Hamburger Beiträge
zur Angewandten Mathematik

Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen

Lars Hoffmann und Andreas Meister

Reihe F
Computational Fluid Dynamics and Data Analysis 13
Februar 2000

Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik

Reihe A	Preprints
Reihe B	Berichte
Reihe C	Mathematische Modelle und Simulation
Reihe D	Elektrische Netzwerke und Bauelemente
Reihe E	Scientific Computing
Reihe F	Computational Fluid Dynamics and Data Analysis

Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen

Lars Hoffmann und Andreas Meister
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Differentialgleichungen
und Dynamische Systeme
Bundesstraße 55, 20146 Hamburg
e-mail: hoffmann@math.uni-hamburg.de,
meister@math.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Im Bereich der Strömungsmechanik existieren bereits seit einigen Jahren effiziente und hochauflösende numerische Verfahren zur Simulation unterschiedlichster reibungsfreier, reibungsbehafteter und turbulenter Strömungsfelder [2, 3, 4, 12, 15]. Der Anwendungsbereich vieler Methoden beschränkt sich dabei jedoch zumeist auf inkompressible oder kompressible Strömungsfelder. Eine Berechnung instationärer Strömungen mit sehr unterschiedlichen Mach-Zahlen Ma, wie sie zum Beispiel beim Übergang von einer Deflagration mit $\mathrm{Ma} \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ zur Detonation mit $\mathrm{Ma} \in [5, 10]$ auftreten, können demzufolge von derartigen numerischen Algorithmen nicht geeignet durchgeführt werden. In der Erweiterung der Gültigkeit eines kompressiblen Verfahrens in den inkompressiblen Bereich oder umgekehrt liegt folglich eine wichtige und interessante Zukunftsaufgabe in der numerischen Strömungsmechanik. Ein geeignetes Hilfsmittel stellt hierbei eine asymptotische Analyse der betrachteten partiellen Differentialgleichungen dar. Hieraus können wesentliche Eigenschaften der untersuchten Strömungsfelder nachgewiesen werden, die eine gezielte Weiterentwicklung bestehender numerischer Verfahren ermöglichen, deren Anwendungsgebiet deutlich größere Mach-Zahlbereiche umfaßt. Basierend auf der in [5, 11] präsentierten asymptotischen Ein- und Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen werden wir in diesem Bericht ein Verfahren vorstellen, das im Bereich kompressibler Strömungen einem herkömmlichen Upwind-Verfahren entspricht und im Fall kleiner Mach-Zahlen die Ergebnisse der angesprochenen Studie berücksichtigt.

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel unterteilt. Nach dieser kurzen Einführung widmen wir uns im zweiten Kapitel den fundamentalen Eigenschaften der Euler-Gleichungen. Im Anschluß an eine spezielle Entdimensionalisierung wird eine Eigenwertanalyse dieses Systems partieller Differentialgleichungen vorgenommen und hierdurch eine wesentliche Problematik numerischer Verfahren im Bereich kleiner Mach-Zahlen herausgearbeitet. Anschließend nehmen wir im dritten Kapitel eine detailierte Herleitung des numerischen Verfahrens vor. Hierzu wird zunächst die konvektive Flußfunktion $\underline{f}(\underline{u})$ der Euler-Gleichungen

$$\partial_t \underline{u} + \partial_x \underline{f}(\underline{u}) = 0$$

derart in der Form $\underline{f}(\underline{u}) = \underline{h}(\underline{u}) + \underline{a}(\underline{u})$ zerlegt, daß die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten λ_i, $i = 1, 2, 3$ des Systems

$$\partial_t u + \partial_x \underline{h}(\underline{u}) = 0 \tag{1.1}$$

stets $\lambda_i = O(1)$, $\mathrm{M} := \sqrt{\gamma}\mathrm{Ma} \to 0$ erfüllen und der verbleibende Flußanteil $\underline{a}(\underline{u})$ der Bedingung $\lim_{\mathrm{M}\to 1} \underline{a}(\underline{u}) = 0$ genügt. Zur Diskretisierung des homogenen Systems (1.1) wird eine modifizierte Variante des bekannten Roe-Riemannlösers vorgestellt, die eine lineare Rekonstruktion mit MUSCL-Ansatz in den charakteristischen Variablen verwendet und eine Methode zweiter Ordnung in Raum und Zeit darstellt. Der verbleibende asymptotische Flußanteil $\underline{a}(\underline{u})$ der konvektiven Flußfunktion $\underline{f}(\underline{u})$ beinhaltet in natürlicher Weise alle Informationsausbreitungsgeschwindigkeiten der Größenordnung $O\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right)$, $\mathrm{M} \to 0$. Dieser Anteil wird mit einem zentralen Ansatz derart diskretisiert, dass

- das resultieren Gesamtverfahren eine zeitlich und räumlich konsistente Approximation zweiter Ordnung der Euler-Gleichungen repräsentiert,
- eine gezielte Berücksichtigung der Druckverteilung auf der Grundlage der asymptotischen Analyse vorgenommen wird und
- im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl eine divergenzfreie diskrete Geschwindigkeitsverteilung erzielt wird.

Im Hinblick auf eine zuverlässige und stabile Simualtion instationärer Strömungen unterschiedlichster Mach-Zahlbereiche mittels einer derartigen asymptotisch basierten Methode ergibt sich eine wesentliche Forderung in der zeitlichen Evolution des Referenzparameters M und einer gleichzeitigen physikalisch sinnvollen Zerlegung unterschiedlicher Zustandsvariablen (z. B. Druck und Dichte). Hierzu wird im Kapitel 4 ein neuartiger Zerlegungsalgorithmus vorgestellt und dessen Eigenschaften diskutiert. Im abschließenden fünften Kapitel nutzen wir zwei Beispiele unterschiedlicher Strömungsfelder zur Validierung des numerischen Verfahrens. Hierbei wird eine Strömung im Übergangsbereich vom schwach kompressiblen zum kompressiblen Regime und eine Simulation eines im Bereich kleiner Mach-Zahlen befindlichen Strömungsfeldes betrachtet.

2. Die Euler-Gleichungen

Die Euler-Gleichungen beschreiben reibungsfreie Strömungen im Gültigkeitsbereich der Kontinuumsannahme. Sie beinhalten mit den Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses und der Energie drei fundamentale Prinzipien der Physik und stellen ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

Zur Entdimensionalisierung der Strömungsgrößen verwenden wir die in Tabelle 2.1 dargestellten Bezugsgrößen.

Physikalische Größe	Bezugsgröße	Dimensionslose Größe
Länge	$\hat{l}_{ref}$	$x = \frac{\hat{x}}{\hat{l}_{ref}}$
Zeit	$\frac{\hat{l}_{ref}}{\hat{v}_{ref}}$	$t = \hat{t}\frac{\hat{v}_{ref}}{\hat{l}_{ref}}$
Geschwindigkeit	$\hat{v}_{ref}$	$v = \frac{\hat{v}}{\hat{v}_{ref}}$
Dichte	$\hat{\rho}_{ref}$	$\rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_{ref}}$
Druck	$\hat{p}_{ref}$	$p = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_{ref}}$
Totalenergie	$\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}$	$E = \hat{E}\frac{\hat{\rho}_{ref}}{\hat{p}_{ref}}$

Tabelle 2.1: Bezugsgrößen und dimensionslose Variablen.

Das Superskript ˆ kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen, der Index $_{ref}$ beschreibt charakteristische Bezugsgrößen, die den Anfangs- und Randbedingungen respektive den aktuellen Strömungsverhältnissen entnommen werden. Die Tabelle 2.2 beinhaltet die dimensionslosen Kennzahlen, wobei der auftretende Isentropenexponent γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen repräsentiert, so daß für Luft $\gamma = 1.4$ gilt.

Lokale Schallgeschwindigkeit	$\hat{c} = \sqrt{\gamma \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}}$
Lokale Mach-Zahl	$\mathrm{Ma} = \frac{\lvert\hat{v}\rvert}{\hat{c}}$
Entwicklungsparameter	$\mathrm{M} = \frac{\hat{v}_{ref}}{\hat{c}_{ref}} = \frac{\hat{v}_{ref}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}}}$

Tabelle 2.2: Dimensionslose Kennzahlen.

Bezeichnen wir mit $m = \rho v$ den Impuls und fassen die Erhaltungsgrößen im Vektor der konservativen Variablen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ \rho E \end{pmatrix}$$

zusammen, so lassen sich die Euler-Gleichungen unter Verwendung der Enthalpie pro Masseneinheit $H = E + p/\rho$ als System von Erhaltungsgleichungen in der Form

$$\partial_t \underline{u} + \partial_x \underline{f}(\underline{u}) = \underline{0} \text{ in } I\!R \times I\!R_0^+ \tag{2.1}$$

schreiben, wobei

$$\underline{f}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} f_\rho(\underline{u}) \\ f_m(\underline{u}) \\ f_{(\rho E)}(\underline{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ mv + \mathrm{M}^{-2} p \\ Hm \end{pmatrix},$$

die konvektive Flußfunktion repräsentiert. Die eindimensionalen Eulergleichungen stellen somit ein System von 3 Gleichungen für die 4 Unbekannten $\rho, m, \rho E$ und p dar, so daß das System erst durch Hinzunahme der algebraisch gegebenen Zustandsgleichung geschlossen wird. Diese ergibt sich unter Berücksichtigung der beschriebenen Entdimensionalisierung in der Form

$$p = (\gamma - 1)\, \rho \left(E - \frac{\mathrm{M}^2}{2} v^2 \right) = (\gamma - 1)\, \rho e, \tag{2.2}$$

wobei e die innere Energie darstellt.

2.1 Anfangs- und Randbedingungen

Für beschränkte Gebiete $\Omega \subset I\!R$ müssen zur Schließung des Systems neben der Vorgabe sinnvoller Anfangsbedingungen geeignete Randbedingungen definiert werden. Wir betrachten ausschließlich periodische Randbedingungen, das heißt, wir setzen voraus, daß das Strömungsfeld für alle physikalischen Größen φ ein periodisches Verhalten aufweist. Hierbei fordern wir zudem, daß die Länge $|\Omega|$ des betrachteten Strömungsgebietes ein Vielfaches der Frequenz jeder physikalischen Größe φ darstellt, so daß stets

$$\varphi\,(x,t) = \varphi\,(x + |\Omega|, t)$$

für alle Zeiten $t \in I\!R_0^+$ gilt.

2.2 Eigenwertanalyse der Eulergleichungen

Die im Kapitel 2 entdimensionalisierten Eulergleichungen weisen neben den für $\mathrm{M} \to 0$ singulär werdenen Impulsgleichungen weitere Schwierigkeiten auf, die bei der Umsetzung in ein numerisches Verfahren mit Gültigkeit in allen Machzahlbereichen beachtet werden müssen. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes führen wir eine Eigenwertanalyse der Euler-Gleichungen durch.

