäre das Schicksal der zoologischen Art beschlossen“ ²⁸. Von dem ersteren sind wir nicht mehr weit entfernt. Etwas ernsthafter: wir haben den Maschinen beigebracht, für uns zu denken, und dieselben Prinzipien, die eine Maschine zum Schachmeister machen, lassen sich auch für die Kriegführung einsetzen; wenn wir dann noch zulassen, daß sie ihre Resultate selbst umsetzt, kommt das einer Abdankung unserer „zoologischen Art“ gleich ^{28a}. Jedenfalls ist zu erwarten, daß der Einbruch der „KI“ in unsere Lebenswelt, der ja eben erst beginnt, uns mit Überraschungen konfrontieren wird, die wir vor nicht langer Zeit noch als *science fiction* abgetan hätten; wir sind in der Rolle des Zauberlehrlings, der aber *nolens volens* selbst den Meister machen muß. Das hat auch Goethe, den das aufkommende „Maschinenwesen“ mit

Besorgnis erfüllte, nicht voraussehen können.

35

Die Mathematik hat sich nicht nur „nach oben“ entwickelt, nach mehr Wissen und Können, sondern auch „nach unten“, in Richtung ihrer Grundlagen. Das läßt an die Physik denken, die nicht nur die Welt des Großen und Größten erschlossen hat, sondern auch die des Kleinsten, der wahren *atoma*, wie sie Demokrit antizipiert hat, freilich in rein spekulativer, aus heutiger Sicht naiver Weise und weit entfernt von aller Möglichkeit, sie experimentell oder mathematisch dingfest und damit zu Wissenschaft im modernen Sinn zu machen. Aber die Analogie ist nur scheinbar: die Physik, ob sie nun nach dem Größten oder dem Kleinsten ausgriff, von der klassischen Mechanik zur Relativitätstheorie einerseits, zur Quantentheorie andererseits, hat ihre mathematischen Methoden immer weiter aufstocken müssen; neben die „elementare“ Analysis traten Differentialgeometrie und Funktionalanalysis ^{28b}. Zu beurteilen, ob das Standardmodell der Elementarteilchen oder die Quantenfeldtheorie die letzten Worte bleiben werden über das, was wir uns heute als „Materie“ denken oder vorstellen, fehlt mir die Kompetenz; wie schon erwähnt, scheint noch keine Klarheit zu bestehen über die zu umfassender mathematischer Weltbeschreibung nötige Dimensionszahl. Was die Mathematik selbst betrifft, so haben wir ja schon darauf hingewiesen, daß ganz neuartige Begriffsbildungen und Strukturen sehr wohl zu erwarten sind. Im letzten Jahrhundert hat Grothendieck mit seiner Theorie der Motive demonstriert, daß die damals vorhandenen, schon sehr entwickelten Strukturbegriffe der algebraischen Geometrie weiterer Überhöhung fähig waren. Es ist möglich, wenn nicht wahrscheinlich, daß einige der oben besprochenen Vermutungen und Probleme wieder eine solche Überhöhung verlangen, ebenso wie das alte Problem der Kreisquadratur oder die Vermutung von Fermat mit den Methoden der jeweiligen Zeit nicht zu entscheiden war. Wenn sich, wie im Fall der Riemannschen Vermutung, seit mehr als hundert Jahren beste Köpfe abgearbeitet haben, wobei auch viel erreicht wurde, aber die Hauptfrage unbeantwortet blieb, dann liegt die Annahme nahe, daß fundamental Neues erfordert wird ^{28c}.

Die uns hier angehende Frage ist demnach, ob die Fundamente der Mathematik nicht noch einmal tiefer gelegt werden müssen. Nun ist die (mathematische) Logik schon herabgestiegen auf die für uns einfachste Ebene des Aussagens, nämlich der wohldefinierten (syntaktisch korrekt gebildeten) Formeln ohne freie Variable, anders gesagt des propositionalen Gehalts, also dessen, was wahr oder falsch sein kann. Zweifellos sind dieser Stufe der Phylogenese andere vorausgegangen, mit rudimentären Formen der Verständigung, die sich nach und nach aus den tierhaften entwickelt haben. Davon läßt sich sicher auch Mathematik machen, aber nur *davon*, nicht *damit*; Mathematik erforderte immer schon den Einsatz der jeweils höchstentwickelten Denkmittel. Man muß hoffen, daß eine höhere Stufe erreichbar ist und erreicht wird. Doch über Denkmöglichkeiten, die man (noch) nicht hat, *in abstracto* zu spekulieren, ist ein wenig sinnvolles Unternehmen; solche entspringen immer nur der Arbeit an konkreten Problemen und unter Mitwirkung von Instanzen, die wir kaum kennen und jedenfalls nicht kontrollieren können.

Die Logik unterscheidet (formalisierte) Theorien von ihren Modellen, und diese werden gewöhnlich im Mengenuniversum gebildet. Auch der Mengenbegriff ist in gewissem Sinne unhintergebar, wie schon Husserl ausführlich dargetan hat; er liegt jedem Allgemeinbegriff zugrunde; man kann die Mengenbildung nicht zurückführen auf einfachere Prozesse²⁹. Jedoch gibt es zur Modellbildung Alternativen, wie die Entwicklung der (mathematischen) Kategorientheorie gezeigt hat; sie entstand in den 40er Jahren des letzten Jahrhunderts, als die Beziehungen zwischen den Objekten, die man studierte, so kompliziert geworden waren, daß eine Theorie solcher Beziehungen nötig wurde. Zur Modellierung der Prädikatenlogik eignen sich auch Kategorien, die man Topoi nennt; grob gesagt solche, in denen die gewöhnlichen Prozesse der Mengenbildung „pfeiltheoretisch“, also nur in Terminus von Morphismen formuliert werden können. Das einfachste Beispiel für eine solche Umformulierung bietet der Begriff des Elements einer Menge M , dem pfeiltheoretisch ein Morphismus $E \rightarrow M$ entspricht, wo E ein Endobjekt ist; in der Mengenkategorie sind das alle einelementigen Mengen, allgemein ist E ein Endobjekt, wenn es zu jedem Objekt M genau einen Morphismus $M \rightarrow E$ gibt; diese universelle Eigenschaft macht die Endobjekte stets bis auf Isomorphie eindeutig. Die kategoriale Semantik hat eine besonders einfache Form von Infinitesimalrechnung ermöglicht, in der alle Funktionen stetig sind, wie es auch im Intuitionismus von Brouwer der Fall ist. Wie in diesem ist der Preis dafür, daß auch die Logik in solchen Topoi im allgemeinen intuitionistisch ist; der Satz vom Widerspruch bleibt unangetastet, aber das Tertium non datur fällt weg und damit die Möglichkeit indirekter Beweise (technisch gesprochen: die Wahrheitswerte bilden keine Boolesche, sondern nur mehr eine Heytingalgebra). In diesem Zusammenhang kann erwähnt werden, daß auch die Quantentheorie eine Abschwächung der klassischen Logik involviert³⁰.

Denkt man die Mengentheorie als eine Mathematik der Substanzen, so zeigt sich die Kategorientheorie als eine der Funktionen (die Objekte fungieren nur als Quelle und Ziel der Morphismen und können durch die Identitäten ersetzt werden); man könnte geradezu den Unterschied von Substanz- und Prozeßontologie vergleichend heranziehen. Andererseits erscheint die Topostheorie eher als Verallgemeinerung der Mengentheorie denn als Alternative zu ihr, insofern auch die Mengen einen Topos bilden und die Topostheorie einen schwachen Mengenbegriff voraussetzt, den der Klasse. Wie wir gesehen haben, sind die Mengenbeschreibung und die pfeiltheoretische Beschreibung im Fall eines einzelnen „Elements“ gleichwertig, nämlich aufeinander rückführbar; man kann den Elementbegriff ersetzen durch den des Morphismus, obwohl dieser prima facie in eine ganz andere Richtung weist. Seine Grundeigenschaft ist die der assoziativen Verknüpfbarkeit, die für allgemeine Kategorien das einzige Postulat bleibt; wenn man freilich die elementaren Prozesse der Mengenbildung, Produktmengen, interne hom-Mengen und Potenzmengen pfeiltheoretisch darstellen will, hat man schnell mit adjungierten Funktoren und Funktorkategorien zu tun. In diese ziemlich abstrakte Begriffswelt muß man sich eine Weile hineindenken (das ist natürlich nur Übungssache), während jene Mengenoperationen alltäglich sind, und nicht nur in der Mathematik (siehe Anhang D); die Axiomatik der Topoi ist (mindestens) ebenso komplex wie die der Mengen.

Sehr verschieden ist die Funktion der undefinierten Grundbegriffe. Die „natürliche“ Rolle der Elementbeziehung suggeriert eine Hierarchie von „Typen“, worauf Russell seine Theorie gründete: eine Menge gehört zu einem „logisch höheren“ Typ als ihre Elemente. Die Beziehung reproduziert sich darum nicht in der Iteration: Ich bin ein Element einer Familie, und diese ist (etwa für das Sozialamt) ein Element einer Menge von Familien, ich bin aber kein Element dieser Menge. Auch bei den Mengen, mit denen der *working mathematician* gewöhnlich zu tun hat, kommt es häufig vor, daß man $a \in b$ und $b \in c$ hat, und nur sehr selten ist dann auch $a \in c$; aber das ist natürlich nicht verboten und schon im Kleinsten möglich: $\{a, \{a\}\}$ (aus dieser Konstruktion läßt sich übrigens ein Modell für die Peanoaxiome entwickeln). Eine Menge im mathematischen Sinne wird eben konstituiert, mit den Worten Cantors, durch „jede Zusammenfassung von Gegenständen unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“, wobei diese Gegenstände in keinem „natürlichen“ Zusammenhang zu stehen brauchen. Die *raison d'être* der Morphismen dagegen ist gerade die Verknüpfbarkeit; verknüpfte Morphismen sind wieder solche, und es liegt schon im Begriff des Morphismus als einer „strukturhaltenden Abbildung“, daß auch die Objekte einer Kategorie von „derselben Art“ sind, insofern sie alle eine bestimmte Struktur tragen; im Mengenfall ist diese „leer“, sozusagen das strukturelle Vakuum. Hinzu kommt noch die Assoziativität dieser Verknüpfung; eine starke Forderung, ohne die man in der Kategorientheorie nicht von der Stelle käme, die aber im paradigmatischen Fall von Mengenabbildungen (schon von Relationen unter Mengen) automatisch erfüllt ist.

In gewisser Weise sind die Zugänge komplementär: in der Mengenmathematik ist die Elementbeziehung undefiniert, aber Morphismen werden definiert, in der kategorialen Mathematik ist es umgekehrt. Jene baut die internen Strukturen der Objekte „von innen“ auf, so in der Algebra durch Operationen mit Elementen, in der Topologie durch Verbände von Teilmengen; diese repräsentiert oder ersetzt sie durch die Gesamtheit der Morphismen, die ein Objekt als Quelle oder Ziel haben, also durch ihre „Stellung im Netzwerk“³¹. Analogie dazu: man kann ein menschliches Individuum charakterisieren durch sein „Innenleben“, seine Gedanken und Gefühle, aber auch durch sein äußeres Verhalten; bekanntlich gehört dieser Dualismus von Innen und Außen zu den großen ungelösten Problemen der Philosophie, in neuerer Zeit wieder virulent geworden durch den „Autopoiesis“-Gedanken.

Wie die Mengenlehre wurde auch die Kategorientheorie von manchen zunächst skeptisch betrachtet; Vertreter älterer Schule argwöhnten gar eine „Verflachung der Interessen“. Heute ist das Denken in Objekten und Morphismen ebenso geläufig wie das in Mengen und Elementen; wenigstens in Algebra und Topologie ist es geradezu ein methodisches Postulat geworden, mit jeder Klasse von Objekten auch zugehörige „strukturhaltende“ Abbildungen zu studieren. Die damit aufgekommenen Diagramme sind unentbehrliche Denkmittel geworden, vergleichbar den Kalkülen der Algebra, nur daß sie eben Beziehungen zwischen ganzen Strukturen darstellen statt solche zwischen Elementen; durch „Exaktheit“ und „Kommutativität“ in Diagrammen kommen sie unmittelbar zur Anschauung. Hier ist ein neues Kapitel zum Thema „Substanzbegriff und Funktionsbegriff“ aufgeschlagen, von dem Cassirer in seinem so betitelten Buch von

1910 noch nichts ahnen konnte. Halten wir fest: eine „Tieferlegung des Fundaments“ der Mathematik ist nicht in Sicht, aber die Möglichkeiten der Kategorientheorie sind vielleicht noch nicht ausgeschöpft. Jedenfalls ist es nach wie vor möglich, ja sogar wahrscheinlich, daß sich auf der vorhandenen Grundlage Strukturen definieren lassen, die unser Bild vom Ganzen verändern können. Beispiele dafür aus neuerer Zeit: die Matroide, die Motive, die Spektren der Topologie und die Eulersysteme der Zahlentheorie.

38

Die Mathematik hat, in Gemeinschaft mit der Naturwissenschaft, in den letzten 350 Jahren eine in der Geistesgeschichte fast einzig dastehende Entwicklung genommen; vergleichen läßt sich allenfalls jener Zeitraum des ersten vorchristlichen Jahrtausends, den Jaspers als „Achsenzeit“ bezeichnet hat. Ähnlich lange hat die griechische Plastik von ihren archaischen Anfängen bis zur Vollendung in der Klassik des 5. Jahrhunderts gebraucht, und Entsprechendes gilt von der großen Musik und Malerei des Abendlands. Wenn die Analogie nicht trügt, dann steht die Mathematik heute in einer Hochblüte, und wer wollte dem widersprechen. Das mathematische Wissen vermehrt und verbreitet sich schneller und weiter als je zuvor; der Zerfaserung entgegen wirken, als das mitgewachsene Rettende, der einheitliche mengentheoretische Aufbau, die Kategorientheorie und die – selbst mathematische – Metamathematik, von der oben die Rede war. Die einzelnen Disziplinen sind zugänglicher geworden, eine Voraussetzung für alles Weiterkommen; heute lernen Oberschüler, was einmal die besten Köpfe beschäftigte. Auch der Stil hat sich geändert: war die Mathematik bis ins 19. Jahrhundert wesentlich Sache einer kleinen Gruppe isolierter Forscher, so werden heute zentrale Probleme und Programme von Kollektiven bearbeitet, die über die Kontinente verteilt sind ³². Was manche als Merkzeichen einer Endzeit ansehen würden, könnte auch ein Hinweis darauf sein, daß sich eine höhere Stufe des Mathematisierens vorbereitet. Träumen möchte man von einer solchen, welche die rationalen Methoden des Abendlands mit dem visionären Zugang eines Ramanujan verbindet, der eine besondere Fähigkeit gehabt zu haben scheint, in mathematische Sachverhalte sozusagen „direkt hineinzublicken“, ohne den Leitfaden neuzeitlicher Strukturbegriffe. Muß das nicht dazugehören, wenn der menschliche Geist wirklich einmal ganz „zu sich selbst kommen“, alle seine Möglichkeiten verwirklichen soll?