Die Ableitungen des Flußvektors $\underline{f}(\underline{u})$,

$$\underline{f}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + \frac{\gamma-1}{\mathrm{M}^2}\left(\rho E - \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\frac{m^2}{\rho}\right) \\ \frac{m}{\rho}(\rho E + (\gamma-1)\left(\rho E - \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\frac{m^2}{\rho}\right) \end{pmatrix},$$

nach den konservativen Variablen $\underline{u} = (\rho,\ m,\ \rho E)^T$, ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\partial_\rho f_\rho(\underline{u}) &= 0, \\
\partial_m f_\rho(\underline{u}) &= 1, \\
\partial_{(\rho E)} f_\rho(\underline{u}) &= 0, \\
\partial_\rho f_m(\underline{u}) &= -\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^2}{\rho^2} = \left(\frac{\gamma-1}{2} - 1\right) v^2, \\
\partial_m f_m(\underline{u}) &= 2\frac{m}{\rho} - (\gamma-1)\frac{m}{\rho} = (3-\gamma)v, \\
\partial_{(\rho E)} f_m(\underline{u}) &= \frac{\gamma-1}{\mathrm{M}^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\rho f_{(\rho E)}(\underline{u}) &= -\frac{m}{\rho^2}(\rho E + p) + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\frac{m^3}{\rho^3} = -vH + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2 v^3, \\
\partial_m f_{(\rho E)}(\underline{u}) &= \frac{1}{\rho}(\rho E + p) - (\gamma-1)\mathrm{M}^2\frac{m^2}{\rho^2} = H - (\gamma-1)\mathrm{M}^2 v^2, \\
\partial_{(\rho E)} f_{(\rho E)}(\underline{u}) &= \frac{m}{\rho} + (\gamma-1)\frac{m}{\rho} = \gamma v.
\end{aligned}$$

Die Jakobimatrix lautet demnach

$$\underline{\underline{f}}'(\underline{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\frac{\gamma-1}{2}-1)v^2 & (3-\gamma)v & \frac{\gamma-1}{\mathrm{M}^2} \\ -vH + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2 v^3 & H-(\gamma-1)\mathrm{M}^2 v^2 & \gamma v \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ liefern die gesuchten Eigenwerte,

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) = \det(\underline{\underline{f}}'(\underline{u}) - \lambda\underline{\underline{I}}) &= -\lambda^3 + 3v\lambda^2 + \left(\frac{\gamma-1}{\mathrm{M}^2}H - \frac{\gamma-1}{2}v^2 - 3v^2\right)\lambda \\
&\quad -\frac{\gamma-1}{\mathrm{M}^2}vH + \frac{\gamma-1}{2}v^3 + v^3 \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß $\lambda_0 = v$ einen Eigenwert darstellt. Faktorisierung des charakteristischen Polynoms mit $(\lambda - v)$ liefert

$$(\lambda - v)(-\lambda^2 + 2v\lambda - v^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{\mathrm{M}^2}H) \stackrel{!}{=} 0.$$

Hieraus folgen die beiden restlichen Eigenwerte zu

$$\begin{aligned}
\lambda_\pm &= v \pm \left(v^2 - v^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{\mathrm{M}^2}H\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= v \pm \frac{1}{\mathrm{M}}\left((\gamma-1)\left(H - \frac{\mathrm{M}^2}{2}v^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= v \pm \frac{c}{\mathrm{M}}.
\end{aligned}$$

Für sehr kleine M und speziell im Grenzfall $\mathrm{M} \to 0$ streben die zwei Eigenwerte $\lambda_\pm$ gegen $\pm\infty$, während der dritte Eigenwert von M unabhängig ist und endlich bleibt. Das Abhängigkeitsgebiet eines Punktes wächst also mit kleiner werdenden Werten von M. Die hyperbolischen Eulergleichungen weisen in diesem Fall einen eher hyperbolisch–elliptischen Charakter auf, da der Zustand eines Punktes fast vom Zustand des gesamten Gebietes abhängt und Informationen sich in der vorliegenden dimensionslosen Form mit nahezu unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten.

Für explizite Verfahren verringert sich deshalb aufgrund der CFL-Bedingung die zulässige Zeitschrittweite Δt für kleine Werte von M derart drastisch, daß eine ausschließlich explizite Zeitdiskretisierung nicht geeignet ist.

3. Das numerische Verfahren

Basierend auf den Ergebnissen der Arbeiten [5, 10] werden wir in diesem Abschnitt ein semi–explizites Finite-Volumen-Verfahren zur Lösung der instationären Euler-Gleichungen vorstellen.

Um eine geeignete Integration der aus der Mehrskalenanalyse gewonnen Kenntnisse zu gewährleisten, stellen wir die folgenden grundlegenen Forderungen an die numerische Methode. Für Strömungsfelder, die einen Entwicklungsparameter $\mathrm{M} \geq 1$ aufweisen, fordern wir die Übereinstimmung des numerischen Verfahrens mit einer herkömmlichen Godunov-Methode, während im Bereich $\mathrm{M} \in (0,1)$ die Ergebnisse der asymptotischen Analyse berücksichtigt werden sollen. Hierbei setzen wir voraus, daß zum einen ein hinreichend glatter Übergang für $\mathrm{M} = 1$ vorliegt und zum anderen, im Grenzfall eines verschwindenden Entwicklungsparameters, die in [5, 10] nachgewiesenen Eigenschaften der Strömungsgrößen erzielt werden.

3.1 Diskretisierung des Strömungsgebietes

Bei der folgenden Beschreibung des numerischen Verfahrens betrachten wir stets endliche Intervalle $\Omega = (a,b) \subset I\!R$. Die Grundidee der Finite-Volumen-Verfahren basiert auf der Einführung von Kontrollvolumina sowie der Betrachtung schwacher Lösungen der zugrundeliegenen Gleichungen. Als Kontrollvolumen $\widetilde{\Omega}$ bezeichnen wir im Fall des eindimensionalen räumlichen Gebietes jedes offene Teilintervall $\widetilde{\Omega} = (\tilde{a}, \tilde{b})$ mit $\tilde{a} < \tilde{b}$. Eine Funktion

$$\begin{array}{rlcl} \underline{u}: & \Omega \times I\!R_0^+ & \to & I\!R^3 \\ & (x,t) & \mapsto & \underline{u}(x,t), \end{array}$$

die bezüglich der Zeit von beschränkter Variation ist und die sich für jedes feste $t \in I\!R_0^+$ im Raum $(L^\infty \cap L^1)(\Omega; I\!R^3)$ befindet, heißt schwache Lösung der Gleichung (2.1) in Ω, falls

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \partial_t \underline{u}(x,t)\; dx + \int_{\partial\widetilde{\Omega}} \underline{f}(\underline{u}(x,t)) \cdot n\; ds = \underline{0} \tag{3.1}$$

für alle Kontrollvolumina $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ gilt, wobei n die äußere Einheitsnormale an $\partial\widetilde{\Omega}$ darstellt.

Zur numerischen Lösung der Gleichung (3.1) diskretisieren wir den räumlichen Anteil mittels einer Unterteilung $\{a = x_{\frac{1}{2}}, \ldots, x_{N+\frac{1}{2}} = b\}$ in N äquidistante Teilintervalle $\Omega_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, die im folgenden als Kontrollvolumina respektive Boxen bezeichnet werden und auf denen die Anfangsdaten als Zellmittelwerte gegeben sind. Desweiteren bezeichnen wir mit Ξ die Menge aller Kontrollvolumina $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ und definieren $\Delta x = |\Omega_i|$ sowie

$$x_i = \frac{1}{2}\left(x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}}\right).$$

3.2 Flußkorrekturansatz

Die im Abschnitt 2.2 durchgeführte charakteristische Analyse der Euler-Gleichungen zeigt deutlich das unterschiedliche Lösungsverhalten bei variierendem Entwicklungsparameter M. Zwar liegt für alle $\mathrm{M} > 0$ ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem vor, jedoch belegen die vorliegenden Informationsausbreitungsgeschwindigkeiten, daß im Fall einer sehr kleinen Mach-Zahl ein zunehmend elliptischer Charakter der Lösung zu erwarten ist. Im Rahmen eines numerischen Verfahrens auf der Basis eines expliziten Zeitschrittverfahrens liegt folglich für kleine M eine derart restriktive Zeitschrittbeschränkung aufgrund der CFL-Stabilitätsbedingung [1] vor, so daß eine direkte Anwendung aus zwei Gründen nicht sinnvoll ist. Erstens weist die benötigte Rechenzeit T eine Größenordnung $O_S\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right)$ auf, wodurch bei $\mathrm{M} \ll 1$ eine unpraktibel hohe Rechenzeit vorliegt, die zudem bei kleinen Veränderungen des zeitabhängigen Entwicklungsparameters großen Schwankungen ausgesetzt ist. Bei der sinnvollen Anpassung des Entwicklungsparameters während der numerischen Simulation können die benötigten CPU-Zeiten oftmals nicht abgeschätzt werden. Zweitens ergibt sich durch den für $\mathrm{M} \ll 1$ immensen Unterschied innerhalb der Ausbreitungsgeschwindigkeiten die Problematik, daß sich die bei den an den Kontrollvolumensgrenzen betrachteten Riemann-Problemen auftretenden Kontaktunstetigkeiten innerhalb eines Zeitschritts nur in der Größenordnung $\mathrm{M}\Delta x$ bewegt. Folglich ist durch die im Finite-Volumen-Verfahren inherent enthaltene Mittelung eine starke Verschmierung der Information zu befürchten.

Bei einer impliziten Zeitdiskretisierung umfaßt der numerische stets den physikalischen Abhängigkeitsbereich, wodurch die zulässige Zeitschrittweite keiner Begrenzung aufgrund der CFL-Bedingung unterliegt. Die verwendete Linearisierung auf der Basis einer Taylorentwicklung führt jedoch auf ein lineares Gleichungssystem, das bei derart unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten sehr schlecht konditioniert ist und folglich einen steifen Charakter aufweist.

Eine Untersuchung von Volpe [17] betreffend des numerischen Verhaltens von standard Finite-Volumen-Verfahren der Eulergleichungen im Fall kleiner Machzahlen lieferte bei den untersuchten Beispielen eine Abhängigkeit der Genauigkeit der Verfahren von der Güte der Diskretisierung. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da bei einem Standardverfahren in Strömungsbereichen mit sehr kleinen Machzahlen, insbesondere in der Impulsgleichung, einzelne Variablen und Flußterme in die Größenordnung der Aproximationsgüte des numerischen Verfahrens geraten, wodurch keine sinnvolle Diskretisierung für die Eulergleichungen vorliegt.

Desweiteren konnte Sesterhenn [14] in seiner Arbeit über eine Fehleranalyse direkt zeigen, daß Auslöschungseffekte bei der Flußberechnung für das Versagen der üblichen Riemann–Löser in Strömungsbereichen kleiner Machzahlen verantwortlich sind.

Wir werden daher im folgenden eine Zerlegung der Euler-Gleichungen vornehmen, bei der zum einen ein hyperbolisches System vorliegt, das ausschließlich Ausbreitungsgeschwindigkeiten in der Größenordnung $O(1)$, $\mathrm{M} \to 0$ aufweist und zum anderen der verbleibende Restanteil für $\mathrm{M} = 1$ identisch verschwindet und für kleine Werte des Entwicklungsparameters einen zunehmend dominierenderen Einfluß gewinnt. Das hierdurch vorliegende hyperbolische System kann mit Hilfe eines expliziten Verfahrens auf der Grundlage einer Godunov-Methode gelöst werden. Die somit ermittelte numerische Flußfunktion wird anschließend durch die verbleibenden asymptotischen Anteile unter Berücksichtigung der in [5, 10, 11] ausgeführten asymptotischen Mehrskalenanalyse mittels einer impliziten Methode korrigiert. Hierzu wird unter anderem eine Druckzerlegung

$$p = p^{(0)} + \mathrm{M}p^{(1)} + \mathrm{M}^2 p^{(2)}$$

eingeführt, wodurch bei geeigneter Entdimensionalisierung und Bestimmung des Entwicklungsparameters M erreicht wird, daß alle physikalischen Größen von der Ordnung $O(1)$ sind. Hiermit verschwindet die von Volpe exemplarisch nachgewiesene Abhängigkeit der erzielten numerischen Resultate von der zugrundeliegenden räumlichen Diskretisierung.

An dieser Stelle sei betont, daß der resultierende Gesamtalgorithmus keinen Splitting-Ansatz beinhaltet, sondern lediglich eine numerischen Flußberechnung für das Gesamtsystem unter gezielter Berücksichtigung der vorliegenden physikalischen Phänomene vorgenommen wird.

3.2.1 Eigenwertanalyse der modifizierten Eulergleichungen

Das Ziel dieses Abschnitts liegt in der Zerlegung der Flußfunktion $\underline{f}(\underline{u})$ der Euler-Gleichungen (2.1) in der Form

$$\underline{f}(\underline{u}) = \underline{h}(\underline{u}) + \underline{a}(\underline{u}) \tag{3.2}$$

mit

$$\underline{h}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} h_\rho(\underline{u}) \\ h_m(\underline{u}) \\ h_{(\rho E)}(\underline{u}) \end{pmatrix} \text{ und } \underline{a}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} a_\rho(\underline{u}) \\ a_m(\underline{u}) \\ a_{(\rho E)}(\underline{u}) \end{pmatrix}$$

derart, daß das System

$$\partial_t \underline{u} + \partial_x \underline{h}(\underline{u}) = \underline{0} \tag{3.3}$$

hyperbolisch ist und den Bedingungen

1. Die Geschwindigkeit $v = \lambda_1$ stellt einen Eigenwert der Funktionalmatrix $\underline{\underline{h}}'(\underline{u})$ des quasilinearen Systems des Differentialgleichungssystems (3.3) dar.

2. Die zwei weiteren Eigenwerte $\lambda_{2,3}$ der Matrix $\underline{\underline{h}}'(\underline{u})$ liegen symmetrisch um v, das heißt

$$|\lambda_2 - v| = |\lambda_3 - v|$$

   und es gilt

$$\lambda_{2,3} = O(1), \ \mathrm{M} \to 0.$$

3. Für $\mathrm{M} \to 1$ geht das System (3.3) stetig in das System der Euler-Gleichungen (2.1) über, das heißt

$$\lim_{\mathrm{M}\to 1} \underline{f}(\underline{u}) - \underline{h}(\underline{u}) = \underline{0}$$

   beziehungsweise

$$\lim_{\mathrm{M}\to 1} \underline{a}(\underline{u}) = \underline{0}.$$

Eine Ursache für die in den Euler-Gleichungen (2.1) auftretenden charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Größenordnung $O\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right)$ liegt in dem bei $\mathrm{M}=0$ singulären Druckterm innerhalb der Impulsgleichung. Wir spalten diesen Anteil daher in der Form

$$\partial_t m + \partial_x(mv+p) = \frac{(\mathrm{M}^2-1)}{M^2}\partial_x p \tag{3.4}$$

auf. Da sich in der asymptotischen Analyse der Eulergleichungen die Divergenzfreiheit aus der Energiegleichung ergeben hat, vermuten wir auch in dieser asymptotische Komponenten. Aufschluß darüber liefert die folgende charakteristische Analyse. Wir bertachten hierzu das modifizierte System der Eulergleichungen

$$\partial_t \underline{u} + \partial_x \underline{h}(\underline{u}) = \underline{0} \tag{3.5}$$

mit

$$\underline{h}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} h_\rho(\underline{u}) \\ h_m(\underline{u}) \\ h_{(\rho E)}(\underline{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ mv+p \\ H^* m \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

das ebenfalls durch die Zustandsgleichung

$$p = (\gamma-1)\,\rho\left(E - \frac{\mathrm{M}^2}{2}|v|^2\right)$$

geschlossen wird. Die in der Energiegleichung auftretende Enthalphieform H^* wird durch

$$H^* = \frac{\rho E + \Pi}{\rho} \tag{3.7}$$

mittels eines verallgemeinerten Druckterms Π definiert. Durch Anwendung der obigen drei Bedingungen an das System (3.5) werden wir im folgenden notwendige Bedingungen an den Druckterm Π herleiten, die uns eine gezielte Definition dieses Terms ermöglichen. Wir setzen Π zunächst als Funktion der konservativen Variablen an und führen eine Charakteristikenanalyse durch. Aus der dritten Forderung erhalten wir $\lim_{\mathrm{M}\to 1} H^* = H$ und folglich $\lim_{\mathrm{M}\to 1} \Pi = p$, das heißt

$$\Pi = p + o(1),\ \mathrm{M}\to 1. \tag{3.8}$$

Die Jakobimatrix des Flußvektors $\underline{h}$ lautet

$$\underline{\underline{h}}'(\underline{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v^2+\partial_\rho p & 2v+\partial_m p & \gamma-1 \\ -vH^*+v\partial_\rho \Pi & H^*+v\partial_m \Pi & v+v\partial_{(\rho E)}\Pi \end{pmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned}\partial_\rho p &= \frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2 v^2 = \frac{1}{2}\tau v^2,\\ \partial_m p &= -(\gamma-1)\mathrm{M}^2 v = -\tau v,\end{aligned}$$

mit $\tau := (\gamma-1)\mathrm{M}^2$, ergibt sich das charakteristische Polynom χ zu

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det(\underline{\underline{h}}'(\underline{u}) - \lambda\underline{\underline{I}})\\ &= -\lambda^3 + (3-\tau)v\lambda^2 + v\partial_{(\rho E)}\Pi\lambda^2\\ &\quad+\left(-3v^2 + \frac{3}{2}\tau v^2 - (2-\tau)v^2\partial_{(\rho E)}\Pi + (\gamma-1)v\partial_m\Pi + (\gamma-1)H^*\right)\lambda\\ &\quad+v^3 - \frac{1}{2}\tau v^3 + v^3\partial_{(\rho E)}\Pi - \frac{1}{2}\tau v^3\partial_{(\rho E)}\Pi - (\gamma-1)vH^* + (\gamma-1)v\partial_\rho\Pi.\end{aligned}$$

Aus der ersten Forderung erhalten wir die Bedingung

$$\tau v^3\partial_{(\rho E)}\Pi - \frac{1}{2}\tau v^3\partial_{(\rho E)}\Pi + (\gamma-1)v(v\partial_m\Pi + \partial_\rho\Pi) = 0.$$

Die Gleichung soll für alle Geschwindigkeiten v gelten, so daß o. E. $v \neq 0$ angenommen werden kann. Division durch $(\gamma-1)v$ liefert die äquivalente Gleichung

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}^2 v^2\partial_{(\rho E)}\Pi + v\partial_m\Pi + \partial_\rho\Pi = 0. \tag{3.9}$$

Für die zwei verbleibenden Eigenwerte machen wir den Ansatz

$$\lambda_2 := \lambda_+ = v + c^*,\quad \lambda_3 := \lambda_- = v - c^* \tag{3.10}$$

mit einer noch zu bestimmenden verallgemeinerten Schallgeschwindigkeit c^*. Durch diese Darstellung ist unmittelbar die Symmetrieforderung der Eigenwerte $\lambda_{2,3}$ um v erfüllt. Die Ordnungsrelation überträgt sich wegen $v = O(1)$, $\mathrm{M} \to 0$, äquivalent auf

$$c^* = O(1),\ \mathrm{M} \to 0. \tag{3.11}$$

Zudem erhalten wir aus der dritten Forderung

$$c^* = c + o(1),\ \mathrm{M} \to 1. \tag{3.12}$$

Wir faktorisieren das charakteristische Polynom mit $(\lambda - v)$ und beschränken uns für die weiteren Untersuchungen auf das verbleibende Polynom zweiten Grades,

$$\begin{aligned}&-\lambda^2 + (2-\tau+\partial_{(\rho E)}\Pi)v\lambda\\ &\quad+(\tau-1)v^2\partial_{(\rho E)}\Pi + (\gamma-1)v\partial_m\Pi - v^2 + \frac{1}{2}\tau v^2 + (\gamma-1)H^* = 0.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die beiden Eigenwerte $\lambda_\pm$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\lambda_\pm \quad = \quad & \frac{2-\tau+\partial_{(\rho E)}\Pi}{2}v \pm \left(\frac{(2-\tau+\partial_{(\rho E)}\Pi)^2}{4}v^2\right.\\ & \left. +(\tau-1)v^2\partial_{(\rho E)}\Pi + (\gamma-1)v\partial_m\Pi - v^2 + \frac{1}{2}\tau v^2 + (\gamma-1)H^*\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ansatz (3.10) liefert somit

$$\partial_{(\rho E)}\Pi = \tau = (\gamma-1)\mathrm{M}^2 \tag{3.13}$$

und folglich die Linearität des Druckterms Π in der Totalenergie pro Einheitsvolumen ρE. Zudem erhalten wir für die Schallgeschwindigkeit c^* die Darstellung

$$(c^*)^2 = (\tau-1)\tau v^2 + (\gamma-1)v\partial_m\Pi + \frac{1}{2}\tau v^2 + (\gamma-1)H^*. \tag{3.14}$$