39

Blicken wir nun „nach oben“, oder nach vorn, so haben wir eine Reihe großer Probleme gesehen, die noch gelöst werden sollten. Und dann? Dann wird es neue geben, wird man erwidern; man liest sogar manchmal von einem unbegrenzten Fortschreiten der Wissenschaft (so in der Krisisschrift von Husserl). Dem steht entgegen, daß (nach dem heutigen Stand der Astrophysik) der Aufenthalt der gens humana auf diesem Planeten befristet ist und schon deswegen von einem solchen Fortschreiten keine Rede sein kann. Und ein Umzug auf andere Himmelskörper (um diesen Gedanken einen Moment lang ernst zu nehmen) wäre zweifellos mit einer physischen Transformation der Gattung verbunden, vergleichbar derjenigen, die einst Wassertiere zu Landbewohnern machte. Folgerung: Wir können keine letzte Zahl denken, aber irgendwann wird es eine Zahl

geben, welche die größte ist, die je von einem Mitglied der Gattung homo sapiens gedacht wurde.

Natürlich wird es immer offene mathematische Fragen geben, das folgt schon aus dem Satz von Gödel oder (einfacher) aus der Tatsache, daß es unendlich viele Primzahlen, Zahlkörper, Gruppen, Differentialgleichungen und Varietäten gibt; es folgt aber nicht, daß es immer auch solche Probleme geben wird, deren Studium noch verspricht, uns weiterzubringen. Schon jetzt hält die Mathematik unendlich viele Strukturen bereit, von denen niemand weiß, ob und wie sie einmal zur Ausstattung künftiger Lebenswelten dienen oder zum Verständnis des Universums beitragen können. Die Geschichte von homo sapiens wird eines Tages beendet sein, sei es durch seinen Untergang oder – wie man hoffen möchte – durch Transformation in eine höhere Seinsweise (homo sapientior); jedenfalls wird es dann eine Phase gegeben haben, in der das mathematische Wissen seinen höchsten Stand erreicht hatte, und man kann sich Gedanken darüber machen, wie dieser beschaffen sein wird. Es wird vielleicht einmal Metatheoreme über die Zugänglichkeit und Relevanz von Fragestellungen geben; und sicherlich werden die Maschinen auch in der *ars inveniendi* und der *ars probandi* Fortschritte machen und dem Menschen einiges von dem abnehmen, was heute noch ihm vorbehalten zu sein scheint ^{32a}. Ich kann mir einen Zustand vorstellen, in dem die „großen Fragen“ von heute und übermorgen beantwortet sind und die mathematica nur mehr verwaltet werden müssen. Denn brauchen wird man sie, solange homo sapiens diesen Namen verdient, als den Bestand des *stricto sensu* Wißbaren, ein universelles *organon* zu streng rationaler Entfaltung von Denkmöglichkeiten, in diesem Sinne ein Ideales, das gleichwohl fähig ist, die Erfahrung des Realen zu ordnen und sich dieses verständlich und dienstbar zu machen – „des Menschen allerhöchste Kraft“, wie Mephisto sagt.

40

Hermann Weyl hat die Mathematik charakterisiert als die „Wissenschaft vom Unendlichen“ und hatte dafür sehr gute Gründe (siehe den Anhang); daraus folgt aber nicht, daß die Mathematik selbst, verstanden als menschliche Tätigkeit, zur Unendlichkeit verurteilt sei. Wenn hinter jedem gelösten Problem ein neues auftaucht, würde die nach (Selbst-)Erkenntnis strebende Menschheit nie ans Ziel gelangen, also gewissermaßen auf immer zum Narren gehalten, und an einen genius malignus glaube ich so wenig wie Descartes. Wenn die unendliche Strukturvielfalt, die uns die Mathematik aufweist, eine Verheißung und nicht ein Irrlicht für den menschlichen Geist sein soll, muß für diesen die Möglichkeit weiteren Aufstiegs bestehen, aber auch ein erreichbares Ziel. Die Natur bringt nichts auf den Weg, das sich nicht auch in seiner Weise erfüllen kann; sie läßt keinen Baum wachsen, dessen Früchte abfallen, bevor sie reifen ^{32b}. Wenn man sich vergegenwärtigt, mit welcher Hartnäckigkeit kleine Gemeinschaften von Forschern, über Länder verteilt, dennoch in ständigem Kontakt, an scheinbar verstiegenen und weltfernen Fragen sich abarbeiten, dann möchte man glauben, daß hier, Hegelsch gesagt, der Weltgeist seine Hand im Spiel hat, oder mit einem Ausdruck von Schopenhauer: der „Wille der Gattung“. Zugleich gilt aber auch Herders Wort: daß die Menschheit ihr Schicksal selbst in den Händen hält. Damit ist auch die Grenze des Baumvergleichs bezeichnet: diesem sind seine Möglichkeiten a priori vorgegeben, nicht aber dem „nicht festgestellte[n] Lebewesen“.

Vielleicht findet sich der Mathematiker eines (sicher fernen) Tages in der Rolle des Biologen, der zufrieden sein muß, wenn er die Gattungen mit ihren Formen und Gesetzen überschaut, aber nicht anstreben kann, alle ihre Arten zu kennen. Ich höre den Protest von Mathematikverliebten (und bin selbst ein solcher). Aber die Faszination der Mathematik, wie aller Wissenschaft, geht mehr von den offenen Problemen aus als von den „erledigten“; die Front der Forschung von heute ist das Schulwissen von morgen. (Das ist einer der Unterschiede zur Kunst, die nicht auf Erledigungen ausgeht). Und schließlich hat homo sapiens noch andere und drängendere Probleme, bei denen er, wie es scheint, in historischen Zeiten nicht viel weitergekommen ist, dazu solche, die er, seine *sapientia* unbedacht gebrauchend, selbst erzeugt hat. So rät uns Hermann Weyl von Vorgriffen ab: „Vielleicht ist „Mathematisieren“, wie Musizieren, eine schöpferische Tätigkeit des Menschen, deren Produkte nicht nur formal, sondern auch inhaltlich durch die Entscheidungen der Geschichte bedingt sind und daher vollständiger objektiver Erfassung trotzen“ (op.cit. Anm.13, S.279).

Anhang: Mathematik als Wissenschaft vom Unendlichen

„Aus dem Kelche dieses Geisterreiches
schäumt ihm seine Unendlichkeit.“

„Will man zum Schluß ein kurzes Schlagwort, welches den lebendigen Mittelpunkt der Mathematik trifft, so darf man wohl sagen: sie ist die *Wissenschaft vom Unendlichen*“. So schrieb Hermann Weyl in seinem Buch „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“³³. Das mag auf den ersten Blick überraschen; warum nannte er nicht die klassischen Disziplinen oder sprach von einer „allgemeinen Strukturwissenschaft“, warum das Unendliche? Fragen wir einmal: was mag in dem Menschen vorgegangen sein, dem zum ersten Mal bewußt wurde, daß er „im Prinzip“ immer weiterzählen könnte und damit in seinem Geist etwas hat, das es in der Welt nicht gibt oder jedenfalls nicht erfahrbare ist? Die Erregung, die damit verbunden gewesen sein muß, klingt noch bei Aischylos nach, wenn er den gefesselten Prometheus unter den Wohltaten, die er den Menschen gebracht hat, auch die Zahl nennen läßt: *arithmon, exochon sophismaton* (v.459). Begleitete dieses Zählenkönnen vielleicht den Durchbruch zur vollen Bewußtheit, zur Einsicht in die Besonderheit der menschlichen Lage? Bewußtsein ist an sich *apeiron*, grenzenlos, insofern es nichts von sich ausschließt (was ein „performativer Selbstwiderspruch“ wäre); und die Totalität des Denkbaren ist jederzeit unendlich. Ohne das Unendliche hätte nicht nur die Mathematik zuwenig Freiheit, ja dieser Begriff selbst verlöre seinen eigentümlichen Gehalt; zur Freiheit gehört ein offener Horizont.

Das Unendliche in der Mathematik kam oben schon gelegentlich zur Sprache; wir wollen uns einen Einblick verschaffen darin, wie es die *ganze* Mathematik durchsetzt. Dieses Thema ist selbst etwas Unendliches, und wir müssen uns mit dem Größten und einigen Beispielen begnügen. Zunächst versteht sich, daß hyperbolische Verwendungen des Begriffs, wie sie in der Alltags- und literarischen Sprache häufig sind, hier keinen Platz haben. In der Mathematik heißt eine Menge endlich, wenn sie zu einem Anfangsstück von N gleichmächtig ist, andernfalls unendlich. Demnach ist „unendlich“ ein reiner

Quantitätsbegriff und nur negativ definiert; es folgt aber unschwer, daß eine Menge genau dann unendlich ist, wenn sie eine mit N gleichmächtige Teilmenge enthält. Wenn wir jedoch das Unendliche als lineare Ausdehnung in Raum oder Zeit zu visualisieren suchen, als „unendlich Großes“ oder „Fernes“, denken wir eine Anordnung, die kein größtes Element hat. So definiert, erschiene Unendlichkeit der Menge M als Eigenschaft einer Anordnung von M , was aber nicht sachgemäß wäre, denn Mengen können sehr verschiedene Anordnungen tragen. Man unterscheide jedenfalls, für Mengen M , Unendlichkeit als Menge von Unendlichkeit bezüglich einer Anordnung von M ; ein endliches reelles Intervall ist als Menge unendlich und kann ein größtes Element haben oder nicht ³⁴. Wir fragen, wie die Mathematik verschiedene Unendlichkeiten zu ordnen und zu bewältigen sucht, und beginnen, wie es angemessen ist, beim griechischen Ursprung.

A

Nach einem vielzitierten Ausspruch von Hankel seien die Griechen „vor dem Abgrund des Unendlichen stehen geblieben“. Daran ist etwas Richtiges; so sagt Euklid (El.IX, §20) vorsichtig: „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl“, und nicht rundheraus: „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ ³⁵. Ganz verfehlt aber wäre die Behauptung, sie hätten diesen Abgrund und seine Bedeutung für die Mathematik nicht gesehen. Als Illustration diene uns ein klassisches Lehrstück, die Quadratur eines Parabelsegments durch Archimedes ³⁶. Methodisch grundlegend ist hier ein Satz aus Euklid (X, §1), für den Gericke die Bezeichnung „Exhaustionslemma“ vorschlägt: „Nimmt man beim Vorliegen zweier ungleicher (aber gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrigbleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.“ Da die kleinere Größe als beliebig klein gedacht werden kann, können wir in heutiger Sprechweise paraphrasieren: sind Zahlen $0 < q(i) < 1/2$, $i = 1, 2, 3, \dots$ gegeben, so konvergiert das Produkt der $q(i)$ gegen 0 (Beweis trivial). Das sagt nicht mehr als Euklid, obwohl die Begriffe von Konvergenz und Grenzwert in der griechischen Mathematik nicht vorkommen. Nun zum Beweis der Quadratur: verbindet man die Endpunkte A, B des Geradenstücks, welches das Segment definiert, mit dem Scheitel S der Parabel, entsteht ein Dreieck, dessen Fläche mit d bezeichnet sei. Behauptet wird: die Fläche p des Segments ist $= 4/3 d$ (damit ist die Quadratur geleistet, denn die eines Dreiecks ist leicht, siehe Gericke S.87). Für den ersten Schritt der Exhaustion stellt man fest, daß jedenfalls $d > p/2$ ist. Die weiteren Schritte ergeben sich so: seien M der Mittelpunkt des Geradenstücks, $P(1)$ und $P(2)$ die Mittelpunkte von AM und MB , $S(1)$ und $S(2)$ die Schnittpunkte der zu SM parallelen Geraden durch $P(1)$ und $P(2)$ mit der Parabel; dann konstituieren die Dreiecke $AS(1)S$ und $BS(2)S$ den nächsten Schritt, und die Summe ihrer Flächen ist $= d/4$. Fortsetzung des Verfahrens ergibt, nach dem Lemma, eine Exhaustion der Segmentfläche. Für den Flächeninhalt $p(n)$ der gesamten Dreiecksfolge nach dem n -ten Schritt folgt aus den geometrischen Eigenschaften der Parabel die Formel

$$p(n) = d(1 + 1/4 + (1/4)2 + \dots + (1/4)^n),$$

also (modern gesprochen) ein Anfangsstück einer geometrischen Reihe, multipliziert mit

d. Durch geschicktes Rechnen gelingt es Archimedes, die Reihe zu summieren, wobei wieder das Lemma benutzt wird, aber eine „unendliche Summe“ nicht vorkommt, und es ergibt sich die Behauptung³⁷.

Die Griechen haben hier (und in vergleichbaren Fällen) den „Abgrund des Unendlichen“ gemieden, aber sie sind keineswegs vor ihm „stehen geblieben“, sondern haben ihn, wie man vielleicht sagen darf, umgangen, wo sich ein natürlicher Übergang fand. Sie trieben Grenzwertrechnung sozusagen fallweise (und *avant la lettre*), doch die Systematik blieb ihnen verschlossen. Ein Grund dafür liegt darin, daß man die Proportionen nicht zur Grundlage einer Algebra mit Addition und Multiplikation machte, was natürlich für einen Grenzwertkalkül vorauszusetzen ist. Das wäre im Rahmen griechischer Begrifflichkeit möglich gewesen; tiefer aber liegt ein anderer: für eine *effiziente* Grenzwertrechnung, nämlich eine solche, die gestattet, Grenzwerte systematisch zu berechnen und zu benutzen, braucht man ein Kriterium, welches die Konvergenz sichert, ohne daß der Grenzwert bekannt ist (ein solches wurde bekanntlich im 19. Jahrhundert von Cauchy gefunden); erst damit wird es möglich, die fundamentalen transzendenten Funktionen (allen voran die Exponentialfunktion) in Gestalt konvergenter Reihen in die Mathematik einzuführen. Das aber setzt die Vollständigkeit voraus, und zu diesem Begriff ist die Mathematik der Alten nicht vorgedrungen, obwohl die Proportionenlehre des Eudoxos auch dafür ein durchaus geeigneter Boden war. (Auch Leibniz und Newton hatten ihn noch nicht, aber sie hatten den Mut und das Genie, sich des Unendlichkleinen in der „richtigen“ Weise zu bedienen.) Durch das Dedekindsche Schnittaxiom, das zur Vollständigkeit äquivalent ist, wird der Abgrund sozusagen zugeschüttet, werden die „potentiellen“ Unendlichkeiten, die den Cauchyschen Folgen innewohnen, mit einem Schlag „aktualisiert“; es bleibt die Aufgabe, das Axiom zu verifizieren, wie es im Standardaufbau des Zahlensystems geschieht (s.u. Abschnitt M)³⁸. Heute berechnen schon Oberschüler die Fläche des Parabelsegments durch einfache Integrale, man beachte aber: das ist nicht dasselbe wie die Quadratur von Archimedes, deren mathematisches Interesse eher in dem einfachen Verhältnis der Segmentfläche zur Dreiecksfläche liegt als in der Formel für den Inhalt.