Hierdurch ergeben sich die beiden hinreichenden Bedingungen für die Forderung (3.11) gemäß

$$\Pi = O(1),\ \mathrm{M}\to 0 \tag{3.15}$$

und

$$\partial_m\Pi = O(1),\ \mathrm{M}\to 0. \tag{3.16}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (3.8) folgt mit $c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}$ und $(\rho E) = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\rho v^2$ die Gleichung

$$\begin{aligned}(\gamma-1)H^* - \frac{1}{2}\tau v^2 \quad &= \quad (\gamma-1)\frac{1}{\rho}(\rho E+\Pi) - \frac{1}{2}\tau v^2\\ &= \quad \frac{p}{\rho} + (\gamma-1)\frac{\Pi}{\rho} + \frac{1}{2}\tau v^2 - \frac{1}{2}\tau v^2\\ &= \quad \frac{p}{\rho} + (\gamma-1)\frac{\Pi}{\rho}\\ &= \quad \gamma\frac{p}{\rho} + o(1),\ \mathrm{M}\to 1\end{aligned}$$

und wir erhalten aus (3.14) die Darstellung

$$c^{*2} - c^2 = (\gamma-1)v\left\{(\gamma-1)\mathrm{M}^4 v + \partial_m\Pi\right\} + o(1),\ \mathrm{M}\to 1.$$

Damit ergibt sich die für (3.12) hinreichende und notwendige Bedingung an $\partial_m\Pi$ in der Form

$$\partial_m\Pi = -(\gamma-1)\mathrm{M}^4 v + o(1),\ \mathrm{M}\to 1. \tag{3.17}$$

Lemma 3.2.1
Sei die Flußfunktion des Differentialgleichungssystems (3.3)

$$\underline{h}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} m \\ mv + p \\ H^* m \end{pmatrix}$$

mit

$$H^* = \frac{\rho E + p_{\mathrm{NL}} + \mathrm{M}^2 p}{\rho}$$

und dem nichtlokalen Druckterm

$$p_{\mathrm{NL}} = \left(1 - \mathrm{M}^2\right) p_\Omega(0)$$

gegeben, dann ist das System (3.3) *hyperbolisch und erfüllt die auf Seite 14 aufgeführten Bedingungen* 1 - 3.

Beweis:
Mit $\Pi = p_{\mathrm{NL}} + \mathrm{M}^2 p$ liegen mit (3.9) eine hinreichende Bedingung für die erste Forderung, mit (3.13), (3.15) und (3.16) hinreichende Bedingungen für die zweite Forderung und mit (3.8) und (3.17) hinreichende Bedingungen für die dritte Forderung vor. Die Hyperbolizität ergibt sich als direkte Folgerung der Forderungen 1 und 2.

Einfaches Nachrechnen zeigt

$$\begin{aligned} \partial_m \Pi &= -(\gamma - 1)\mathrm{M}^4 v, \\ \partial_{(\rho E)} \Pi &= (\gamma - 1)\mathrm{M}^2 \end{aligned}$$

und

$$\partial_\rho \Pi = \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{M}^4 v^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{M}^2 v^2 \partial_{(\rho E)}\Pi - v\partial_m \Pi,$$

wodurch der Nachweis der Bedingungen (3.9), (3.13), (3.16) und (3.17) erbracht ist. Mit

$$p_{\mathrm{NL}} = o(1),\ \mathrm{M} \to 1 \text{ und } p_{\mathrm{NL}} = O(1),\ \mathrm{M} \to 0,$$

folgen mit $p = O(1),\ \mathrm{M} \to 0$, die Ordnungsrelationen

$$\Pi = p + o(1),\ \mathrm{M} \to 1 \text{ und } \Pi = O(1),\ \mathrm{M} \to 0,$$

wodurch die verbleibenden Gleichungen (3.8) und (3.15) erfüllt sind. □

Zusammenfassend erhalten wir die gesuchte Zerlegung der Flußfunktion $\underline{f}(\underline{u})$ in der Form

$$\underline{f}(\underline{u}) = \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ mv + p \\ H^* m \end{pmatrix}}_{\underline{h}(\underline{u}) :=} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{(\mathrm{M}^2 - 1)}{M^2} p \\ -(\mathrm{M}^2 - 1) pv - p_{\mathrm{NL}} v \end{pmatrix}}_{\underline{a}(\underline{u}) :=}$$

mit

$$H^* = \frac{\rho E + p_{\mathrm{NL}} + \mathrm{M}^2 p}{\rho} \quad \text{und} \quad p_{\mathrm{NL}} = \left(1 - \mathrm{M}^2\right) p_\Omega(0).$$

Folglich lassen sich die Euler-Gleichungen (2.1) äquivalent in der Form

$$\partial_t \underline{u} + \partial_x \underline{h}(\underline{u}) = -\partial_x \underline{a}(\underline{u}) \tag{3.18}$$

schreiben und wir bezeichnen das hyperbolische System

$$\partial_t \underline{u} + \partial_x \underline{h}(\underline{u}) = \underline{0} \tag{3.19}$$

als homogenes System. Für die gemäß (3.10) innerhalb der charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten des hyperbolischen Systems auftretende Schallgeschwindigkeit c^* erhalten wir mit (3.14)

$$c^* = \sqrt{\frac{p + (\gamma - 1)\left(p_{\mathrm{NL}} + \mathrm{M}^2 p\right)}{\rho}}.$$

3.2.2 Zeitdiskretisierung

In den folgenden Abschnitten werden wir eine räumlich und zeitlich konsistente Diskretisierung höherer Ordnung für das zu den Euler-Gleichungen äquivalente System (3.18) herleiten. Aufgrund des stetigen Übergangs des homogenen Systems (3.19) in die Euler-Gleichungen im Fall $\mathrm{M} \to 1$ erscheint es sinnvoll, zunächst eine Diskretisierung höherer Ordnung des homogenen Systems vorzunehmen und die in (3.18) enthaltene asymptotische Flußfunktion $\underline{a}(\underline{u})$ als Korrektur der homogenen Flüsse $\underline{h}(\underline{u})$ im Fall $\mathrm{M} < 1$ anzusehen. Im Kontext eines Verfahrens, welches eine Zeitdiskretisierung höherer Ordnung beinhaltet, müssen daher die innerhalb des Gesamtzeitschrittes auftretenden Korrelationen zwischen den homogenen und asymptotischen Flußanteilen geeignet berücksichtigt werden.

Definition 3.2.2
Sei $\underline{u}(\cdot,t)$ *die exakte Lösung der Differentialgleichung*

$$\partial_t \underline{u}(x,t) = -\partial_x \underline{g}(\underline{u}(x,t)),\ (x,t) \in \Omega \times I\!R_0^+ \tag{3.20}$$

zum Zeitpunkt t*, dann heißt eine auf der Verfahrensfunktion* $\underline{\Phi}$ *basierende Methode*

$$\underline{u}^{n+1}(x) = \underline{u}^n(x) + \Delta t \underline{\Phi}\left(\underline{u}^n(x), \Delta t; \underline{g}\right) \tag{3.21}$$

zur zeitlichen Evolution der Differentialgleichung (3.20) *konsistent von der Ordnung* p *am Ort* $x \in \Omega$*, falls*

$$\underline{u}(x,t^{n+1}) - \underline{u}(x,t^n) - \Delta t \underline{\Phi}\left(\underline{u}(x,t^n), \Delta t; \underline{g}\right) = O\left(\Delta t^{p+1}\right) \tag{3.22}$$

mit $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ *bei hinreichend glatter Lösung* $\underline{u}$ *und Abbildung* $\partial_x \underline{g}$ *gilt. Die Methode heißt konsistent von der Ordnung* p*, falls* (3.22) *für alle* $x \in \Omega$ *gilt.*

Lemma 3.2.3
Die Zeitintegration

$$\begin{aligned}
\underline{u}^n(x) &= \underline{u}(x,t^n) \\
\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}(x) &= \underline{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2}\left(\Theta \partial_x \underline{g}(\underline{u}^m(x)) + (1-\Theta)\partial_x \underline{g}(\underline{u}^{\widetilde{m}}(x))\right) \\
\underline{u}^{n+1}(x) &= \underline{u}^n(x) - \Delta t \partial_x \underline{g}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}(x))
\end{aligned} \tag{3.23}$$

stellt für alle $\Theta \in I\!R$ *und* $m, \widetilde{m} \in [n, n+1]$ *ein konsistentes Verfahren von zweiter Ordnung in der Zeit für die Differentialgleichung* (3.20) *dar.*

Beweis:
Mit

$$\begin{aligned}
&\underline{u}(x,t^{n+\frac{1}{2}}) - \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}(x) \\
&= \underline{u}(x,t^{n+\frac{1}{2}}) - \underline{u}(x,t^n) + \frac{\Delta t}{2}\left(\Theta \partial_x \underline{g}(\underline{u}^m(x)) + (1-\Theta)\partial_x \underline{g}(\underline{u}^{\widetilde{m}}(x))\right) \\
&= \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \partial_t \underline{u}(x,t)\, dt + \frac{\Delta t}{2}\left(\partial_x \underline{g}(\underline{u}^n(x)) + O\left(\Delta t\right)\right) \\
&= -\int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \partial_x \underline{g}(\underline{u}(x,t))\, dt + \frac{\Delta t}{2}\left(\partial_x \underline{g}(\underline{u}^n(x)) + O\left(\Delta t\right)\right) \\
&= O\left(\Delta t^2\right)
\end{aligned}$$

erhalten wir den Nachweis der Konsitenzordnung unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
&\underline{u}(x,t^{n+1}) - \underline{u}^{n+1}(x)\\
&= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t \underline{u}(x,t)\; dt + \Delta t \left(\partial_x \underline{g}\left(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}(x)\right)\right)\\
&= -\Delta t \partial_x \underline{g}\left(\underline{u}(x,t^{n+\frac{1}{2}})\right) + \Delta t \left(\partial_x \underline{g}\left(\underline{u}(x,t^{n+\frac{1}{2}}) + O\left(\Delta t^2\right)\right)\right) + O\left(\Delta t^3\right)\\
&= O\left(\Delta t^3\right).
\end{aligned}$$

□

Für die Verfahrensfunktionen $\underline{\Phi}$ und $\underline{\widetilde{\Phi}}$ zweier zur Differentialgleichung (3.20) konsistenter Methoden zweiter Ordnung gilt stets

$$\underline{\Phi}\left(\underline{u}^n(x), \Delta t; \underline{g}\right) - \underline{\widetilde{\Phi}}\left(\underline{u}^n(x), \Delta t; \underline{g}\right) = O\left(\Delta t^2\right).$$

Folglich ist bei der Herleitung einer konsistenten Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung für das Gesamtsystem (3.18) auf der Basis einer konsistenten Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung des homogenen Systems (3.19) die explizite Berücksichtigung der Diskretisierung des homogenen Systems nicht notwendig. Ausgehend von einer beliebigen konsistenten Diskretisierung zweiter Ordnung des homogenen Systems werden wir im folgenden eine gezielte Untersuchung der benötigten asymptotischen Korrekturflüsse durchführen, die auf der Basis der Flüsse des homogenen Systems ein konsistentes Gesamtverfahren zweiter Ordnung definieren. Betrachten wir die Diskretisierung des homogenen Systems in der Form (3.23), so wird unmittelbar deutlich, daß innerhalb des Verfahrens Approximationen an die physikalische Lösung des homogenen Systems zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ verwendet werden. Der hierdurch berechnete Massenfluß zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ weist keinen Einfluß des asymptotischen Impulsflusses $a_m(\underline{u})$ auf. Somit stellt die im Rahmen der Diskretisierung des homogenen Systems ermittelte Dichte ρ^{n+1} voraussichtlich keine Approximation zweiter Ordnung an die Dichte des Gesamtsystems dar, wodurch eine asymptotische Korrektur des Massenflusses trotz $a_\rho(\underline{u}) = 0$ zu erwarten ist. Diese einfachen Überlegungen zeigen bereits, daß eine direkte numerischen Approximation des asymptotischen Anteils $\underline{a}(\underline{u})$ mittels eines Zeitintegrationsverfahrens zweiter Ordnung in der Regel keine konsistente Methode zweiter Ordnung für das Gesamtsystem der Euler-Gleichungen liefert.

Im Sinne der Übersichtlichkeit vernachlässigen wir im weiteren die explizite Angabe der Ortsvariablen. Sei

$$\underline{u}^n := \underline{u}(t^n) \tag{3.24}$$

und

$$\underline{H}(\underline{u}^n) = \begin{pmatrix} H_\rho(\underline{u}^n) \\ H_m(\underline{u}^n) \\ H_{(\rho E)}(\underline{u}^n) \end{pmatrix} = \underline{\Phi}\left(\underline{u}^n, \Delta t; \underline{h}\right)$$

eine Verfahrensfunktion einer zur Differentialgleichung (3.19) konsistenten Methode zweiter Ordnung, dann schreiben wir

$$\underline{u}_h^{n+1} = \underline{u}^n - \Delta t \underline{H}(\underline{u}^n).$$

Somit gilt

$$\underline{u}_h^{n+1} = \underline{u}^n - \Delta t \partial_x \underline{h}(\underline{u}_h^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \tag{3.25}$$

mit

$$\underline{u}_h^{n+\frac{1}{2}} = \underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \partial_x \underline{h}(\underline{u}^n). \tag{3.26}$$

Analog sei

$$\underline{F}(\underline{u}^n, \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} F_\rho(\underline{u}^n, \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ F_m(\underline{u}^n, \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ F_{(\rho E)}(\underline{u}^n, \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} = \underline{\Phi}\left(\underline{u}^n, \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}, \Delta t; \underline{f}\right)$$

eine Verfahrensfunktion einer zu den Euler-Gleichungen (2.1) konsistenten Methode zweiter Ordnung. Dann schreiben wir

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n - \Delta t \underline{F}(\underline{u}^n, \underline{u}^{n+\frac{1}{2}})$$

und es gilt

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n - \Delta t \partial_x \underline{f}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \tag{3.27}$$

mit

$$\underline{u}^{n+\frac{1}{2}} = \underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\begin{array}{c} \partial_x m^n \\ \partial_x (mv+p)^n - \dfrac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\ \partial_x (H^* m)^n - (\mathrm{M}^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} - \partial_x (p_{\mathrm{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right). \tag{3.28}$$

Der Einfluß, der für $\mathrm{M} \to 0$ singulären Anteile der Impulsgleichung, liefert zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ die Differenz zwischen dem Impuls des homogenen Systems $m_h^{n+\frac{1}{2}}$ und dem Impuls des Gesamtsystems $m^{n+\frac{1}{2}}$ in der Form

$$m^{n+\frac{1}{2}} - m_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}. \tag{3.29}$$

Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich auf der Basis dieser Darstellung

$$\begin{aligned}
\rho^{n+1} &= \rho^n - \Delta t F_\rho\left(\underline{u}^n, \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&\stackrel{(3.27)}{=} \rho^n - \Delta t \partial_x \left(m^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3) \\
&\stackrel{(3.29)}{=} \rho^n - \Delta t \partial_x \left(m_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3) \\
&= \rho^n - \Delta t \partial_x h_\rho\left(\underline{u}_h^{n+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x^2 p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\
&\stackrel{(3.25)}{=} \rho^n - \Delta t H_\rho\left(\underline{u}^n\right) - \Delta t A_\rho\left(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

mit

$$A_\rho\left(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x^2 p^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

und

$$\rho(t^{n+1}) - \rho^{n+1} = O(\Delta t^3).$$

Für die Impulsgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
m_h^{n+1} &\stackrel{(3.25)}{=} m^n - \Delta t \partial_x h_m\left(\underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2}\partial_x \underline{h}_m(\underline{u}^n)\right) + O(\Delta t^3) \\
&= m^n - \Delta t \partial_x \left((mv+p)_h^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3),
\end{aligned}$$

wobei $(mv+p)_h^{n+\frac{1}{2}}$ die Kurzschreibweise von $\left(m_h^{n+\frac{1}{2}} v_h^{n+\frac{1}{2}} + p_h^{n+\frac{1}{2}}\right)$ darstellt. Unter Berücksichtigung von

$$\rho^{n+\frac{1}{2}} = \rho_h^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.32}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
v^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{m^{n+\frac{1}{2}}}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \stackrel{(3.29),(3.32)}{=} \frac{m_h^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_h^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t}{2\rho^{n+\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\
&= v_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2\rho^{n+\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

und somit

$$\begin{aligned}
(mv)^{n+\frac{1}{2}} &\stackrel{(3.33)}{=} \left(m_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right)\left(v_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2\rho^{n+\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&\stackrel{(3.32)}{=} (mv)_h^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2} v_h^{n+\frac{1}{2}}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(\Delta t)^2}{4}\frac{(\mathrm{M}^2-1)^2}{\mathrm{M}^4}\frac{\left(\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right)^2}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \\
&\stackrel{(3.33)}{=} (mv)_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\left(v_h^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}}\right)\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Die Diskretisierung der Impulsgleichung läßt sich folglich in der Form

$$
\begin{aligned}
m^{n+1} &= m^n - \Delta t \partial_x f_m \left(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3) \\
&= m^n - \Delta t \partial_x (mv + p)^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\
&\overset{(3.34)}{=} m^n - \Delta t \partial_x (mv + p)_h^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \partial_x \left(\left(v_h^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}} \right) \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad - \Delta t \partial_x (p - p_h)^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\
&\overset{(3.25)}{=} m^n - \Delta t H_m(\underline{u}^n) - \Delta t A_m(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A_m \left(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) &= -\frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p - p_h)^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \partial_x \left(\left(v_h^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}} \right) \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \right) \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

und

$$
m(t^{n+1}) - m^{n+1} = O(\Delta t^3)
$$

schreiben. Abschließend betrachten wir die Energiegleichung. Aufgrund der Definition der Enthalphieform

$$
H^* = E + \frac{p_{\mathrm{NL}} + \mathrm{M}^2 p}{\rho}
$$

ergibt sich

$$
(\rho H^*)_h^{n+\frac{1}{2}} = (\rho E)_h^{n+\frac{1}{2}} + p_{\mathrm{NL},h}^{n+\frac{1}{2}} + \mathrm{M}^2 p_h^{n+\frac{1}{2}}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(\rho E)^{n+\frac{1}{2}} &\overset{(3.28)}{=} (\rho E)^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x (H^* m)^n - (\mathrm{M}^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} - \partial_x (p_{\mathrm{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&\overset{(3.26)}{=} (\rho E)_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left((\mathrm{M}^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p_{\mathrm{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right). \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Der nichtlineare Druckterm p_{NL} unterliegt keiner zeitlichen Evolution, wodurch $p_{\mathrm{NL},h}^{n+\frac{1}{2}} = p_{\mathrm{NL}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{\mathrm{NL}}^{n}$ folgt und wir erhalten die Darstellungen

$$\begin{aligned}
H^{*,n+\frac{1}{2}} &= \frac{(\rho E)^{n+\frac{1}{2}} + p_{\mathrm{NL}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathrm{M}^2 p^{n+\frac{1}{2}}}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \\
&\overset{(3.32),(3.37)}{=} H_h^{*,n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{1}{\rho^{n+\frac{1}{2}}}\left((\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&\qquad + \mathrm{M}^2\frac{1}{\rho^{n+\frac{1}{2}}}\left(p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
(H^*m)^{n+\frac{1}{2}} \overset{(3.29)}{=} & (H^*m)_h^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}H_h^{*,n+\frac{1}{2}}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\
& + \frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}}\right)v^{n+\frac{1}{2}} \\
& + \mathrm{M}^2\left(p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}\right)v^{n+\frac{1}{2}}. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Für die Energiegleichung der Euler-Gleichungen ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
(\rho E)^{n+1} &= (\rho E)^n - \Delta t\partial_x f_{(\rho E)}\left(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3) \\
&= (\rho E)^n - \Delta t\partial_x(H^*m)^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \Delta t(\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t\partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\
&\overset{(3.38)}{=} (\rho E)^n - \Delta t\partial_x(H^*m)_h^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \Delta t(\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t\partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x(H_h^{*,n+\frac{1}{2}}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}) - \Delta t\mathrm{M}^2\partial_x\left((p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}})v^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2}\partial_x\left(\left((\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}}\right)v^{n+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta t^3) \\
&= (\rho E)^n - \Delta t H_{(\rho E)}(\underline{u}^n) - \Delta t A_{(\rho E)}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
A_{(\rho E)}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \;=\; & -(\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} - \partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}} \\
& +\mathrm{M}^2\partial_x\left((p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}})v^{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x(H_h^{*,n+\frac{1}{2}}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}) \\
& +\frac{\Delta t}{2}\partial_x\left(\left((\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}}\right)v^{n+\frac{1}{2}}\right) \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

und

$$
(\rho E)(t^{n+1}) - (\rho E)^{n+1} = O(\Delta t^3).
$$

Zusammenfassend läßt sich die bei einer Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung zu berücksichtigende asymptotische Flußkorrektur in der Form

$$
\underline{A}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} A_\rho(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ A_m(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ A_{(\rho E)}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} = \partial_x\underline{\widetilde{a}}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \qquad (3.41)
$$

mit

$$
\underline{\widetilde{a}}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_\rho(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \widetilde{a}_m(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \widetilde{a}_{(\rho E)}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\widetilde{a}_\rho(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \;=\; & \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (3.42) \\
\widetilde{a}_m(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \;=\; & -\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}p^{n+\frac{1}{2}} + (p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}) \\
& +\frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\left(v_h^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}}\right)\partial_x p^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (3.43) \\
\widetilde{a}_{(\rho E)}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) \;=\; & -(\mathrm{M}^2-1)(pv)^{n+\frac{1}{2}} - (p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}} \\
& +\mathrm{M}^2(p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}})v^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}H_h^{*,n+\frac{1}{2}}\partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\
& +\frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}}\right)v^{n+\frac{1}{2}} \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

schreiben.