B

In den Exhaustionen erscheint das Unendliche als schrittweiser Prozeß, dessen Resultat man „vorwegnehmen“ und damit die Unendlichkeit überspringen kann, wenn man sein Bildungsgesetz genügend gut versteht. Eine ganz andere Rolle spielt das Unendliche in der geometrischen Axiomatik. Euklid definiert die Parallelität so (I, Definitionen): „Parallel sind gerade Linien, die in der selben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner aufeinander treffen.“ Hier ist also das Unendliche nicht gemieden, sondern umstandslos in Gebrauch genommen, und zwar in seiner „aktualen“ Form: wenn man anhand dieser Definition entscheiden wollte, ob zwei Geraden parallel sind, müßte man, wenn dies der Fall ist, „bis ins Unendliche gehen“. Das ist umso bemerkenswerter, als sich Parallelität schon an den kleinsten Ausschnitten zeigt und „finite“ Kriterien dafür leicht zu beweisen sind. Euklid hätte ja auch Parallelität definieren können durch die Eigenschaft, daß eine Gerade, welche die beiden fraglichen schneidet, mit diesen gleiche Schnittwinkel hat, um dann zu beweisen, daß solche Geraden sich nicht schneiden; auf eine solche Argumentation verweist schon sein

Postulat 5.

Wir schweifen etwas ab, um auf eine Kapriole des mathematischen Weltgeistes hinzuweisen: daß nämlich, wenn dieser „Gang ins Unendliche“ aktual vollzogen wird, das Gegenteil eintritt. Jeder weiß, wie sich unzweifelhaft parallele Linien in großer Entfernung zu schneiden scheinen; unsere Anschauung kapituliert vor dem unendlich Großen oder Vielen, aber sie weiß sich zu helfen beim unendlich Fernen. Mathematisch korrekt ins Bild gesetzt hat das die perspektivische Malerei, wie die Renaissance sie entwickelt hat (das Altertum kannte nur rudimentäre Formen davon), und die umfassende Theorie dazu, die projektive Geometrie, entstand im 19. Jahrhundert. Die gewöhnliche („affine“) Ebene wird ergänzt zur projektiven durch Hinzunahme einer „unendlich fernen“ Geraden, auf der alle Paare von Parallelen ihren Schnittpunkt finden. Der algebraische Formalismus ist so einfach, daß er hier Platz hat: die projektive Ebene wird koordinatisiert durch Tripel $[a:b:c]$, wobei $[0:0:0]$ ausgeschlossen ist; die Tripel $[a:b:c]$ und $[a':b':c']$ sollen als gleich gelten, wenn sie durch einen gemeinsamen Faktor auseinander hervorgehen, und die affine Ebene wird durch $(a,b) \rightarrow [a:b:1]$ in die projektive eingebettet. Zwei Gleichungen $y = ax + b$, $y = ax + c$ für parallele Geraden werden nun zunächst „homogenisiert“ zu $y = ax + bz$, $y = ax + cz$ und haben dann in der projektiven Ebene die gemeinsame Lösung $[a:1:0]$, den gesuchten „unendlich fernen“ Punkt; die unendlich ferne Gerade besteht aus allen $[a:b:0]$ ³⁹. Eine analoge Konstruktion ist für alle algebro-geometrischen Gebilde beliebiger Dimension möglich.

Noch einfacher ist natürlich der Fall der Dimension Eins: die affine Gerade wird zur projektiven ergänzt durch einen einzigen unendlich fernen Punkt (nicht deren zwei, wie man vielleicht erwartet), was sich anhand der „stereographischen Projektion“ veranschaulichen läßt: denkt man sich auf die Gerade einen Kreis gelegt und alle Punkte der Geraden mit dessen Nordpol verbunden, so sieht man, daß die Punkte der Geraden eindeutig den Punkten des Kreises entsprechen, den Nordpol ausgenommen; die Entsprechung ist sogar homöomorph, die topologische Struktur bleibt erhalten, nur die Metrik ändert sich. Der Pol „vervollständigt“ das Bild der Geraden zum vollen Kreis, wobei die Anordnung aber keine natürliche Fortsetzung hat: man könnte ebenso gut sagen, daß der Pol größer, wie auch, daß er kleiner ist als alle Punkte der Geraden. Die Konstruktion führt zu einer weiteren, vielleicht wichtigeren Einsicht: die Unendlichkeit der Geraden besteht nicht in ihrer Ausdehnung, sondern in ihrer *Offenheit*; das läßt sich auch illustrieren durch Funktionen wie den Tangens, der das offene Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ mit der Geraden identifiziert. Eine endliche Strecke ohne ihre Endpunkte ist „genauso viel“ wie ihre unendliche Verlängerung nach beiden Seiten, sogar homöomorph zu ihr. In analoger Weise kann der n -dimensionale reelle Vektorraum durch einen einzigen Punkt zur n -dimensionalen Sphäre kompaktifiziert werden; Ähnliches gilt sogar für allgemeine topologische Räume (Einpunkt-Kompaktifizierung von Alexandroff/Tietze).

C

Eine andere, in gewisser Weise entgegengesetzte Form des Unendlichen steckt implizit in der Definition, die den ersten Satz des Buches von Euklid bildet: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“, insbesondere also keine Ausdehnung. Nicht ausdrücklich, aber faktisch wird hier das unendlich Kleine für die Mathematik bemüht. Unsere Anschauung scheitert

am unendlich Großen oder Vielen, weil sie ihm bei aller Bemühung nicht einmal näher kommt; hier scheitert sie, weil sie notwendig über das Ziel hinausschießt, denn ein unendlich Kleines ist für sie vom Nichts nicht zu unterscheiden. Mit der Ausdehnung eines Gegenstands verschwindet – für unseren Blick – der Gegenstand selbst ⁴⁰. Die Zumutung ist eher noch größer als beim Großen und Vielen, denn ein Unendliches, so scheint es uns wenigstens, umgibt uns als der Weltraum, jedenfalls steht seiner Unendlichkeit keine Anschauung entgegen, im Gegenteil: die Vorstellung, daß er irgendwo endet, ist schlechterdings unmöglich. Das unendlich Kleine jedoch, das aber nicht nichts sein soll, sondern als räumliches, geometrische Beziehungen konstituierendes Objekt zu denken ist, scheint in eine „virtuelle“ Dimension entrückt. Es hat etwas Paradoxes, zugleich aber tief Symbolisches, daß schon hier, buchstäblich am Anfang des systematischen Denkens in der Mathematik, der Fiktionscharakter der mathematischen Gegenstände so unverhüllt hervortritt, und zwar durch die Beteiligung eines Unendlichen ⁴¹. „Die Spannung zwischen dem Endlichen und Unendlichen für die Erkenntnis der Wirklichkeit fruchtbar gemacht zu haben, ist die große Leistung der Griechen,“ so schreibt Weyl (l.c.). Das Vorstehende sollte davon eine Andeutung geben.

Noch einmal sei hingewiesen auf das Erstaunliche der Tatsache, daß der Mensch es mit Hilfe solcher Fiktionen soweit bringen kann. Er benötigt, als das „nicht festgestellte Lebewesen“, immer schon Fiktionen, um sich in der Welt zu halten, lebte immer schon mit manchem „Als ob“. Die nächstliegenden, von mythologischer Natur, haben ihm geholfen, seine Lage zu ertragen, aber nicht, sie zu verbessern. Die mathematischen Fiktionen, die der heutigen Naturwissenschaft zugrundeliegen, haben dazu beigetragen, die Lage in vieler Hinsicht komfortabler zu machen, wobei freilich auch neue Gefährdungen sich erhoben; ob sie im Ganzen erträglicher geworden ist, wird hier nicht erörtert. Das Erstaunliche ist die unbestreitbare Wirksamkeit des auf den ersten Blick so Abstrakten, Künstlichen, Unweltlichen. Der Grund davon wurde schon angedeutet: die Elemente der heutigen Mathematik sind zugleich Elemente unserer Erfahrung und der theoretischen Arbeit am Erfahrenen, durch Axiomatik in eine entwicklungsfähige, vor allem auch kalkülfähige Form gebracht. Die Weltordnung nach Maßgabe unmittelbarer Bedürfnisse und Wünsche zu entwerfen, war ein erster Schritt; aber erst die Besinnung auf unsere eigentlichen, die Gattung auszeichnenden Fähigkeiten hat uns dieser Ordnung näher gebracht. Diese Besinnung war zu Anfang ein Schritt weg von der Welt in reine Betrachtung (*theoria*), und es dauerte 2000 Jahre, bis ihre Wirkung in der Welt sich gewaltig zu entfalten begann. Nun gilt es, aus dem dabei eingetretenen „spirituellen Bankrott“ (siehe Anm.28) herauszufinden.

D

Wir wenden uns nun zur Rolle des Unendlichen in der Mathematik von heute. Die Theorie des rein quantitativ Unendlichen, die Lehre von den Kardinal- und Ordinalzahlen, haben wir schon erwähnt; sie gestattet, bildlich gesprochen, den „Abgrund des Unendlichen“ auszuloten; wohlgemerkt aber nur den des unendlich Vielen; das unendlich Große und Kleine bleiben Gegenstände *sui generis*. Freilich meinte Weyl mit seiner Charakterisierung nicht das Unendliche der Mengentheorie, die er mit Skepsis betrachtete (siehe dazu Anm.13). Kurz zuvor hatte er ausgeführt: „Es ist nicht zu leugnen, daß in uns ein vom bloß phänomenalen Standpunkt schlechterdings unverständliches

Bedürfnis lebendig ist, das zur Totalität drängt. Gerade die Mathematik zeigt das mit besonderer Deutlichkeit. Aber aus ihr mögen wir auch lernen, daß jenem Bedürfnis Befriedigung werden kann nur unter einer Voraussetzung: wenn wir uns genügen lassen am Symbol und dem mystischen Irrtum entsagen, daß das Transzendente je in den Lichtkreis unserer schauenden Einsicht falle“ (l.c.). Ich möchte ergänzen: von einem logischen Standpunkt ist jenes Bedürfnis ein durchaus natürliches. Denn die *raison d' être* von Begriffen sind die Entitäten, die unter sie fallen, und damit auch deren Gesamtheiten, mit denen wir täglich zu tun haben und auch operieren; die Mengentheorie aber ist die Mathematik von den Extensionen der Begriffe. Der Begriff benennt seinen Umfang, ohne Präjudiz über dessen Quantität, und die theoretische Aktion ist genötigt, mit und in den Umfängen zu operieren, was ja auch dauernd geschieht. Durchschnitts- und Vereinigungsbildung sind alltäglich (sie entsprechen einfach dem „und“ und dem „oder“), jeder Einkaufszettel und jede Stückliste repräsentiert ein Mengenprodukt; ebenso oft suchen wir aus einer Gesamtheit heraus, was uns gerade interessiert (Axiom der Aussonderung), mit einer Menge von Gegenständen überschauen wir auch Teile oder Eigenschaften von ihnen (Axiom der Ersetzung), und der Zollbeamte, der von jeder Ladung eine Stichprobe nimmt, realisiert das Auswahlaxiom. All diese Operationen und ihre Regeln sind von den Quantitäten der jeweiligen Gegenstände ganz unabhängig, weshalb es unnatürlich erschiene, das Unendliche davon auszunehmen. Das einzige „eigentlich mathematische“ Axiom ist das des Unendlichen, welches die Existenz einer unter einer Nachfolgerabbildung abgeschlossenen Menge postuliert; die eben angeführten entfalten nur die elementare Logik der Mengenbildung. Allerdings führt dieses Unendliche zu neuen Phänomenen (s.o.6), aber das ist noch kein Grund, es auszuschließen, solange keine Widersprüche auftauchen. Müssen wir uns diesem Wagnis nicht stellen, wenn unsere Mathematik wirklich „Wissenschaft vom Unendlichen“ sein soll? Das Unendliche fällt freilich nicht „in den Lichtkreis unserer *schauenden* Einsicht“, wohl aber unserer *denkenden*. Im übrigen haben (wie schon festgestellt) alle mathematischen Objekte eine rein symbolische Existenz, allen voran die natürlichen Zahlen (nicht erst ihre Gesamtheit), Anzahl ohne Gezähltes, also *abstractum*, dazu noch in idealer Weise homogenisiert, indem sie durch Addition immer derselben Eins auseinander hervorgehen, was in der erfahrbaren Wirklichkeit nie vorkommt (vielleicht aber, gegen die Leibnizische *identitas indiscernibilium*, im Reiche der Elementarteilchen)

41a

E

Als nächstes ist festzustellen, daß sehr viele mathematische Objekte, angefangen von den Zahlen und den elementaren geometrischen Objekten, selbst unendliche Mengen bilden, versehen mit algebraischen und/oder topologischen Strukturen – alle „wichtigen“ topologischen Räume (Mannigfaltigkeiten), alle Zahl- und Funktionenkörper, dazu die Vektorräume über diesen, die klassischen Lieschen Gruppen; darin enthalten ist (fast) das gesamte Arsenal der Physik bis zur vierdimensionalen Raumzeit der Relativitätstheorie und den Hilberträumen der Quantenmechanik. Funktionenräume haben in aller Regel unendliche, Räume stetiger Funktionen überabzählbare Dimension. Sodann treten die meisten dieser unendlichen Objekte in unendlicher Menge auf, manche in Serien, und das gilt auch für viele endliche. Den Hauptanteil der endlichen einfachen Gruppen bilden die 16 Serien vom Lieschen Typ, und jede von diesen ist „dreifach“ unendlich: einmal durch

eine Primzahl, welche die Charakteristik des Primkörpers, sodann einen natürlichen Parameter, der die Dimension angibt, schließlich durch die unendlich vielen Erweiterungen des jeweiligen Primkörpers. Ähnliches gilt für die adelischen Gruppen, die in der Langlandstheorie figurieren; einfachste Beispiele sind die linearen Gruppen $GL(n, \mathbf{A})$, wo $\mathbf{A}$ den Adelring über dem rationalen Körper $\mathbf{Q}$ bezeichne. Hier durchläuft n die natürlichen Zahlen, $\mathbf{A}$ ist ein unendliches Produkt, erstreckt über alle Primzahlen, und der Faktor an die Stelle der Primzahl p ist die p -adische Kompletzierung von $\mathbf{Q}$ (mit einer Einschränkung, die wir übergehen können). Aber auch die meisten endlichen Objekte, mit denen sich die diskrete Mathematik und die Kombinatorik beschäftigen, sind (wenn auch weniger systematisierbar) in unendlichen Anzahlen vorhanden, Graphen, lateinische Quadrate, block designs.