Innerhalb der asymptotischen Anteile aller Flüsse können sämtliche mit der Zeitschrittweite Δt multiplizierten Terme durch eine Approximation erster Ordnung ersetzt werden, ohne einen Ordnungsverlust im Rahmen des Gesamtverfahrens zu bewirken. Innerhalb der Impulsflüsse kann daher die Geschwindigkeit $v_h^{n+\frac{1}{2}}$ beispielsweise durch v^n, $v^{n+\frac{1}{2}}$ oder v^{n+1} ersetzt werden. Da zudem $p^{n+1} = p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t) = p^n + O(\Delta t)$ gilt, kann der asymptotische Impulsflußanteil

$$\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2} v_h^{n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2} v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}$$

in der Form

$$\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2} v^m \partial_x p^{\widetilde{m}}$$

mit $m, \widetilde{m} \in [n, n+1]$ variiert werden. Auf analoge Weise ergibt sich eine Modifikation des asymptotischen Massenflußanteils und wir erhalten für die Energiegleichung die Variationsmöglichkeiten

$$\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2} H^{*,m} \partial_x p^{\widetilde{m}},\ (\mathrm{M}^2-1) p^{\widetilde{m}} v^m \text{ und } p_{\mathrm{NL}}^{\widetilde{m}} v^m$$

mit $m, \widetilde{m} \in [n, n+1]$ für die Terme

$$\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2} H_h^{*,n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}},\ (\mathrm{M}^2-1)(pv)^{n+\frac{1}{2}} \text{ respektive } (p_{\mathrm{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Desweiteren zeigt sich bei der gewählten Formulierung sehr deutlich, daß bei einer konsistenten Zeitintegration erster Ordnung eine direkte Diskretisierung der Flußfunktionen $\underline{h}(\underline{u})$ und $\underline{a}(\underline{u})$ ohne Berücksichtigung etwaiger Korrelationen möglich ist. Diese Aussage begründet sich auf der Tatsache, daß mit

$$p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}} = O(\Delta t)$$

alle im Vergleich zu einer seperaten Diskretisierung erster Ordnung der Flußfunktionen zusätzlich auftretenden Terme innerhalb der asymptotischen Flußkorrektur $\underline{A}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}})$ von der Größenordnung $O(\Delta t)$ sind. Bezogen auf die Flußfunktionen $\underline{a}(\underline{u})$ und $\underline{\widetilde{a}}(\underline{u})$ läßt sich diese Eigenschaft in der Form

$$\underline{a}(\underline{u}) - \underline{\widetilde{a}}(\underline{u}) = O(\Delta t)$$

ausdrücken. Die asymptotischen Flußfunktionen weisen eine signifikant unterschiedliche Struktur auf. Wir wollen daher zum Abschluß dieses Abschnitts die für das numerische Verfahren grundlegende Bedingung

$$\widetilde{\underline{a}}(\underline{u}) = o(1), \ \mathrm{M} \to 1 \tag{3.45}$$

nachweisen. Zunächst können die mit dem Faktor $(\mathrm{M}^2 - 1)$ multiplizierten Anteile vernachlässigt werden. Zudem gilt aufgrund der Definition des nichtlokalen Drucks stets $p_{\mathrm{NL}} = o(1)$, $\mathrm{M} \to 1$, so daß lediglich der in der Impuls- und Energiegleichung auftretende Term

$$p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}$$

untersucht werden muß. Hierfür erhalten wir mit (3.26) und (3.28) das benötigte Abfallverhalten unmittelbar aus

$$\underline{u}^{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}_h^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta t}{2}\partial_x \underbrace{\left(\underline{f}(\underline{u}^n) - \underline{h}(\underline{u}^n)\right)}_{= o(1), \ \mathrm{M} \to 1} = o(1), \ \mathrm{M} \to 1$$

und folglich die Eigenschaft (3.45).

Analog zu den bereits erläuterten Variationsmöglichkeiten innerhalb der asymptotischen Korrekturflüsse, werden wir nun auch eine Modifikation des Terms $p^{n+\frac{1}{2}} - p_h^{n+\frac{1}{2}}$ vorstellen. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Modifikationen wird dieser Term nicht mit dem Faktor Δt multipliziert, wodurch zum Erhalt einer Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung ausschließlich Variationen in der zeitlichen Ordnung $O(\Delta t^2)$ vorgenommen werden dürfen. Aus den Eulergleichungen (2.1) läßt sich unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung (2.2) die Druckevolutionsgleichung

$$\partial_t p + \partial_x(pv) + (\gamma - 1)p\partial_x v = 0$$

herleiten. Analog erhalten wir für das homogene System (3.5) die Darstellung

$$\partial_t p_h + \partial_x(pv)_h + (\gamma - 1)\partial_x\left(p_{\mathrm{NL}} v_h\right) + (\gamma - 1)\mathrm{M}^2 p_h \partial_x v_h = 0.$$

Nutzen wir ausgehend von $p^n = p_h^n$ und $v^n = v_h^n$ ein Zeitschrittverfahren erster Ordnung, so erhalten wir

$$p^{n+\frac{1}{2}} = p^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\partial_x(pv)^n + (\gamma - 1)p^n\partial_x v^n\right) + O(\Delta t^2)$$

und

$$p_h^{n+\frac{1}{2}} = p^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\partial_x(pv)^n + (\gamma - 1)\partial_x\left(p_{\mathrm{NL}} v\right)^n + (\gamma - 1)\mathrm{M}^2 p^n \partial_x v^n\right) + O(\Delta t^2).$$

Hierdurch ergibt sich

$$\begin{aligned}(p-p_h)^{n+\frac{1}{2}} &= (\gamma-1)\frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)p^n\partial_x v^n + \partial_x\left(p_{\mathrm{NL}}v\right)^n\right) + O(\Delta t^2)\\ &= (\gamma-1)\frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)p^m\partial_x v^m + \partial_x\left(p_{\mathrm{NL}}v\right)^m\right) + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

mit $m \in [n, n+1]$.

3.3 Die Ortsdiskretisierung

Basierend auf der in Abschnitt 3.1 beschriebenen räumlichen Diskretisierung des Strömungsgebietes Ω werden wir im folgenden ein numerisches Verfahren zur approximativen Lösung der Euler-Gleichungen vorstellen.

Sei $\sigma \subset I\!R$ ein beschränktes Gebiet und φ eine beliebige physikalische Größe, dann stellt

$$\left(\mathcal{M}_\sigma\varphi\right)(t) := \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \varphi(y,t)dy \tag{3.46}$$

den Mittelungsoperator über σ dar, so daß der hierdurch definierte Mittelwert ortsunabhängig ist und mit

$$\varphi_\sigma(t) := \left(\mathcal{M}_\sigma\varphi\right)(t) \tag{3.47}$$

bezeichnet wird.

Wir verwenden ein Finite-Volumen-Verfahren höherer Ordnung und betrachten daher stets die Evolution der Zellmittelwerte

$$\underline{u}_i(t) := \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\underline{u}\right)(t)$$

gemäß

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\underline{u}_i(t) &= -\left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x\underline{f}(\underline{u})\right)(t)\\ &= -\left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x\underline{h}(\underline{u})\right)(t) - \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x\underline{a}(\underline{u})\right)(t)\end{aligned}$$

für alle $\Omega_i \in \Xi$, wobei die Initialisierung der stückweise konstanten Funktionen

$$\underline{u}_{\Omega_i}(x,t) = \underline{u}_i(t),\ x \in \Omega_i$$

durch Anwendung des Zellmittelungsoperators $(\mathcal{M}_{\Omega_i}\cdot)$ auf die Anfangsverteilung gemäß

$$\underline{u}_{\Omega_i}(x,0) := \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\underline{u}\right)(0),\ x \in \Omega_i$$

definiert wird. Eine zeitliche Integration liefert die Darstellung der Gleichung (3.18) in der Form

$$\underline{u}_i(t^{n+1}) = \underline{u}_i(t^n) - \left\{ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x \underline{h}(\underline{u})\right)(t)\,dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x \underline{a}(\underline{u})\right)(t)\,dt \right\}$$

für $i = 1, \dots, N$. Die folgenden zwei Paragraphen beschreiben eine mögliche Vorgehensweise zur Definition zweier Flußfunktionen

$$\underline{\mathcal{H}} : I\!R^4 \times I\!R^4 \to I\!R^4, \quad \underline{\mathcal{A}} : I\!R^4 \times I\!R^4 \to I\!R^4$$

derart, daß mit $m, \widetilde{m} \in [n, n+1]$

$$\begin{aligned} &\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x \underline{h}(\underline{u})\right)(t)\,dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x \underline{a}(\underline{u})\right)(t)\,dt \\ = \;& \frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{ \underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_i^m, \underline{u}_{i+1}^m) - \underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_{i-1}^m, \underline{u}_i^m) \\ &\quad + \underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_i^{\widetilde{m}}, \underline{u}_{i+1}^{\widetilde{m}}) - \underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_{i-1}^{\widetilde{m}}, \underline{u}_i^{\widetilde{m}}) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)\Big\} \end{aligned}$$

gilt. Hierzu werden wir zunächst eine Diskretisierung höherer Ordnung für das homogene System vornehmen und anschließend die numerischen Approximation der asymptotischen Korrekturflüsse basierend auf der im Abschnitt 3.2.2 durchgeführten Analyse entwickeln.

3.3.1 Diskretisierung des homogenen Systems

Das homogene System (3.19) in Integralform

$$\underline{u}_{i,h}(t^{n+1}) = \underline{u}_i(t^n) - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\mathcal{M}_{\Omega_i}\partial_x \underline{h}(\underline{u})\right)(t)\,dt$$

wird mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in eine Formulierung mit Randintegralen überführt. Diese können mit einem modifizierten Riemannlöser, linearer Rekonstruktion sowie einem MUSCL-Ansatz in zweiter Ordnung in Raum und Zeit gelöst werden.

Mit den noch genauer zu bestimmenden Flußfunktionen $\underline{\mathcal{H}}$ zur Approximation der Randintegrale lautet die vollständige Diskretisierung

$$\underline{u}_{i,h}^{n+1} = \underline{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{ \underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_i^n, \underline{u}_{i+1}^n) - \underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_{i-1}^n, \underline{u}_i^n)\Big\}. \tag{3.48}$$

Wir werden dazu den approximativen Roe-Riemann-Löser mit Entropiefix an das homogene System anpassen. Da es sich hierbei um einen linearisierten Ansatz handelt, erscheint eine Rekonstruktion in den charakteristischen Variablen am angebrachtesten (vergleiche [15]).

Wir verwenden einen MUSCL-Ansatz in der Zeit, der in einer Raumdimension effizienter als hohe Ordnung Runge-Kutta-Verfahren ist und im Verfahren direkt in die räumliche Rekonstruktion implementiert werden kann.