F

Zu diesen quantitativen Unendlichkeiten treten nun die unendlich vielen Strukturen, die in all diesen Objekten realisiert sind. Besonders deutlich ist das bei den einfachen Gruppen: sind A und B nicht isomorph, dann kann wohl eine in der anderen enthalten sein, aber eine andere (nichttriviale) Beziehung zwischen ihnen kann es nicht geben, weil ein Morphismus $A \rightarrow B$ entweder trivial oder injektiv ist. In gewissem Sinne sind die einfachen Gruppen die „Primzahlen“ der Gruppentheorie, insofern jede Gruppe G eine Kompositionsreihe mit einfachen Faktoren hat, die durch G eindeutig bestimmt sind⁴². Die endlichen einfachen G sind seit den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts bekannt, die klassischen vom Lieschen Typ und die algebraischen waren es schon länger. Für topologische oder algebraische Mannigfaltigen gibt es nichts Vergleichbares, geschweige denn für allgemeine topologische Räume, auch nicht für die diskreten Objekte, mit denen sich die Kombinatorik befaßt. Besonders reich ist die Struktur der algebraischen Zahlkörper (endliche Erweiterungen des rationalen Grundkörpers). Jeder solche Körper K ist der Quotientenkörper seines Ganzheitsbereich, eines Unterrings, der in K das Analogon des Rings $\mathbf{Z}$ der gewöhnlichen ganzen Zahlen ist und dementsprechend eine arithmetische Struktur aufweist, die aber im allgemeinen sehr viel komplexer ist als die von $\mathbf{Z}$, mit unendlich vielen Einheiten und ohne eindeutige Primzerlegung. Jede rationale Primzahl wird von endlich viele Primidealen dieses Rings geteilt, und die Kenntnis dieser endlichen Mengen und der zugehörigen numerischen Invarianten „Verzweigungsindex“ und „Restklassengrad“ konstituiert, was man das Zerlegungsgesetz von K nennt. Seine Beherrschung ist das zentrale Problem der Theorie, man könnte es auch (mit einem Goetheschen Ausdruck) beschreiben als „die Taten und Leiden“ der Primzahlen in den Zahlkörpern. Es ist nur in Spezialfällen gelöst (am wichtigsten: „Klassenkörpertheorie“); seine Lösung läuft hinaus auf eine genauere Kenntnis der absoluten Galoisschen Gruppe des rationalen Körpers; das schon erwähnte Programm von Langlands ist ein großer, vielleicht der entscheidende Schritt auf dem Weg dorthin.

G

Das Studium all dieser Strukturen involviert nun das der Beziehungen zwischen diesen, ja es besteht zu einem großen Teil aus ihnen; das ist die dritte Unendlichkeit in der Mathematik, welche die beiden ersten überhöht; ihrer Erforschung dient die (mathematische) Kategorientheorie. Erneut ergibt sich eine dreifache Stufung: zunächst

die Morphismen innerhalb einer festen Kategorie, etwa die Homomorphismen zwischen Gruppen oder die stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Diese sind von mannigfacher Art; ein Objekt kann in ein anderes eingebettet sein oder auch dieses „überlagern“, und zwischen diesen Extremen gibt es beliebig viele Zwischenstufen, wie man am einfachsten Beispiel sieht, den Abbildungen zwischen bloßen Mengen (ohne Berücksichtigung „interner“ Strukturen): ist von den (nichtleeren) Mengen A und B nur eine unendlich, gibt es auch unendlich viele Abbildungen zwischen ihnen. Die ganze Kategorie erscheint so als ein Netzwerk, dessen Knoten die Objekte und dessen Fäden die Morphismen sind; wie schon festgestellt (Anm.31), sind die Objekte durch ihre „Stellung im Netz“ schon gekennzeichnet. Auf der zweiten Stufe werden den Objekten A einer Kategorie A sowie den Morphismen $f: A \rightarrow B$ in A Objekte $F(A)$, $F(B)$ und Morphismen $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ einer Kategorie B zugeordnet, und zwar derart, daß die Komposition der Morphismen erhalten wird: ist noch $g: B \rightarrow C$ ein Morphismus von A , so ist $F(gf) = F(g)F(f)$. So werden einem topologischen Raum Homologie- und Homotopiegruppen zugeordnet, einem Modul für eine Gruppe Kohomologiegruppen, alle mit einer natürlichen Zahl als Parameter. Die raison d' être der Funktoren ist, bestimmte Eigenschaften der Objekte zu isolieren; zum Beispiel enthält die Fundamentalgruppe eines Raums Information darüber, was für geschlossene Wege in diesem Raum existieren und wie sie sich kombinieren lassen; einzelne Qualitäten der Objekte werden so „vergegenständlicht“. Es leuchtet unmittelbar ein, daß man sie leichter studieren kann, wenn man sie mit den entsprechenden Qualitäten anderer Objekte in Beziehungen bringt, und eben das leisten die Funktoren. Eine mehr logische Funktion haben „Vergißfunktoren“, die einem Objekt ein „genus proximum“ zuordnen, indem von „differentia specifica“ abgesehen wird; etwa wenn man eine Gruppe als bloße Menge betrachtet. Auf der dritten Stufe schließlich werden die Funktoren selbst in Beziehung gesetzt, was auf Beziehungen $F(A) \rightarrow G(A)$ zwischen verschiedenen zugeordneten Objekten, also zwischen verschiedenen Eigenschaften desselben Objekts hinausläuft. Man spricht von „natürlichen Transformationen“; die Natürlichkeit meint hier, daß für $f: A \rightarrow B$ die Beziehungen $F(A) \rightarrow G(A)$ mit den Morphismen $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ und entsprechend für G „kompatibel“ sind, was sich durch ein „kommutatives Diagramm“ von Abbildungen ausdrückt. Das vielleicht einfachste Beispiel bietet die Determinante: jedem kommutativen Ring R kann man seine Einheitengruppe $R^\#$ zuordnen, ebenso die Gruppe $GL(2,R)$ der invertierbaren 2×2 -Matrizen über R ; beide Zuordnungen sind funktoriell; die Determinante $\det: GL(2,R) \rightarrow R^\#$ ist ebenfalls mit Ringhomomorphismen kompatibel und definiert eine natürliche Transformation zwischen beiden. Morphismen, Funktoren und natürliche Transformationen konstituieren das Beziehungsgeflecht zwischen den Objekten, die wir zuvor aufgezählt haben. Um die Stufenfolge dieser kategorialen Begriffe in ihre einfachste Form zu bringen: Morphismen sind Beziehungen zwischen gleichartigen Objekten, Funktoren solche zwischen Klassen nicht notwendig gleichartiger Objekte, und natürliche Transformationen sind Beziehungen zwischen Beziehungen. Ohne diese Begriffsbildungen, so abstrakt sie zunächst erscheinen mögen, kann man nicht hoffen, die ins Unendliche strebende Komplexität der verschiedenen Strukturen zu erfassen und in Beziehung zu setzen.

H

Innerhalb dieser Hierarchie finden sich nun noch weitere Erscheinungsformen des

Unendlichen. Als Erstes ist hier nochmals von den reellen Zahlen zu sprechen; die Benennung ihrer Mächtigkeit als „überabzählbar“ ist ja eine bloß negative. Die rationalen Zahlen teilen mit ihnen die Eigenschaft, daß zwischen je zweien, noch so eng benachbarten, unendlich viele weitere liegen, die gleichmächtig mit der Gesamtmenge sind; abzählbar ist auch noch der Körper der (über $\mathbb{Q}$) algebraischen Zahlen, deren jede durch ein rationales Polynom gegeben wird und in diesem Sinne nur endlich viel Information enthält. Die reellen Zahlen weisen darüber hinaus eine „Verdichtung nach innen“ auf, die Vollständigkeit, die in mannigfacher Weise charakterisierbar, aber nicht leicht vorstellbar ist. (Ich stelle mir gern eine mit Sand bedeckte Ebene vor, über die ein Gluthauch hinweggeht, so daß die Körner zu einer glasigen Fläche verschmelzen.) Hier eine etwas deutlichere Illustration: Denken wir uns alle Zahlen in Dezimalentwicklung, so sind die rationalen unter ihnen bekanntlich durch die Eigenschaft charakterisiert, daß diese Entwicklung periodisch wird; hingegen definiert eine *beliebige* Ziffernfolge, mit einem Komma versehen, eine wohlbestimmte reelle Zahl. Ist diese transzendent, so kann die Information, welche durch diese Folge gegeben wird, (abzählbar) unendlich sein; in diesem Sinne kann sich eine einzelne rationale Zahl zu einer einzelnen transzendenten verhalten wie das Endliche zum Unendlichen. Weyl sprach (im Zusammenhang mit der Theorie Brouwers) vom Kontinuum als einem „Medium freien Werdens“ (op.cit. S.73); ein Aspekt davon wird so deutlich ⁴³. Und dieses Medium spottet allem menschengemachten Werden: da es nur abzählbar viele Definitionen gibt, führt unser Standardmodell zu der merkwürdigen Konsequenz, daß eine ganze überabzählbare Zahlenmasse, auf die niemals ein menschliches Bemerken fallen wird, nur durch ihre schweigende Existenz unser Sprachspiel vom Kontinuum ermöglicht. Bei aller Bewunderung für den vollkommenen Bau der klassischen Analysis fällt es doch schwer zu glauben, daß dies das letzte Wort bleiben soll. Wie sehr übrigens die rationalen Zahlen, obwohl im Kontinuum dicht liegend, gegen dieses „verschwinden“, zeigt auch die Tatsache, daß ihnen (wie allen abzählbaren Teilmengen) das Lebesguemaß Null zukommt.

I

Die Limesbildung in den reellen Zahlen, die wir als unendlichen Prozeß denken, kam schon zur Sprache; ein ähnlicher Prozeß, aber für Funktionen statt für Zahlen, liegt im Begriff der Asymptotik für Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; einer von ihnen, derjenigen für die Primzahlfunktion, sind wir schon begegnet. Allgemeiner sind f und g „asymptotisch gleich“, $f \sim g$, wenn der Quotient $f(x)/g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt; man strebt an, für unbekannte oder komplizierte f bekannte oder einfachere g zu finden, die das Wachstum von f qualitativ beschreiben, wie es im Primzahlsatz geschieht (die Primzahlfunktion ist zwar leicht zu definieren, ihr Verlauf aber zunächst nicht erkennbar); das Wachstum von g erscheint dann in gewissem Sinne als der „Grenzwert“ (oder Mittelwert) des Wachstums von f . Analog kann man zahlentheoretische Funktionen behandeln, die nur für natürliche Argumente definiert sind, wie die Anzahl $\varphi(n)$ der zu n teilerfremden Zahlen unterhalb von n . Diese Anzahl selbst hat keine „vernünftige“ Asymptotik, aber ihre „summatorische Funktion“, die Summe der $\varphi(n)$ für $n \leq x$ ist asymptotisch $\sim 3\pi^{-2} x^2$; daraus gewinnt man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei beliebig herausgegriffene natürliche Zahlen teilerfremd sind, nämlich 0,6079... Es ist klar, daß asymptotische Aussagen überall da gebraucht werden, wo Analysis gebraucht wird,

und von großer Bedeutung in Anwendungen sind, wenn es um die Beschreibung langfristiger Entwicklungen geht.

Die Betrachtung solchen Wachstums führt zu einer weiteren „Verdichtung“ des reellen Kontinuums „nach innen“ wie auch Erweiterung „nach oben“ und „nach unten“, die hier Erwähnung verdient. Wir betrachten monotone Funktionen f mit $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ und identifizieren f und g , wenn f/g gegen eine positive Konstante strebt; die Klassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation nennen wir „Wachstumsordnungen“ und bezeichnen die Klasse eines f mit $\text{ord}(f)$. Die Klassen sind geordnet durch $\text{ord}(f) > \text{ord}(g)$, wenn $g/f \rightarrow 0$. Unter den Klassen finden sich die Klassen der Funktionen x^a , $a > 0$, also eine mit dem Kontinuum gleichmächtige Teilmenge. Bekanntlich wächst nun der Logarithmus $\log(x)$ schwächer, die Exponentialfunktion $\exp(x)$ aber stärker als jede positive Potenz. Damit werden die Klassen $\text{ord}(x^a)$ angereichert durch die Potenzen sowie Schachtelungen dieser Funktionen, es entstehen „infinitesimale Umgebungen“ für jedes $\text{ord}(x^a)$, denn $\text{ord}(\log(x) x^a) > \text{ord}(x^a)$, aber $\text{ord}(\log(x) x^a) < \text{ord}(x^b)$ für jedes $b > a$; „nach oben“ dagegen entstehen „aktuelle Unendlichkeiten“ wie $\text{ord}(\exp(x))$; dabei gibt es weder ein größtes noch ein kleinstes Wachstum. Durch diese Konstruktion entstehen also, mitten in der „Standardtheorie“, echte Infinitesimalien ohne die Ultraprodukte, die man in der Robinsonschen Nichtstandardtheorie benötigt⁴⁴.

J

Einen weiteren Aspekt des Unendlichen zeigen die „universellen Objekte“ der Kategorientheorie, die durch gewisse universelle Abbildungseigenschaften definiert und dadurch stets bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Die einfachsten sind „Anfangsobjekte“ 0 , definiert durch die Eigenschaft, daß es zu jedem Objekt A genau einen Morphismus $0 \rightarrow A$ gibt; durch Umkehrung des Pfeils sind Endobjekte definiert. In der Mengenkategorie ist die leere Menge das einzige Anfangsobjekt (das ist eine Konvention, denn genau genommen kann man auf der leeren Menge keine Funktion definieren, aber die Konvention ist sachgemäß), Endobjekte sind alle einelementigen Mengen; in der Gruppenkategorie ist die triviale Gruppe zugleich Anfangs- und Endobjekt. Weniger triviale Beispiele sind direkte Summen und Produkte, allgemeiner kategoriale „Grenzwerte“ wie induktive und projektive Limiten; die Limesbildung hat aber hier nichts mit Größen oder Prozessen zu tun, sondern ist rein „struktureller“ Natur. Ein Beispiel für einen projektiven Limes ist die „absolute“ Galoissche Gruppe eines Körpers K , der Limes aller $\text{Gal}(L/K)$, wo L alle endlichen Galoisschen Erweiterungen von K durchläuft. Ein induktiver Limes ist $\text{GL}(\infty, R)$ für einen Ring R , die Gruppe aller invertierbaren quadratischen Matrizen mit (abzählbar) unendlich vielen Zeilen und Spalten, die sich von der unendlichen Einheitsmatrix nur an endlich vielen Stellen unterscheiden; das ist der Limes der $\text{GL}(n, R)$ bezüglich der Einbettungen $\text{GL}(n, R) \rightarrow \text{GL}(n+1, R)$, $A \rightarrow \text{diag}(A, 1)$. Universelle Objekte sind stets bezogen auf eine Totalität von bestimmten Konstellationen von Morphismen, ihre Definition enthält regelmäßig die Wendungen „für alle...existiert genau ein...“, und die mit „alle“ bezeichneten Konstellationen sind im allgemeinen in unendlicher Anzahl vorhanden; es ist diese „All-Zuständigkeit“, welche die Universalität ausmacht. Bei unserm induktiven Gruppenlimes entsprechen die Morphismen des Limes in irgendeine Gruppe B bijektiv den Familien von Morphismen $\text{GL}(n, R) \rightarrow B$, die mit den Einbettungen $\text{GL}(n) \rightarrow \text{GL}(n+1)$ kompatibel

sind; im projektiven Fall muß man die Pfeile umdrehen (für ein Beispiel siehe Abschnitt M).

K

Es könnte nun scheinen, als bestünde die Mathematik aus lauter Strängen von Unendlichkeiten, die einander enthalten oder überkreuzen, so daß die „Spannung zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen“, von der Weyl spricht, ein wenig außer Sicht geraten ist. Jedoch gibt es in der Mathematik auch „strukturelle Solitäre“, die sich nicht in unendliche Reihen gleichartiger Objekte einordnen; auch in der höchsten Sphäre der Abstraktion finden sich, unvorhersehbar, ein paar Eigenwillige. Die ersten Beispiele sind wieder die Zahlen selbst: die natürlichen Zahlen sind durch die Peanoaxiome, die reellen Zahlen durch ihre Eigenschaft, einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper zu bilden, bis auf Isomorphie charakterisiert ⁴⁵; die ganzen Zahlen bilden den einzigen Ring, der auf allen abelschen Gruppen operiert, die rationalen Zahlen den Primkörper der Charakteristik 0. Auch der weitere Aufbau des Zahlensystems über $\mathbb{R}$ hinaus ist hier zu nennen, allgemein gesprochen die multiplikativen Strukturen in einem reellen Vektorraum endlicher Dimension. Seit durch Gauß die Darstellung komplexer Zahlen als Punkte der reellen Ebene bekannt wurde, begann man, ähnliche Strukturen auch in höheren Dimensionen zu suchen. Hamilton bemühte sich lange in drei Dimensionen, bis ihm aufging, daß es erst in vieren wieder eine solche gibt, die nach ihm benannten Quaternionen; sie erfüllen noch die üblichen Rechenregeln für einen Körper, aber mit der Einschränkung, daß die Multiplikation nicht mehr kommutativ ist. Später fand dann Cayley noch eine Multiplikation in acht Dimensionen, die Oktaven, bei denen auch die Assoziativität verloren ist. Heute weiß man, daß damit alle nullteilerfreien und mit der Addition distributiven Multiplikationen in endlicher reeller Dimension erfaßt sind; ein sehr tief liegendes Resultat, das nur mit Hilfsmitteln der algebraischen Topologie beweisbar ist ⁴⁶. Damit besteht das ganze klassische Zahlensystem (die Quaternionen und Oktaven einmal dazugerechnet) aus Solitären; das unterscheidet die Zahlen von den geometrischen Strukturen, die es in allen Dimensionen gibt. Die frühesten Beispiele struktureller Unikate aber bieten die fünf platonischen Körper, die schon die Pythagoreer kannten; wir haben sie oben erwähnt als einen Aspekt der nicht völlig aufgeklärten Tatsache, daß unser Anschauungsraum drei Dimensionen hat. Nur in der Ebene bilden die platonischen „Körper“, die regulären n -Ecke, eine unendliche Folge.

L

Unter den endlichen einfachen Gruppen finden sich außerhalb der unendlichen Serien (für deren Mitglieder man eine gute Strukturtheorie hat) noch 26 „sporadische“ Gruppen; ihre Klassifikation wurde in den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts abgeschlossen und stellt eine der größten kollektiven Leistungen der neueren Mathematik dar. Die letzte von ihnen, auch „monster group“ genannt, hat die wahrhaft astronomische (um nicht zu sagen: kosmische) Größenordnung von 8×10^{53} . Ähnlich gibt es unter den (irreduziblen) Wurzelsystemen, den strukturellen Kernen der klassischen Lieschen Gruppen und Algebren, neben 4 unendlichen Serien noch fünf „sporadische“. Man glaube aber nicht, daß die „solitären“ Objekte, auch wenn es keine weiteren „ihresgleichen“ gibt, keine Beziehung zu anderen mathematischen Gegenständen hätten; das Gegenteil ist der Fall.

Für die Zahlen braucht das nicht ausgeführt zu werden. Die Quaternionen sind unentbehrlich in der Theorie der Algebren über Zahlkörpern, jede endliche Gruppe tritt als Galoissche Gruppe von (Erweiterungen von) Zahlkörpern auf, die irreduziblen Wurzelsysteme enthalten das Bildungsgesetz auch für Serien linearer Gruppen. Die Beziehungen der „monster group“ zu Modulformen und zur Physik sind Gegenstand eines ganzen Theoriekomplexes, der unter dem Namen „monstrous moonshine“ bekannt ist. Es gibt kein mathematisches Objekt, das außerhalb jedes strukturellen Zusammenhangs mit anderen Objekten stünde; ein solcher wird ja schon durch die Definition hergestellt. Die angeführten Beispiele suggerieren sogar, daß gerade die Solitäre die interessantesten Zusammenhänge aufweisen, und das zuletzt erwähnte zeigt die „Spannung zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen“ in geradezu aufregender Weise – ein Spiel der Theorien, das einen geradezu musikalischen Charakter anzunehmen scheint.

Nicht ausgemacht ist der solitäre Charakter bei anderen, zum Teil ganz elementaren Objekten wie Fermatschen und Mersenneschen Primzahlen oder Primzahlzwillingen, und von ungeraden vollkommenen Zahlen weiß man nicht einmal, ob solche überhaupt existieren. Dasselbe gilt für endliche projektive Ebenen, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist (für solche existieren Körper dieser Elementanzahl, und die Konstruktion aus Abschnitt B läßt sich übertragen); schon für die Ordnung 12 weiß man die Antwort nicht. Bei komplizierteren block designs finden sich wieder Beispiele struktureller Unikate, so gewisse Steinersysteme; unser Wissen ist hier fragmentarisch, vielleicht deswegen, weil für diese Objekte anscheinend (noch) kein brauchbarer Morphismenbegriff existiert.

Das allgemeine Phänomen der Solitäre scheint zu sein: für kleine Parameterwerte existieren „spezielle“ Strukturen, die sich nicht „serialisieren“ lassen. So erscheinen sie wie Turbulenzen, die ein Wasserlauf an seinem Anfang aufweist, um dann in einen gleichmäßigen Fluß überzugehen; ein anderer Aspekt der „Spannung zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen“.

M

Zum Schluß sei an Beispielen noch einmal aufgezeigt, wie sich diese Spannung uns in verschiedenen Weisen darstellt (einiges dazu wurde ja schon gesagt). Die *Conditio humana* nötigt dazu, Mögliches und Künftiges zu denken, und die theoretische Aktion muß sich auf eine überschaubare Zahl von Alternativen beschränken, auch wo die Möglichkeiten unbegrenzt sind. Paradigmatisch dafür sind Raum, Zeit und Zahl: es ist ebenso unmöglich, sich ihre Begrenzung vorstellig zu machen, wie ihre Totalität; alle drei verweisen also auf etwas, das nur gedacht werden kann, allerdings auch gedacht werden muß; hier ist der Ort für jene Spannung ⁴⁷.

Beginnen wir mit einem trivialen Fall, in dem eine solche gar nicht besteht: ist M irgendeine angeordnete Menge, kann man M durch Hinzunahme eines weiteren Elements x zu $M' = M \cup \{x\}$ vergrößern und postulieren, daß $x > m$ sein soll für alle m ; dann sind die Axiome einer Anordnung für M' erfüllt, und x ist das größte Element, auch dann, wenn M selbst schon eines besitzt; das ist ersichtlich eine rein formale

Konstruktion, die auf die in M bestehende Anordnung gar keinen Bezug nimmt (es muß nicht einmal eine solche bestehen, was übrigens zeigt, wie schwach die Axiomatik ist). Anders verhält es sich bei der Ein-Punkt-Kompaktifizierung von R mittels der stereographischen Projektion (Abschnitt B): der hinzugenommene Nordpol „verschmilzt“ mit dem Bild der Geraden auf der Kreislinie zum vollen Kreis, der nun aber (außer der Kardinalität) nichts Unendliches mehr hat: die Unendlichkeit ist „aufgehoben“, wozu es aber der höheren Dimension bedurfte; die reine Quantität ist unverändert, aber ihre Ausdehnung hat sich ins Endliche gezogen, durch Stauchung an beiden Enden; und das war eine immanente, nicht ohne weiteres sichtbare Möglichkeit der Geraden.

In diesen Zusammenhang gehört eine andere Konstruktion, die der Anschauung Genüge tut, daß die Gerade in zwei Unendlichkeiten auseinanderstrebt: in einem topologischen Raum T (ein paar technisch nötige Eigenschaften übergehen wir) betrachtet man Folgen kompakter Teilmengen, die den Raum nach und nach überdecken, und kann zeigen, daß die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der Komplemente dieser Kompakta in gewissem Sinne einen Grenzwert hat; man spricht von den „Enden“ des Raums. Demnach hat ein kompakter Raum gar keine Enden, die reelle Gerade hat zwei, weil jede kompakte Teilmenge in einem Intervall $[-a, a]$ enthalten ist, dessen Komplement zwei Komponenten hat; die Ebene wiederum hat nur ein Ende, weil jede kompakte Teilmenge in einer großen Kreisfläche enthalten ist, deren Komplement zusammenhängt; alles in Übereinstimmung mit der Anschauung. Diese elegante Konstruktion entwickelt die „Möglichkeiten des Unendlichen“, die dem Raum innewohnen, aus diesem selbst, ohne ihn in irgendeiner Weise zu manipulieren oder über ihn hinaus zu gehen; sie zeigt, wie der Raum selbst auf diese Möglichkeiten „verweist“, ohne sie aber zu „aktualisieren“; ein anderer Aspekt der Spannung⁴⁸.

In diesem letzteren Fall war die Art der „Verweisung“ nicht leicht zu fassen; viel deutlicher ist sie bei den Cauchyschen Folgen. Aus der Definition einer solchen Folge (sagen wir, über den rationalen Zahlen) ergibt sich fast unmittelbar, daß sie erstens beschränkt ist, zweitens höchstens einen Häufungspunkt haben kann, denn je zwei solche hätten einen positiven Abstand, was mit der in der Definition ausgesprochenen Wachstumsbeschränkung der Folgenglieder nicht vereinbar ist. Hat sie also einen Häufungspunkt, so ist dieser auch der Grenzwert, das (zeitlich gedacht) „unendlich ferne“ Ziel der Folge; die Folge *repräsentiert* diesen jedenfalls, wenn er existiert, und die Frage ist, ob und wo das vielleicht der Fall ist. Der „Verweis“ deutet hier nicht auf ein (räumlich gesehen) unendlich Fernes oder Großes, vielmehr auf ein Endliches, das sich aber unserer ratio nur in einem unendlichen Prozeß erschließt (daß ein Nächstes uns ein Fernstes sein kann, kommt nicht nur in der Mathematik vor). Das Bisherige suggeriert, die Cauchyfolgen selbst zur Konstruktion des fraglichen Bereichs heranzuziehen. Die nächste Beobachtung ist, daß zwei Folgen nur dann denselben Grenzwert repräsentieren, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Damit ist die Bühne aufgestellt für die fundamentale Konstruktion, die jetzt nur noch (einfache) Algebra ist: die Cauchyfolgen bilden einen Ring CF , in dem die Nullfolgen ein maximales Ideal NF bilden; der Restklassenring $R = CF/NF$ ist also ein Körper, und der Grundkörper ist darin durch die konstanten Folgen eingebettet. Jetzt hat man Anordnung und Betrag auf R auszudehnen und beweist dann leicht die Vollständigkeit. Die Konstruktion ist möglich über jedem Körper mit einem Absolutbetrag (nur dieser zählt hier, nicht die Anordnung); ist der

Grundkörper schon vollständig, unterscheidet sich jede Cauchyfolge durch eine konstante Folge von einer Nullfolge, und die Konstruktion reproduziert einfach den Grundkörper. Dies ist vielleicht das eindrucklichste Beispiel dafür, wie sich mathematische Konstruktion doch mitunter am eigenen Zopf emporziehen kann, oder besser: wie das „richtig gesehene“ Problem von selbst seine Auflösung offeriert.

N

Bei den kategorialen Limiten hingegen ist der „Grenzwert“ schon mit der Folge selbst gegeben. Wir betrachten das einfachste (nichttriviale) Beispiel eines projektiven Limes: für alle natürlichen n seien nichtleere Mengen $X(n)$ gegeben, dazu Abbildungen $f(n+1): X(n+1) \rightarrow X(n)$; diese data konstituieren ein *projektives System*. Sein Limes, $\lim.\text{proj.}(X(n))$, besteht aus allen unendlichen „Vektoren“ $(x(1), x(2), \dots)$ aus dem Mengenprodukt aller $X(n)$ mit der Eigenschaft $(f(n+1))(x(n+1)) = x(n)$. Dieser Limes kann leer sein, ist es aber nicht z.B. wenn alle $f(n)$ surjektiv oder alle $X(n)$ endlich sind (letzteres ist nicht selbstverständlich, der Beweis erfordert das Zornsche Lemma). Der $\lim.\text{proj.}(X(n))$ hat kanonische Projektionen in die Faktoren $X(n)$, und die universelle Abbildungseigenschaft besagt: Ist Y irgendeine Menge und sind $g(n): Y \rightarrow X(n)$ Mengenabbildungen, derart daß stets $g(n) = f(n+1) \circ g(n+1)$ ist, so faktorisieren die $g(n)$ eindeutig über den Limes und die Projektionen (das ist unmittelbar klar). Der Limes kann die Mächtigkeit des Kontinuums haben, auch wenn alle $X(n)$ endlich sind; das kommt vor bei den absoluten Galoisgruppen der Zahlkörper oder bei den Kompletterungen der Ganzheitsbereiche nach den endlichen Primstellen 49. Hier ist offenbar die „Spannung zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen“ aufgehoben, aber im Hegelschen Doppelsinn: die Abbildungen $f(n)$ verweisen nicht nur auf den Limes, wie es bei Cauchyfolgen der Fall ist, sondern sie konstituieren ihn. Man vergleiche das mit der Folge der natürlichen Zahlen: diese konstituiert durch ihr Bildungsgesetz eine Richtung, aber sie weist kein Ziel; sie läßt uns vielmehr fragen, wie ein solches „aktual Unendliches“ beschaffen sein könnte.