3.3.1.1 Charakteristische Formulierung des homogenen Systems

Wir betrachten das System (3.19). Die Rechtseigenvektoren der Jakobimatrix $\underline{\underline{h}}'(\underline{u})$ der Flußfunktion $\underline{h}(\underline{u})$ lauten

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1}{2}\mathrm{M}^2 v^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c^* \\ H^* + \mathrm{M}^2 v c^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c^* \\ H^* - \mathrm{M}^2 v c^* \end{pmatrix}.$$

Die dazugehörigen Eigenwerte wurden bereits im Abschnitt 3.2.1 ermittelt und schreiben sich

$$\lambda_1 = v,\ \lambda_2 = v + c^* \text{ sowie } \lambda_3 = v - c^*.$$

Fassen wir die Eigenvektoren $\underline{r}_i$ zur Matrix $\underline{\underline{R}}(\underline{u})$ zusammen,

$$\underline{\underline{R}}(\underline{u}) = (\underline{r}_1\ \underline{r}_2\ \underline{r}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v & v + c^* & v - c^* \\ \frac{1}{2}\mathrm{M}^2 v^2 & H^* + \mathrm{M}^2 v c^* & H^* - \mathrm{M}^2 v c^* \end{pmatrix},$$

so ergibt sich mit

$$\underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau}{2}\frac{v^2}{c^{*2}} & \tau\frac{v}{c^{*2}} & -(\gamma-1)\frac{1}{c^{*2}} \\ -\frac{v}{2c^*} + \frac{\tau}{4}\frac{v^2}{c^{*2}} & \frac{1}{2c^*} - \frac{\tau}{2}\frac{v}{c^{*2}} & \frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{c^{*2}} \\ \frac{v}{2c^*} + \frac{\tau}{4}\frac{v^2}{c^{*2}} & -\frac{1}{2c^*} - \frac{\tau}{2}\frac{v}{c^{*2}} & \frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{c^{*2}} \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$$

die Matrixgleichung

$$\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{h}}'\ \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\Lambda}},$$

wobei analog zum Abschnitt 3.2.1 die Variable $\tau := (\gamma - 1)\mathrm{M}^2$ genutzt wurde. Um zu einer Beschreibung des homogenen Systems (3.19) in charakteristischen Variablen zu gelangen, muß es lokal um einen konstanten Vektor $\underline{\bar{u}}$ linearisiert werden,

$$\partial_t \underline{u} + \underline{\underline{h}}'(\underline{\bar{u}})\partial_x \underline{u} = \underline{0}. \tag{3.49}$$

Multiplikation der Gleichung (3.49) mir der der Matrix $\underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{\bar{u}})$ von links liefert nun

$$\underline{\underline{R}}^{-1}\partial_t \underline{u} + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{h}}'(\underline{\bar{u}})(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^{-1})\partial_x \underline{u} = \underline{0}.$$

Da die Matrix $\underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{\bar{u}})$ aufgrund der betrachteten Linearisierung nur konstante Einträge besitzt, folgt

$$\partial_t(\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{u}) + \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{h}}'(\underline{\bar{u}})\underline{\underline{R}}\partial_x(\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{u}) = \underline{0}.$$

Somit erhalten wir durch die Definition der charakteristische Variablen über

$$\underline{w} := \underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{\bar{u}})\underline{u} = \begin{pmatrix} \rho - \frac{1}{\bar{c^*}^2}p \\ \frac{1}{\bar{\rho}\bar{c^*}}p + v \\ \frac{1}{\bar{\rho}\bar{c^*}}p - v \end{pmatrix}$$

die charakteristische Formulierung des homogenen Systems in der Form

$$\partial_t \underline{w} + \underline{\underline{\Lambda}}\partial_x \underline{w} = 0,$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
(\rho_t - \frac{1}{\bar{c^*}^2}p_t) + \quad \bar{v} \quad (\rho_x - \frac{1}{\bar{c^*}^2}p_x) &= 0,\\
(\frac{1}{\bar{\rho}\bar{c^*}}p_t + v_t) + (\bar{v} + \bar{c^*})(\frac{1}{\bar{\rho}\bar{c^*}}p_x + v_x) &= 0,\\
(\frac{1}{\bar{\rho}\bar{c^*}}p_t - v_t) + (\bar{v} - \bar{c^*})(\frac{1}{\bar{\rho}\bar{c^*}}p_x - v_x) &= 0.
\end{aligned}$$

3.3.1.2 Lineare Rekonstruktion mit MUSCL–Ansatz in charakteristischen Variablen

Betrachtet man die charakteristische Größe w_j, die der charakteristischen Gleichung

$$\partial_t w_j + \lambda_j \partial_x w_j = 0 \tag{3.50}$$

genügt. Die Größe w_j sei wiederum als Zellmittelwert auf jeder Zelle Ω_i der Größe $\Delta x = |\Omega_i|$ gegeben. Der Wert von $(w_j)_i$ zum Zeitschritt t^n sei entsprechend mit $(w_j)_i^n$ bezeichnet. Gesucht ist eine lineare Rekonstruktion $((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_{L,R}$ der Daten am linken und rechten Rand der Zelle Ω_i zum Zwischenzeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Zunächst berechnet man die Steigungen $d(w_j)_{i,L}^n$ und $d(w_j)_{i,R}^n$ mittels der Werte von $(w_j)_i^n$ und seinem linken beziehungsweise rechten Nachbarwert

$$d(w_j)_{i,L}^n := \frac{(w_j)_i^n - (w_j)_{i-1}^n}{\Delta x}, \qquad d(w_j)_{i,R}^n := \frac{(w_j)_{i+1}^n - (w_j)_i^n}{\Delta x}$$

und limitieren sie mit einem in der Literatur üblichen Steigungslimiter, damit das Gesamtverfahren die TVD–Bedingung erfüllt. Wir nutzen hierzu den bekannten Superbee-Limiter [9]

$$d(w_j)_i^n := \text{superbee}((d(w_j)_i^n)_L,\ (d(w_j)_i^n)_R).$$

mit

$$\text{superbee}(x,y) := \max\left\{0; \min\left(1; 2\frac{x}{y}\right); \min\left(\frac{x}{y}; 2\right)\right\}.$$

Über

$$((w_j)_i^n)_{L,R} := (w_j)_i^n \mp d(w_j)_i^n \frac{\Delta x}{2} \tag{3.51}$$

berechnen sich die Randdaten zum Zeitpunkt t^n. Dabei ist das negative Vorzeichen für die Berechnung des linken Randwertes zu verwenden.

Um zu einem Verfahren höherer Ordnung in der Zeit zu gelangen, verwenden wir einen MUSCL-Ansatz. Dazu wird eine Evolution der rekonstruierten Randdaten um einen halben Zeitschritt vorgenommen. Die verwendete Evolution muß nicht in konservativer Form geschehen, so daß wir in diesem Schritt die charakteristische Gleichung (3.50) nutzen können. In der Diskretisierung der Ortsableitung ist wiederum die limitierte Steigung $d(w_j)^n$ einzusetzen. Für den Linkenrand ergibt sich mit $t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t$ die Darstellung

$$((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_L = ((w_j)_i^n)_L - \lambda_j \frac{\Delta t}{2}\ d(w_j)_i^n.$$

Zusammenfassend folgt mit (3.51)

$$((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_L = (w_j)_i^n - d(w_j)_i^n \frac{\Delta x}{2} - \lambda_j \frac{\Delta t}{2} d(w_j)_i^n$$

$$= (w_j)_i^n - \frac{1}{2}\Big(1 + \lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big) d(w_j)_i \Delta x$$

und entsprechend für den rechten Rand

$$((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_R = (w_j)_i^n + \frac{1}{2}\Big(1 - \lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big) d(w_j)_i^n \Delta x.$$

3.3.1.3 Ein modifizierter Roe–Riemannlöser für das homogene System

Die Idee des approximativen Roe–Riemannlösers ist es die Jakobimatrix $\underline{\underline{h}}'(\underline{u})$ durch eine konstante Matrix $\underline{\underline{\tilde{h}}}'(\underline{\tilde{u}})$, der sogenannten Roe–Matrix, zu ersetzen und das linearisierte Riemannproblem exakt zu lösen. Dabei hat die Roe–Matrix in Abhängigkeit von der Wahl von $\underline{\tilde{u}}$ als Funktion der Daten des linken und rechten Zustandes,

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{u}}: \quad & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 && \to \mathbb{R}^3, \\ & (\underline{u}_R, \underline{u}_L) && \mapsto \underline{\tilde{u}}\left(\underline{u}_R, \underline{u}_L\right), \end{aligned}$$

die folgenden drei Eigenschaften aufzuweisen:

1. Hyperbolizität des linearisierten Systems,

2. Konsistenz mit der exakten Jakobimatrix im Fall $\underline{\tilde{u}} = \underline{\tilde{u}}(\underline{u}, \underline{u})$

$$\underline{\underline{\tilde{h}}}'\left(\underline{\tilde{u}}\right) = \underline{\underline{h}}'\left(\underline{u}\right),$$

3. Konservativität an Unstetigkeitsstellen

$$\underline{h}\left((\underline{u}_{i+1})_L\right) - \underline{h}\left((\underline{u}_i)_R\right) = \underline{\underline{\tilde{h}}}'\left(\underline{\tilde{u}}\right)\left((\underline{u}_{i+1})_L - (\underline{u}_i)_R\right).$$

Im Einklang mit den Eigenschaften der Roe–Matrix nutzen wir den Roe–Pike–Ansatz um die gemittelten Werte $\underline{\tilde{W}} := (\tilde{v},\ \tilde{H}^*,\ \tilde{c}^*)^T$ der Eigenvektoren $\underline{\tilde{r}}_j$, Eigenwerte $\tilde{\lambda}_j$ und Wellenstärken $\tilde{\alpha}_j$ des homogenen Systems zu bestimmen. Bei diesem Ansatz umgeht man das explizite Erstellen der Roe–Matrix, da diese im Lösungsalgorithmus nicht benötigt wird.