Die absolute Galoisgruppe $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ von $\mathbb{Q}$, deren Struktur man nicht zureichend kennt, ist ein Kandidat für eine weitere Art Unendlichkeit, nämlich unendliche Komplexität. Topologisch läßt sich einiges sagen: als proendliche Gruppe ist G kompakt und Hausdorffsch mit einer Umgebungsbasis der Eins aus Normalteilern; die Mächtigkeit ist die des Kontinuums. Die maximale abelsche Faktorgruppe ist durch die Klassenkörpertheorie bekannt. Eine Andeutung zur Komplexität: es ist (vergleichsweise) leicht zu zeigen, daß alle symmetrischen Gruppen unendlich oft als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ auftreten, weiter ist jede endliche Gruppe in eine symmetrische einbettbar. Daraus folgt, daß alle endlichen Gruppen unendlich oft als Faktorgruppen von Untergruppen von G auftreten (erwartet wird, daß sie alle schon über $\mathbb{Q}$ realisierbar sind). Hier fragt sich, wie wir unendliche Komplexität von Chaos unterscheiden können – was uns als Ordnung begreiflich sein soll, muß etwas Endliches sein, auch wenn das Geordnete selbst unendlich ist. Haben wir überhaupt einen *mathematischen Begriff* von „struktureller Komplexität“, sei es auch nur von Gruppen, so wie wir einen solchen für algorithmische Komplexität haben? Ein vergleichbares Problem stellt sich für die transzendenten Zahlen (siehe den nächsten Abschnitt).

Eine ganz andere, keineswegs „aufgehobene“ Art der „Verweisung ins Unendliche“ finden wir in der Geometrie, bei den Proportionen von Längen und Flächen. Die Griechen wußten schon, daß die Kreisfläche in einer festen Proportion zum Quadrat des Radius steht (Euklid, XII, 2), und hatten auch, wie ihre babylonischen und ägyptischen Vorgänger, Näherungswerte für die Konstante der Proportion, die „Kreiszahl“. Heute wissen wir (wie schon erwähnt), daß diese Zahl durch rationale Näherungen nur eingeschachtelt, aber nie exakt erfaßt werden kann, sogar mehr: daß sie nicht einfach „irrational“, sondern „transzendent“ ist, das heißt: nicht Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Jeder Beweis dieser Aussage setzt voraus, daß man π auf der reellen Geraden irgendwie festlegt, durch Angabe einer konvergenten Folge oder als kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion, die selbst als unendliche Reihe gegeben ist. Ein Beweis ohne infinitesimale Methoden ist also a limine ausgeschlossen; die geometrisch so einfache Beziehung zwischen Kreis und Quadrat – dieselbe Strecke hier als Seitenlänge, dort als Radius genommen – setzt sich um in ein transzendentes Verhältnis der Flächeninhalte⁵⁰. Noch simpler ist der Fall, der die Pythagoreer so erregte: in ein Quadrat die Diagonale einzuzeichnen, ist nicht einmal eine Aufgabe zu nennen, da ja die Endpunkte schon gegeben sind, dennoch ist das Längenverhältnis irrational. Zwischen diesen elementaren geometrischen Gebilden und der Zahlenwelt besteht unleugbar ein Spannungsverhältnis: Zahlen und Figuren passen nicht ohne weiteres zusammen. Wenn man, in Kantischen Terminus, jene Gebilde als primordiale mathematische Manifestationen unserer Raumvorstellung, die natürlichen Zahlen aber als solche unser Zeitvorstellung ansieht, so stellt sich die (mathematische) Irrationalität als ein Abgrund zwischen den Anschauungsformen dar, der sich bisher nur teilweise unserer Einsicht erschlossen hat.

Als letztes Beispiel betrachten wir die im 19. Jahrhundert entstandene Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Wie früher gesagt, ist Ursprung und Zweck dieser Gruppen, auf Mengen zu operieren, die ursprünglich endlich sind; so operieren die Symmetriegruppen der Platonischen Körper auf den Mengen der Ecken, Seiten und Flächen der Körper, Galoissche Gruppen auf den ebenfalls endlichen Mengen der Nullstellen von Polynomen. Diese Mengen haben aber keine interne Struktur, aus der sich wesentliche Informationen über eine operierende Gruppe gewinnen lassen. Anders verhält es sich mit Operationen auf Vektorräumen, vorzugsweise über dem komplexen Körper (das ist der „klassische“ Fall und der Hintergrund für die genannten Symmetriegruppen, da diese, aus Rotationen und Spiegelungen bestehend, natürliche Untergruppen der linearen Gruppen sind). Unter einer *Darstellung* einer Gruppe G versteht man einen Homomorphismus $G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, durch den G auf dem n -dimensionalen Raum über $\mathbb{C}$ linear operiert. Der Begriff erfaßt also nur die Bilder von G in verschiedenen linearen Gruppen, doch der Gewinn ist groß, denn so werden die schlagkräftigen Methoden der Linearen Algebra, vor allem die Eigenwerttheorie, für die Strukturtheorie der Gruppen nutzbar. Daß man nichts verliert, zeigt die Tatsache, daß sich G aus der Kategorie seiner Darstellungen zurückgewinnen läßt⁵¹. Jedes G kann in ein $GL(n, \mathbb{C})$ eingebettet werden („reguläre“ Darstellung); alle Darstellungen zerfallen in „irreduzible“, deren Anzahl ist auch die Anzahl der Konjugationsklassen von G , ihre Grade n sind Teiler der Elementanzahl von G ; das sind nur die einfachsten Tatsachen⁵². Die Operationen endlicher Gruppen auf unendlichen

Räumen sind ein Schlüssel zur Strukturtheorie der Gruppen; das gehört heute zum kleinen Einmaleins der Gruppentheoretiker.

Unser Konzert der Unendlichkeiten sei damit beendet. Wir können resümieren: Um das Endliche zu verstehen, müssen wir durch das Unendliche gehen. Das ist der genaue Kontrapunkt zu einem Ausspruch von Goethe: „Willst du ins Unendliche schreiten / geh nur im Endlichen nach allen Seiten“⁵³. Ein Kontrapunkt ist aber, wie in der Musik, kein Widerspruch, sondern eine Ergänzung. Die Mathematik wird beiden gerecht, und auch der Spannung zwischen ihnen.

Anmerkungen und Nachweise

1 G.Dux, „Die Zeit in der Geschichte“, Frankfurt 1992, S.23.

1a Das schließt nicht aus, daß man Mathematik in verschiedenem Geiste treiben kann; so unterschied Spengler „apollinische“ (antike) von „faustischer“ (neuzeitlicher) Mathematik; wir werden sehen, was damit gemeint ist.

2 E.K., Mathematik für Philosophen, Leipzig 2004.

3 Einer der seltenen Fälle liegt derzeit vor, da sich die Fachwelt nicht einig zu sein scheint, ob Mochizukis Beweis der abc-Vermutung korrekt ist (geschrieben 2024).

3a Hier mag vermerkt werden, daß Aristoteles Met. XII. 1073b die Astronomie als diejenige mathematische (!) Wissenschaft bezeichnet, die der Philosophie am nächsten steht.

4 Ausführliche Proben davon bietet H.Gericke, Mathematik in Antike und Orient, Wiesbaden 1992.

5 Man lese dazu W.Heisenberg, Das Naturbild der heutigen Physik, Hamburg 1955, S.41f

5a Das kann allerdings beliebig schwierig werden; man denke an das Bertrandsche Paradoxon.

5b J.Dieudonné, A Panorama of Pure Mathematics, Academic Press 1982, S.7.

6 Was aber schon im Mittelalter von einigen gesehen worden war; siehe H.Gericke, Mathematik im Abendland, Wiesbaden 1992, S.146.

7 In diesem Zusammenhang ist vielleicht ein Fall von Interesse, in dem das Abzählbare mit dem Kontinuierlichen in engstem Bezug steht: abelsche topologische Gruppen sind diskret genau dann, wenn ihre Charaktergruppe kompakt ist, und umgekehrt (eine

Folgerung aus dem Dualitätssatz von Pontrjagin); in diesem Sinne sind die additive Gruppe der ganzen Zahlen und der Einheitskreis einander zugeordnet.

7a Der ganze einschlägige Abschnitt im Siebenten Brief kann hier nicht wiedergegeben, schon gar nicht adäquat gewürdigt werden. Hier nur ein Vorschlag: die „Idee“ des Kreises (oder ähnlicher Objekte) kann nicht *definiert* werden, sie wird aber *repräsentiert* durch die Gesamtheit dessen, was unter den Begriff fällt, sich aus ihm ableiten läßt oder mit ihm verwandt ist, und dazu gehören nicht nur Sätze der Kreisgeometrie, wie sie Euklid im dritten und vierten Buch entwickelt, sondern auch die angeführten Verallgemeinerungen. Seiner „Idee“ am nächsten kommt vielleicht das zugehörige „Motiv“, siehe dazu J.-P. Serre, Oeuvres Bd.IV, S. 228. Der Dialektiker muß also auch Synoptiker sein, d.h. imstande, verschiedene Objekte oder Sachverhalte zu vergleichen und ihr Gemeinsames und Unterscheidendes zu benennen, und das fordert Platon Pol. 537c von den zur Herrschaft im Staate Auszubildenden. Siehe auch meinen Aufsatz „Platons ungeschriebene Lehre und die Mathematik von heute“, in E.K., Studien zur Mathematik und Philosophie, Leipziger Universitätsverlag 2012.

8 Daß nicht alle Bereiche sich solcher Behandlung fügen, braucht nicht ausgeführt zu werden. Man mag von einer „Logik des Herzens“ sprechen, aber für diese gibt es keine Axiomatik, wie schon des Catullus „Odi et amo“ zeigt, und mit Begriff, Urteil und Schluß hat sie wenig zu tun. Eine Wissenschaft von ihr braucht andere Methoden.

9 Vgl. Faust 1608.

10 Was hielt die Griechen davon ab, die Proportionen als verallgemeinerte Zahlen aufzufassen? Diese fungieren doch bei jeder Maßbestimmung als Proportion, nämlich zwischen einer gegebenen und einer Einheitsgröße, so wenn ich sage, daß mein Schreibtisch drei Fuß hoch ist. Die physikalischen Dimensionen heben sich auf, die Proportionen sind „absolute“ Größen wie die Zahlen; das zeigt sich auch bei Euklid daran, daß Proportionen zwischen Größen verschiedener Art miteinander verglichen werden können. Das ganz elementare Dedekindsche Vollständigkeitsaxiom läßt sich mühelos schon für die Proportionen formulieren; ist es wirklich „stärker“ als die Axiome der Geometrie? Wenn man dann noch die Proportionen als Punkte einer Geraden denkt und die Rechenoperationen von den Zahlen auf diese ausdehnt (was elementargeometrisch geht, ohne daß die Rationalitätsfrage dabei eine Rolle spielt), hat man das reelle Kontinuum, wie wir es heute kennen. Die „Wechselwegnahme“, *antanaresis*, nämlich des jeweils Kürzeren vom Längeren, beginnend mit Seite und Diagonale des Quadrats, führt nur zum Beweis der Inkommensurabilität (= Irrationalität der Proportion), gibt aber keinen Aufschluß darüber, wie sich dieses Irrationale zum Rationalen in algebraischer Hinsicht verhält (was in diesem Fall freilich nach dem Satz von Pythagoras klar ist).

11 Mit dem Funktionsbegriff verbinden wir gewöhnlich eine Art Gesetzmäßigkeit oder Rolle; mathematisch ist eine Funktion $f: M \rightarrow N$ eine Relation, die jedem m genau ein n zuordnet; spezifische Beziehungen zwischen den so einander zugeordneten Elementen spielen für den allgemeinen Begriff keine Rolle, ebenso wie beim abstrakten Mengenbegriff keine solchen zwischen den Elementen einer Menge verlangt werden; die

abzählende Kombinatorik betrachtet *alle* Abbildungen $M \rightarrow N$ (für endliche M und N). Jede konkrete Funktion weist natürlich solche auf, so wenn man Beobachtungsgrößen durch die Zeit verfolgt oder ihre räumliche Verteilung studiert oder eine Klasse von Objekten nach bestimmten ihnen zukommenden Eigenschaften einteilt. Mathematisch selten ist jedoch, was in der Welt oft der Fall ist: daß eine Funktion zwar wohldefiniert ist, man aber kein Mittel hat, ihre Werte zu berechnen.

12 Die Auffassung, daß das Kontinuum nicht adäquat als Punktmenge zu denken sei, findet sich schon bei Aristoteles und hat bis heute ihre Vertreter; siehe Gericke (Anm.6), S.144ff, und mein Buch „Mathematische Modelle des Kontinuums“, Springer-Verlag 2019, Einleitung. Übrigens existiert neben der analytischen nach wie vor eine synthetische Geometrie.

13 In einem (später geschriebenen) Anhang zu seinem Buch „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“ hat Hermann Weyl sein Unbehagen an der Mengenmathematik offen ausgesprochen: „Die tiefste Wurzel des Übels [der Antinomien, E.K.] liegt anderswo: ein zum Unendlichen offenes Feld von Möglichkeiten ist für ein geschlossenes Gebiet von in sich selbst existierenden Dingen gehalten worden. Dies ist, wie Brouwer nachwies, ein Irrtum, der Sündenfall und die Erbsünde der Mengentheorie, selbst dann, wenn sich keine Antinomien daraus ergeben“. (Das Buch entstand 1926; ich zitiere aus der erweiterten Fassung von 1949 in einer Ausgabe des Oldenbourg Verlags, München 1966, S.299f.) Ich bekenne, daß ich Weyl hier nicht folge. Die Russellsche Antinomie (die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten) handelt zwar von Mengen, aber Unendlichkeit spielt hier keine Rolle; es ist allein die Kombination der Elementbeziehung mit dem Axiom der Aussonderung, in der sich die Logik sozusagen selbst ein Bein stellt, nicht viel anders als beim Lügnerparadox. Mit dieser Möglichkeit zu stolpern muß homo sapiens leben; das gehört zum Preis für die sapientia. Was „in sich selbst existierende Dinge“ sein sollen, verstehe ich nicht; wenn statt „in sich“ hier „an sich“ im Sinne Kants gemeint ist, wird Falsches unterstellt, denn die mathematischen Objekte sind (wie sich schon beim griechischen Anfang zeigte) ausnahmslos Fiktionen und existieren allein im und durch den mathematischen Diskurs. Ich sehe auch nicht, wieso das „offene Feld von Möglichkeiten“ durch die übliche Konstruktion von $\mathbb{R}$ (mittels Cauchyfolgen oder Schnitten) zu einem „geschlossenen“ wird (s.o. Abschnitt H). Als „offenes Feld“ erscheinen die Zahlen unserer *Vorstellung*, die Mathematik aber hat es zu tun mit dem *Begriff* der Zahl. Was Brouwer nachgewiesen hat, ist die Existenz einer strikt konstruktiven und finitistischen Theorie des Kontinuums, dazu unter Vermeidung des tertium non datur, allerdings um den Preis, daß Aussagen, die intuitiv (!) wie auch im Licht der Erfahrung nicht einmal bezweifelbar sind, wie die Existenz unstetiger Funktionen, der Zwischenwertsatz und sogar die Dreiecksungleichung, dem Verdikt verfallen (was übrigens zeigt, wie stark die Konsequenzen sind, die der Gebrauch des aktual Unendlichen hat). Und von „Irrtum“ oder gar „Sünde“ kann höchstens dann die Rede sein, wenn die Mengenmathematik tatsächlich nicht mehr Hinnehmbares hervorbringt. In mittlerweile 100 Jahren skrupulöser Grundlagenarbeit ist das nicht geschehen, und sollte es einmal geschehen, wird man eben korrigieren. Als wahrer Sündenfall würde mir erscheinen, wenn man ein Instrument, das universell einsetzbar und in Theorie und Praxis tausendfach bewährt ist, ungenutzt lassen würde. Zugegeben: die Mengenaxiomatik präsentiert sich keineswegs

als ein „harmonisches“ Ganzes, macht vielmehr den Eindruck einer „rhapsodischen Auffassung“. Aber das mathematische Gesamtunternehmen ist zu wichtig, als daß man ästhetischen Gesichtspunkten einen Vorrang einräumen dürfte. Und es bleibt paradox, daß Weyl, der das Unendliche den „lebendigen Mittelpunkt“ der Mathematik nannte, seine Zustimmung versagt, wo sie dieses Unendliche selbst zum Gegenstand macht.

14 Die beiden zuletzt genannten Resultate setzen moderne Algebra bzw. Analysis voraus, das erste aber nicht. Die ganz elementaren Beispiele für nichteuklidische Geometrien, nämlich die Kugelfläche (elliptische Geometrie) und die Poincarésche obere Halbebene (hyperbolische Geometrie) hätte auch ein Mathematiker der hellenistischen Zeit verstanden. Es fragt sich allerdings, ob er sie als Erledigung des ebenen Problems akzeptiert hätte; denn das hätte erfordert, sich von allen überkommenen Vorstellungen zu lösen und die ganze Grundbegrifflichkeit auf ein anderes Modell zu übertragen. Eben dies ermöglicht eine Axiomatik im Sinne Hilberts, der einmal bemerkte, man müsse in der Geometrie jederzeit statt „Ebenen, Gerade und Punkte“ auch „Tische, Stühle und Bierseidel“ sagen können.

14a Siehe den Artikel von M.Rabin in J.Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic, Amsterdam 1991, S.606.

15 Im Netz erhältlich mit sorgfältiger Beschreibung aller Probleme durch Berufene unter www.claymath.org.

15a Die folgende Überlegung liegt nahe: es genügt, zu beweisen, daß man von jedem n ausgehend nach endlich vielen Schritten zu einem kleineren gelangt. Nun wird ein gerades n halbiert, ein ungerades aber nur „veranderthalbfacht“ und zum nächsten Ganzen aufgerundet. Da es ebensoviele gerade wie ungerade Zahlen gibt, sollte man erwarten, daß im Verfolg des Verfahrens solche auch „statistisch“ gleich oft auftreten, woraus die Behauptung folgen würde. Der Leser mag darüber nachdenken, warum das noch keinen Beweis konstituiert.

16 Zum Problem siehe H.Päs, Warum ist das Universum dreidimensional? Spektrum.de SciLogs 29.11.2017, auch im Netz. Grundlegendes bei Weyl (op.cit., Anm.13, S.174f).

16a Das wohl einfachste Beispiel für die Beziehungen zwischen Arithmetik und Analysis ist die (auf Euler zurückgehende) logische Beziehung zwischen der Unendlichkeit der Primzahlmenge und der Divergenz der harmonischen Reihe. Um sie einzusehen, denke man sich, für endlich viele Primzahlen p , die Faktoren $(1 - p^{-1})^{-1}$ in geometrische Reihen entwickelt und ausmultipliziert; das Resultat ist der Teil der harmonischen Reihe, in dem nur die $1/n$ auftreten, für welche n nur Primteiler in der gegebenen Menge von Primzahlen hat. Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, wäre das die ganze Reihe, die aber divergent ist, während jenes Produkt natürlich eine gewöhnliche rationale Zahl darstellte.

17 Siehe dazu meine Arbeit „On Multiplicative Types“, Hamburger Beiträge zur Mathematik, Nr. 443, 2012.

18 Die Kenner weise ich noch darauf hin, daß die „Inkompatibilität“ in den

Komplettierungen nach den nichtarchimedischen Stellen durch die ultrametrische Dreiecksungleichung radikal reduziert wird; das ist einer der Gründe für die Fruchtbarkeit der lokalen Methoden in der Zahlentheorie.

19 Man bemerke hier übrigens eine „logische Asymmetrie“, die der Inkompatibilität zur Seite tritt: man kann (unter Benutzung des Rekursionssatzes) die Multiplikation aus der Addition ableiten, aber nicht umgekehrt. Gewissermaßen in die andere Richtung weist die „strukturelle Asymmetrie“: die multiplikative Struktur operiert auf der additiven (Distributivgesetz), aber nicht umgekehrt. Siehe dazu meinen Aufsatz „Über Addition und Multiplikation“, in E.K., Studien zu Struktur und Methode der Mathematik, Leipzig 2012.

19a Siehe H.Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer-Verlag 1964, S.6.

20 Zum Beispiel im Zusammenhang mit Glücksspielen; ein bekannter Fall ist das Problem des Chevalier de Méré und seine Auflösung durch Pascal (gut erklärt im einschlägigen Wikipedia-Artikel, Stichwort „Chevalier de Méré“).

21 Jede Straßenkarte, jeder Grundriß, jede grobe oder schematische Zeichnung ist ein Graph, und jedermann ist imstande, dergleichen bei Bedarf spontan zu Papier zu bringen. So werden räumliche Verhältnisse, auch solche symbolischer Natur wie bei Flußdiagrammen, erst „übersichtlich“ und einprägsam. Auch Verkehrszeichen und Firmenlogos können hier genannt werden.

22 Siehe Martin Aigner, Combinatorial Theory, Berlin 1979, Vorwort.

23 Zitiert nach F. Heer, Leibniz, Frankfurt 1958, S.65.

24 Gerhardt, Die philosophischen Schriften von Leibniz, Bd.VII, 184-89; hier zitiert nach Buchenau/Cassirer, Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, Hamburg 19663 , Bd.1, S.30ff)

24a Allen (endlichen) Mengen beliebiger Entitäten kommt eine Anzahl zu, und gibt es noch etwas anderes, das ihnen allen zukommt? Das Gerade oder Krumme der Geometrie finden wir nur an konkreten Gegenständen; die diesbezüglichen Axiome entspringen der Anschauung. Auch Vielheiten werden angeschaut, aber sie durch einen gesetzhafte, „nach oben offenen“ Zahlbegriff zu ordnen, ist theoretische Aktion. Die Zahlen sind also in einem stärkeren Sinn „abgetrennt“ (*choristos*) als die geometrischen Objekte. Das hätte auch Aristoteles in Met.VI feststellen können, wo er untersucht, welche Wissenschaft als die „würdigste“ (*timiotate*) gelten kann; er scheint es anzudeuten (1026 a9), zählt aber auch die Arithmetik nicht zur Ersten Wissenschaft.

25 Vgl. Ernst Jüngers Beschreibung des „Phonophors“ in seinem Roman „Heliopolis“, Tübingen 1949, S.336f.

26 Philosophie der symbolischen Formen, Bd.3, Darmstadt 1964, S.450.

27 Siehe dazu Gericke (Anm.6, Abschnitt 4.1).

27a Analogie aus dem Alltag: wer eine Handrechnung nachprüft, überzeugt sich, daß er den in Kindertagen erlernten Kalkül korrekt angewandt hat, aber er prüft nicht den Kalkül, was übrigens, strikt und *ab ovo* durchgeführt (d.h. ausgehend von den Peanoaxiomen) auch manchen Studierenden Kopfzerbrechen machen würde. Man unterscheide das von der banalen Tatsache, daß wir ständig mit Gebrauchsdingen leben, von denen wir kaum eines selbst herstellen könnten: diese bewähren sich in ihrer rein physischen Funktion, die früher oder später endet; der Kalkül dagegen repräsentiert eine mathematische *Aussage*, *er behält immer recht*. Bei großen Zahlen wäre es auch nicht klar, wie man das Resultat auf anderem Weg verifizieren könnte (auch der Taschenrechner arbeitet nach demselben Prinzip).

27b Natürlich können Beweise beliebig schwierig sein, aber ob ein vorgelegter Beweis wirklich ein solcher ist, entscheidet sich nach einfachen Kriterien: die Schlüsse müssen logisch korrekt sein und dürfen nur benutzen, was schon bewiesen ist. Bekanntlich hat Philosophie dann und wann versucht, das mathematische Verfahren zu imitieren, aber von einem *ordo geometricus* im strikten Sinne kann auch im vielleicht prominentesten Beispiel, Spinozas „Ethica“, keine Rede sein.

28 A.Leroi-Gourhan, Hand und Wort, Frankfurt 1980, S.332. Vor einigen Jahren wurde in der südlichen Querhausfront des Kölner Doms ein neues Fenster eingesetzt, auf dem nichts anderes zu sehen ist als bunte Plättchen, deren Anordnung nach Auskunft des Urhebers computergeneriert ist. Es gibt Leute, die das für einen Vorzug halten. – In dem Buch von Leroi-Gourhan wird ein Aspekt der technischen Entwicklung dargestellt, den er als „Exteriorisierung“ bezeichnet, „Nach-außen-Verlegung“ von Tätigkeiten, die der Mensch zuvor mit Kopf und Hand selbst ausführen mußte. Zu sapientia von homo sapiens gehört aber auch das, was man Spiritualität nennt, die Hinwendung zu einem Ganzen, einem „Umgreifenden“, die unvertretbar ist und folglich nicht exteriorisiert werden kann, auch wenn demnächst Alexa in ihrem Elektrokopf noch einen Herrgottswinkel hat. Doch Gott ist tot, wie Nietzsche im vorletzten Jahrhundert feststellte, und er hat eine Leerstelle hinterlassen, die auch die gewisseste und freieste unserer Wissenschaften nicht ausfüllen kann. Den „göttlichen Funken“ wird kein Mathematiker ihr absprechen, aber nur der Astronomie haben die Griechen eine Muse zugestanden, Kantisch gesprochen der Wissenschaft vom „gestirnten Himmel über mir“, der ihm, zusammen mit dem „moralischen Gesetz in mir“, „das Gemüt mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht“ erfüllte; auf ihn war ja auch, wie wir uns erinnern, die erste Mathematik gerichtet. Aber in einem „spirituellen Bankrott“, wie ihn Sri Aurobindo vor 70 Jahren diagnostizierte (Der Integrale Yoga, Hamburg 1957, S.27), leben wir schon seit einiger Zeit.

28a Was geschehen könnte, wenn Sicherungssysteme sich kurzschließen und verselbständigen, demonstrierte schon der Film „Terminator“, freilich im Wildweststil. Vergessen wir aber nicht, daß die Welt schon einmal am Rande eines Atomkrieges stand, als die russische Aufklärung Lichtblitze in Nordamerika für Abschüsse von Raketen hielt.

28b Und wer kann ausschließen, daß auch die Primzahlverteilung einmal eine Rolle

spielen wird für unser Verständnis des Kosmos?

28c Wenn eine natürliche Frage eine einfache Antwort hat, diese aber sehr schwer zu beweisen ist (Beispiele: Primzahlsatz, Vierfarbensatz, Satz von Feit-Thompson, Mordellvermutung...), dann sagt man gewöhnlich: das liegt tief. Wie Siegel einmal feststellt, kann man über die wahren Schwierigkeiten eines Problems erst dann etwas sagen, wenn man es gelöst hat, aber auch das scheint keine hinreichende Bedingung zu sein. Nun ist es nicht unmöglich, daß nach methodisch aufwendigen Bemühungen der Gelehrtesten unerwartet eine ganz einfache Lösung gefunden wird (ich kenne allerdings kein schlagendes Beispiel dafür). Sollte aber dergleichen eintreten, dann lag das Problem weniger in der Sache als in unserer Optik, und auch solche Aufklärung kann etwas „Tiefliediges“ sein und der so erreichte Fortschritt nicht geringer.

29 Philosophie der Arithmetik, Halle 1891. Das Resumé steht auf S.69: „Wenn wir einzelne Inhalte in der Art eines Begriffs „zusammen“ denken, dann läßt sich dieses Zusammen nicht in irgendwelche andere Relationen auflösen und durch sie definieren.“

30 Siehe P.Mittelstaedt, Sprache und Realität in der modernen Physik, BI 1986, besonders S.128ff. Die experimentelle Bestätigung der Verschränkung (Einsteins „spukhafte Fernwirkung“) hat dem neue Aktualität verliehen.

31 Das Prinzip der Yoneda-Einbettung: Es bezeichne $H(A, B)$ die Morphismenmenge in der fraglichen Kategorie K ; für festes A sei $H(A, -)$ der kovariante Funktor $X \rightarrow H(A, X)$ von K in die Mengenkategorie. Sind dann die Funktoren $H(A, -)$ und $H(B, -)$ isomorph (im Sinne einer natürlichen Transformation), so sind schon A und B isomorph. Man erhält damit eine Einbettung von K in eine Funktorkategorie; in dieser lassen sich mengentheoretische Konstruktionen nachbilden, die in K nicht möglich sind; zum Beispiel ist die Potenzmenge einer Gruppe nicht selbst (auf natürliche Weise) eine Gruppe. Auch das ist ein Kapitel zum Thema „Substanzbegriff und Funktionsbegriff“, das Cassirer noch nicht schreiben konnte.

32 Zum (unvermeidlichen) Betriebscharakter aller heutigen Wissenschaft (den sie mit der Kunst teilt) siehe Heidegger, Die Zeit des Weltbildes, in: „Holzwege“, Klostermann 19806, S.79ff (der Text entstand 1938). Was heutige Forschung in die Hand nimmt, wird schnell zu einer Art Industrie (nicht nur in der Mathematik).

32a Man begibt sich auf Glatteis, wenn man etwas Spezifisches nennen wollte, was die Rechner niemals können werden. Einen Ariadnefaden durch ein Labyrinth zu ziehen, kann durch mechanisches Probieren gelingen. Etwas anderes ist die fruchtbare, weiterführende Begriffsbildung, die nicht „logisch gedeckelt“ ist wie die möglichen Züge und Stellungen auf dem Schachbrett, dafür so etwas wie Intuition oder Vision erfordert – vielleicht aber nur vom Menschen, der nicht frei genug denkt.

32b Das ist (dem Sinne nach) der „Erste Satz“ in Kants Schrift „Idee zu einer allgemeinen Geschichte in weltbürgerlicher Absicht“.

33 op.cit. (Anm. 13), hier S.89.

34 Allgemein kann es in angeordneten Mengen *maximale* Elemente geben (solche, die nicht kleiner sind als ein anderes, nicht notwendig eindeutig) oder auch ein *größtes* (größer als alle anderen, stets eindeutig). Würde man „unendlich“ durch eine Anordnung ohne größtes Element definieren, ergäbe sich die mißliche Konsequenz, daß es endliche unendliche Mengen gäbe. Eine angeordnete Menge mit 3 Elementen kann zwei maximale Elemente ohne ein größtes enthalten.

35 Im griechischen Wort für das Unendliche, *apeiron*, tönt nicht nur *peras*, die Grenze, sondern auch *peirao*, etwas versuchen oder etwas angehen; *apeiraton* wäre das, an das man nicht herangehen, mit dem man nichts anfangen kann. Hat dieser Anklang etwas damit zu tun, daß die Griechen, die doch in philosophicis vor nichts zurückschreckten (man denke an die kühnen Weltentwürfe der Vorsokratiker, aber auch an die Skeptiker), das Unendliche der Mathematik nicht selbst zum Gegenstand machten?

36 Ich folge Gericke (Anm. 4), op.cit. 119f.

37 Unser Integral (in seiner einfachsten Form) ist nicht viel mehr als eine Verallgemeinerung und zugleich Vereinfachung dieses Vorgehens, erst der „Hauptsatz“ geht entscheidend darüber hinaus. Ein anderer Aspekt: unendlich viele Summanden können also eine endliche Summe ergeben, wenn sie nur genügend schnell abnehmen. Einfaches Beispiel: wenn man von einem Geradenstück die Hälfte nimmt, dann die Hälfte der Hälfte anfügt und so fortfährt, erhält man eine „Exhaustion“ des Stücks. Man braucht diesen Gedanken nur auf die Zeit zu übertragen, um das Paradoxon von Achill und der Schildkröte aufzulösen. Hat das im Altertum wirklich niemand gesehen?

38 Die Unterscheidung von „potentiell“ und „aktual“ unendlich scheint mir *mathematisch* gar nicht sinnvoll möglich. Wo wir von „potentiell unendlich“ sprechen, ist eine *aktuale* Unendlichkeit von *Möglichkeiten* schon vorausgesetzt, andernfalls hätte diese Redeweise gar keinen Sinn; und in jedem Fall sagt sie etwas über unsere Kenntnis oder Unkenntnis der Verhältnisse, ist also keine mathematische Aussage. „Potentiell unendliche“ Mengen gibt es nicht. Für Folgen oder Funktionen sagt man, daß sie „gegen unendlich streben“, auch wenn alle Werte endlich bleiben; die Definition davon hält sich aber ganz im Endlichen und drückt einfach aus, daß die Werte bzw. Folgenglieder über alle Grenzen wachsen; hier liegt nur eine *façon de parler* vor. Eine Funktion kann auch im Endlichen „aktual“ unendlich werden, wie $1/x$ für $x = 0$ (das nennt man einen Pol); aber es wäre absurd, zu sagen, sie sei „vorher“ potentiell unendlich gewesen.

39 Auf höchst charmante Weise wird das Zusammenfließen der Parallelen beschrieben in dem Gedicht „Die zwei Parallelen“ aus Morgensterns Galgenliedern. Die Konstruktion zeigt übrigens, daß die Erweiterung der affinen zur projektiven Ebene „logisch unverdächtig“ ist, d.h. nicht zu Widersprüchen führt, was a limine keineswegs klar ist. Man beachte auch die Paradoxie, daß die Hinzunahme der „unendlich fernen“ Punkte alles endlich macht; die reelle projektive Ebene ist eine kompakte, aber nicht orientierbare Fläche, die nicht in den dreidimensionalen reellen Raum eingebettet werden kann.

40 Das hat schon Zenon von Elea für eine seiner Paradoxien benutzt (B 1 bei Diels-Kranz).

41 Die uns so vertraute Zahlengerade „zeigt“ uns die Null, aber auf das Unendliche „verweist“ sie nur. Freilich ist der Nullpunkt eine willkürliche Festlegung durch den Geist, der mit den Punkten rechnen möchte; geometrisch, ja schon topologisch ist er durch nichts ausgezeichnet, da er durch Translationen in jeden andern Punkt überführt werden kann – das unendlich Kleine kann überall sein, das unendlich Große ist überall, das unendlich Ferne aber nirgends. Mit der multiplikativen Struktur jedoch tritt eine Art „Dualität“ zwischen dem unendlich Großen und Kleinen auf: für positive r ist $r \cdot 0$ gleichbedeutend mit $1/r \cdot \infty$. Die Null, die unendlich kleine Größe (fast eine *contradictio in adiecto*), das algebraische Äquivalent zum Punkt, war den Griechen unbekannt; sie gelangte im Mittelalter von den Indern ins Abendland, ihr heutiger Gebrauch stammt aus dem 17. Jahrhundert; siehe Gericke (Anm. 6, S.276). Im Standardaufbau des Zahlensystems erscheint die Null beim Übergang von der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ zur Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ durch die Grothendieckkonstruktion, nämlich als Klasse der Paare (a, a) .

41a Ein kleines Fragezeichen verdient auch Weyls Behauptung, das Bedürfnis nach Totalität sei vom phänomenalen Standpunkt aus „schlechterdings unverständlich“. Ist es nicht im Gegenteil natürlich, nach dem Ganzen zu fragen, wo man kein Ende sieht? Und hat nicht das christliche Abendland durch viele Jahrhunderte nichts dabei gefunden, seinen Gott mit All-Eigenschaften auszustatten, die alle auf ein aktual Unendliches hinauslaufen, obwohl man sich damit das notorisch unlösbare Problem der Theodizee einhandelte?

42 Satz von Jordan-Hölder. Die Reihen sind nicht eindeutig bestimmt, wohl aber die einfachen Faktoren und deren Vielfachheiten; in genauer Analogie zur Primzerlegung der natürlichen Zahlen.

43 Brouwers „reelle Zahlerzeuger“ sind mit „Medium freien Werdens“ treffend beschrieben. Der leicht romantische Einschlag in diesem Ausdruck rührt wohl von Weyls Interesse für die romantische Naturphilosophie her; auffallend häufig für einen modernen Wissenschaftler nennt er Fichte und Schelling. Die Romantiker haben zur Mathematik erstaunliche Ideen entwickelt, man lese dazu in R. Huch, *Die Romantik* (Tübingen 1951), die Kapitel über Novalis (besonders die Zitate auf S.70) und „Die romantische Zahl“. Der verschwenderische Gebrauch des „Absoluten“, den sich die Romantiker gestatteten, ist allerdings der stärkste denkbare Kontrast zu Brouwers rigorosem Konstruktivismus, dem Weyl doch zeitweise zuneigte. Ein großer Geist sucht und findet eben überall Inspiration, gemäß dem Hölderlinschen „Alles prüfe der Mensch“.

44 Die Verdichtung der natürlichen Zahlreihe zur rationalen entsprang praktischer, ihre weitere zum Kontinuum wissenschaftlicher Notwendigkeit. Die moderne Anreicherung mit „Nichtstandardtheorien“ in ihren verschiedenen Formen erscheint vorläufig wie eine Kürübung, die dem Pflichtteil folgt; als ob der mathematische Weltgeist zeigen möchte, was er noch alles kann. Aber vielleicht sind die Notwendigkeiten, denen sie dienen können, noch nicht deutlich genug hervorgetreten.

45 Die natürlichen Zahlen können pfeiltheoretisch charakterisiert werden als Anfangsobjekt der Kategorie, deren Objekte Mengen mit einem ausgezeichneten Element und einer Selbstabbildung sind; das ist nur eine andere Formulierung des Dedekindschen Rekursionssatzes. Der reelle Körper ist Endobjekt in der Kategorie der archimedisch geordneten Körper.

46 Siehe den Beitrag von F.Hirzebruch in dem Band „Zahlen“, ed. Ebbinghaus et.al., Springer-Verlag 1983. Die drei Divisionsalgebren werden über $\mathbb{R}$ definiert durch „kanonische“ Basen, als deren Multiplikationskonstanten nur 0, 1 und -1 auftreten; sie können daher über jedem Körper definiert werden, sind dann aber i.A. nicht mehr nullteilerfrei (das hängt davon ab, ob die Normgleichung eine Nullstelle im Grundkörper hat; in Charakteristik 2 tritt ein Radikal auf). Wenn man zum Beispiel $\mathbb{C}$ erweitert durch ein weiteres x mit $x^2 = -1$, entsteht das Produkt $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

47 Für die aktual unendliche Zeit haben wir einen eigenen Ausdruck, das „Donnerwort“ der Ewigkeit, aber kein Analogon für den Raum; „All“ und „Universum“ meinen nicht den Raum nur als solchen, sondern zugleich das in ihm Befindliche. Die Unendlichkeit der Zeit geht uns mehr an als die des Raums, weil sie die Form *allen* Erlebens ist, des inneren und des äußeren.

48 Siehe Hughes/Ranicki, *Ends of Complexes*, Cambridge UP 1996. Die Enden sind Äquivalenzklassen solcher wachsenden Folgen von Kompakta; sie liegen auf einer begrifflich anderen Ebene, werden dem Raum nicht irgendwie „angeklebt“.

49 Das letztere Beispiel zeigt einen weiteren Aspekt der „Spannung“: alle Faktoren sind endliche Ringe, aber der Limes hat die Charakteristik 0. Einfachstes Beispiel: $X(n) = \mathbb{Z}/\text{mod } p^n$ (p eine Primzahl), $f(n)$ kanonisch; der Limes ist der Bewertungsring der p -adischen Kompletzierung von $\mathbb{Q}$.

50 Hinzu kommt, daß Transzendenz (hier wie auch sonst) eine bloß negative Bestimmung ist und „statistisch“ geradezu leer: da die algebraischen Zahlen immer noch abzählbar sind, folgt aus Sätzen der Kardinalzahltheorie, daß die transzendenten dieselbe Mächtigkeit haben wie das Kontinuum selbst. Anders gesagt: algebraische Zahlen sind „speziell“, die „allgemeine“ Zahl ist transzendent. Was fehlt, ist eine Einteilung aller transzendenten Zahlen in Klassen, zusammen mit einer Methode, die Klasse einzelner Zahlen festzustellen; diese von Mahler 1932 inaugurierte Theorie der Transzendenzmaße ist (soweit ich urteilen kann) von einem solchen Ziel noch weit entfernt, wenn dieses nicht überhaupt utopisch ist. Man weiß, daß π und die Eulersche Zahl e transzendent sind, und daß π in einem präzisierbaren Sinn „mehr transzendent“ ist als e , aber nicht einmal, ob $e + \pi$ transzendent ist. Es scheint auch nicht bekannt zu sein, wie man (nichtrationale) algebraische Zahlen von transzendenten anhand ihrer Dezimalentwicklung unterscheiden kann. (Quadratische Irrationalitäten können durch Periodizität ihrer Kettenbruchentwicklung charakterisiert werden.) Ein neues Kapitel der Transzendenztheorie wurde mit der Theorie der *Perioden* aufgeschlagen, freilich auch eine „nur“ abzählbare Menge; grundlegend dazu die Arbeit von Kontsevich/Zagier in: Engquist/Schmid (Hsgr.), *Mathematics unlimited - 2001 and beyond*, Springer-Verlag

2001. Algebraisch betrachtet, ist Transzendenz eine Art Unendlichkeit, zu der auch eine universelle Abbildungseigenschaft gehört: ist x transzendent über dem Körper k , ist $k[x]$ eine unendlichdimensionale k -Algebra; ist A irgendeine k -Algebra und a ein Element von A , dann gibt es einen Morphismus $f: k[x] \rightarrow A$ von k -Algebren mit $f(x) = a$. Das Transzendente hat eine weitere „positive“ Eigenschaft: es sorgt für einen Differentialkalkül ohne Grenzprozesse; das ist einer der Gründe dafür, daß algebraische Funktionenkörper leichter zu behandeln sind als Zahlkörper, in denen es keine nichttrivialen Derivationen gibt.

51 Dualitätssatz von Tannaka-Krein; siehe dazu Joyal/Street, Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups, in Springer Lecture Notes 1488 (auch im Netz).

52 Für eine *einzelne* Gruppe G genügt dafür auch ein endlicher Körper, der die $|G|$ -ten Einheitswurzeln enthält; man verliert dann aber die Interpretation der Skalarprodukte der Charaktere als Vielfachheiten. Wenn man einen „universellen“ Bereich will, der für alle endlichen Gruppen dienen kann, braucht man alle Einheitswurzeln und damit Charakteristik Null, also nach dem Satz von Kronecker-Weber die maximale Abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

53 Aus: Sprüche, Hamb.Ausg.Bd.I, S.504.

Das dem Anhang vorangestellte Motto (eine Abwandlung des Schlusses von Schillers Gedicht „Die Freundschaft“) bildet den Beschluß von Hegels „Phänomenologie des Geistes“.

Ich danke Hans Ulrich Krause für seine kritischen und konstruktiven Bemerkungen zu einer früheren Fassung dieser Arbeit.