Wir überspringen den Linearisierungsschritt zur Bestimmung vereinfachter analytischer Ausdrücke der Wellenstärken und lösen direkt das algebraische Problem bestehend aus den zwei Gleichungssystemen

$$\Delta\underline{u}_{[i,i+1]} = (\underline{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})_L - (\underline{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R = \sum_{j=1}^{3} \tilde{\alpha}_j \underline{\tilde{r}}_j, \tag{3.52}$$

$$\Delta\underline{h}_{[i,i+1]} = \underline{h}\left((\underline{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})_L\right) - \underline{h}\left((\underline{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R\right) = \sum_{i=j}^{3} \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \underline{\tilde{r}}_j, \tag{3.53}$$

indem wir die analytischen Ausdrücke für λ_j und $\underline{r}_j$ als Funktionen der gesuchten Mittelwerte $\underline{\tilde{W}}$ ansetzen:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{v} - \tilde{c}^*, \qquad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{v}, \qquad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{v} + \tilde{c}^*,$$

$$\underline{\tilde{r}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v} - \tilde{c}^* \\ \tilde{H}^* - \mathrm{M}^2 \tilde{v}\tilde{c}^* \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{r}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v} \\ \frac{1}{2}\mathrm{M}^2 \tilde{v}^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{r}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v} + \tilde{c}^* \\ \tilde{H}^* + \mathrm{M}^2 \tilde{v}\tilde{c}^* \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der sechs Mittelwerte stehen jedoch nur fünf Gleichungen zur Verfügung, da die zweite Gleichung des ersten Systems mit der ersten Gleichung des zweiten Systems identisch ist. Zur Schließung des algebraischen Problems forden wir, daß für die gemittelten Werte zusätzlich

$$(\tilde{c}^*)^2 = (\gamma - 1)[\tilde{H}^* - \frac{1}{2}\mathrm{M}^2 \tilde{v}^2] \tag{3.54}$$

erfüllt sei. Für die Ausführung der einfachen, aber länglichen, Berechnung verweisen wir auf Anhang A. Bei bekannten Mittelwerten $\underline{\tilde{W}}$ erhält man die Koeffizienten $\tilde{\alpha}_j$ aus dem Gleichungssystem (3.52) in der Form

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{c}^*}\Big[\Delta\rho_{[i,i+1]}(v + \tilde{c}^*) - \Delta m_{[i,i+1]} - \tilde{c}^* \tilde{\alpha}_2\Big], \tag{3.55}$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma - 1}{(\tilde{c}^*)^2}\Big[\Delta\rho_{[i,i+1]}(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2 \tilde{v}^2) + \mathrm{M}^2 \tilde{v} \Delta m_{[i,i+1]} - \Delta(\rho E)_{[i,i+1]}\Big], \tag{3.56}$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \Delta\rho_{[i,i+1]} - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2. \tag{3.57}$$

Die zwei fehlenden Mittelwerte ergeben sich nun aus dem Gleichungssystem (3.53) zu

$$\tilde{v} := \frac{\sqrt{\rho_R} v_R + \sqrt{\rho_L} v_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}, \tag{3.58}$$

und

$$\tilde{H}^* := \frac{\sqrt{\rho_R} H_R^* + \sqrt{\rho_L} H_L^*}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}. \tag{3.59}$$

Da linearisierte Riemannprobleme nur Lösungen mit Sprüngen zulassen, können Verdünnungswellen, welche einen stetigen Charakter besitzen, nicht richtig wiedergegeben werden. Eine Approximation mittels eines linearisierten Riemannlösers kann damit nicht zu guten numerischen Lösungen führen. In der praktischen Umsetzung führt dies aber nur für sonische und transsonische Verdünnungswellen zu einem signifikanten Fehler. In diesen Fällen können unphysikalische, entropieverletzene Schockwellen auftreten.

Durch die Einführung eines Entropie-fixes nach Harten–Hyman werden diese Probleme beseitigt. Dazu werden in den kritischen Fällen die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_j$ geeignet geändert. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in [15].

Schließlich berechnet sich die Flußfunktion $\underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_i^n, \underline{u}_{i+1}^n)$ zu

$$\underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_i^n, \underline{u}_{i+1}^n) := h\left((\underline{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R\right) + \sum_{\tilde{\lambda}_j \leq 0} \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \underline{\tilde{r}}_j. \tag{3.60}$$

3.3.2 Kompakte Diskretisierung der asymptotischen Flußkorrekturanteile

Die aus den Gleichungen (3.30),(3.35) und (3.39) bestehende zeitliche Approximation zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \underline{u}(x, t^{n+1}) &= \underline{u}^{n+1}(x) + O(\Delta t^3) \\ &= \underline{u}^n(x) - \Delta t \underline{H}(\underline{u}^n(x)) - \Delta t \underline{A}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}(x)) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

wird in diesem Abschnitt auf der Basis der im Paragraph 3.3.1 hergeleiteten räumlichen und zeitlichen Aprroximation zweiter Ordnung des homogenen Systems zu einem numerischen Gesamtverfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit für die Euler-Gleichungen erweitert. Für die Zellmittelwerte gilt die Darstellung

$$\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \underline{H}(\underline{u}^n(x))\, dx - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \underline{A}(\underline{u}^{n+\frac{1}{2}}(x))\, dx \tag{3.61}$$

für alle $\Omega_i \in \Xi$. Gesucht ist folglich eine Approximation zweiter Ordnung in Raum und Zeit für das in Gleichung (3.61) auftretende zweite Integral.

Die asymptotischen Korrekturflüsse beinhalten alle im Fall einer kleinen Mach-Zahl auftretenden Informationsausbreitungen mit einer Geschwindigkeit in der Größenordnung $O_s\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right)$. Daher erweist sich eine implizite Evolutionsvorschrift als sinnvoll, so daß das Verfahren keiner restriktiven CFL-Bedingung aufgrund der akustischen Terme unterliegt.

Wir werden daher zunächst ein vollständig implizites Zeitschrittverfahren zweiter Ordnung für die akustischen Korrekturterme herleiten und anschließend die Vorgehensweise für das Gesamtverfahren erläutern.

Lemma 3.3.1
Die Zeitintegration

$$\begin{aligned} \underline{u}^n(x) &= \underline{u}(x,t^n), \\ \widetilde{\underline{u}^{n+1}}(x) &= \underline{u}^n(x) - \Delta t \partial_x \underline{g}(\widetilde{\underline{u}^{n+1}}(x)), \\ \underline{u}^{\tilde{n}}(x) &= \underline{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2}\left(\partial_x \underline{g}(\underline{u}^{\tilde{n}}(x)) - \partial_x \underline{g}(\widetilde{\underline{u}^{n+1}}(x))\right), \\ \underline{u}^{n+1}(x) &= \underline{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2}\left(\partial_x \underline{g}(\underline{u}^{\tilde{n}}(x)) + \partial_x \underline{g}(\underline{u}^{n+1}(x))\right), \end{aligned} \tag{3.62}$$

stellt ein konsistentes Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit für die Differentialgleichung (3.20) *dar, wenn die Lösung* $\underline{u}(x,t)$ *der Differentialgleichung und die Flußfunktion hinreichend glatt sind.*

Beweis:
Für die Lösung $\underline{u}(x,\cdot) \in C^3(I\!R^+, I\!R^3)$ der Differentialgleichung (3.20) und $\underline{g}(\underline{u}(\cdot,\cdot)) \in C^2(\Omega \times I\!R^+, I\!R^3)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{u}(x,t^{n+1}) &= \underline{u}(x,t^n) + \Delta t \partial_t \underline{u}(x,t^{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{2}\partial_t^2 \underline{u}(x,t^{n+1}) + O(\Delta t^3) \\ &= \underline{u}(x,t^n) - \Delta t \partial_x \underline{g}(\underline{u}(x,t^{n+1})) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2}\partial_x\left(\partial_t \underline{g}(\underline{u}(x,t^{n+1}))\right) + O(\Delta t^3) \\ &= \underline{u}(x,t^n) - \Delta t \partial_x \underline{g}(\underline{u}(x,t^{n+1})) \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2}\partial_x\left(\frac{d\underline{g}}{d\underline{u}}(\underline{u}(x,t^{n+1}))\partial_x \underline{g}(\underline{u}(x,t^{n+1}))\right) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir die Abkürzungen

$$\underline{G}(x,t^{n+1}) = \partial_x \underline{g}(\underline{u}(x,t^{n+1}))$$

und

$$\widetilde{\underline{G}}^i(x) = \partial_x \underline{g}(\widetilde{\underline{u}}^i(x))$$

ein. Folglich kann die Gleichung (3.63) in der Form

$$\begin{aligned}\underline{u}(x,t^{n+1}) &= \underline{u}(x,t^n) - \Delta t \underline{G}(x,t^{n+1}) \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2}\partial_x\left(\frac{dg}{d\underline{u}}(\underline{u}(x,t^{n+1}))\underline{G}(x,t^{n+1})\right) + O(\Delta t^3) \qquad (3.64)\end{aligned}$$

geschrieben werden. Desweiteren vernachlässigen wir im folgenden die Ortsvariable x. Die Idee liegt nun in der Nutzung eines Runge-Kutta-Verfahren, das in impliziter Formulierung die Darstellung

$$\widetilde{\underline{u}}^{\tilde{n}} = \widetilde{\underline{u}}^{n+1} + \Delta t \widetilde{\underline{G}}^{n+1}, \qquad (3.65)$$

$$\underline{u}^n = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\underline{u}}^{n+1} + \widetilde{\underline{u}}^{\tilde{n}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\widetilde{\underline{G}}^{\tilde{n}} \qquad (3.66)$$

besitzt. Die obige Vorgehensweise läßt sich äquivalent in der Form

$$\widetilde{\underline{u}}^{n+1} = \underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\widetilde{\underline{G}}^{\tilde{n}} + \widetilde{\underline{G}}^{n+1}\right), \qquad (3.67)$$

$$\widetilde{\underline{u}}^{\tilde{n}} = \underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\widetilde{\underline{G}}^{\tilde{n}} - \widetilde{\underline{G}}^{n+1}\right) \qquad (3.68)$$

schreiben. Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned}\widetilde{\underline{u}}^{n+1} &= \underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\widetilde{\underline{G}}^{\tilde{n}} + \widetilde{\underline{G}}^{n+1}\right) \\ &= \underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2}\widetilde{\underline{G}}^{n+1} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2}\partial_x\left(\underline{g}(\widetilde{\underline{u}}^{n+1}) + \frac{dg}{d\underline{u}}(\widetilde{\underline{u}}^{n+1})\left(\widetilde{\underline{u}}^{\tilde{n}} - \widetilde{\underline{u}}^{n+1}\right) + O\left(\left|\widetilde{\underline{u}}^{\tilde{n}} - \widetilde{\underline{u}}^{n+1}\right|^2\right)\right) \\ &\overset{(3.65)}{=} \underline{u}^n - \Delta t \widetilde{\underline{G}}^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{2}\partial_x\left(\frac{dg}{d\underline{u}}(\widetilde{\underline{u}}^{n+1})\widetilde{\underline{G}}^{n+1}\right) + O\left(\Delta t^3\right) \\ &\overset{(3.64)}{=} \underline{u}(t^{n+1}) + O\left(\Delta t^3\right). \qquad (3.69)\end{aligned}$$

Nutzen wir $\underline{G}^i = \partial_x \underline{g}(\underline{u}^i)$ so ergibt sich mit dem erste Ordnung impliziten Zeitschrittverfahren $(3.62)_2$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\underline{u}^{\widetilde{n+1}} &= \underline{u}^n - \Delta t \underline{G}^{\widetilde{n+1}} \\ &= u(t^{n+1}) + O\left(\Delta t^2\right). \qquad (3.70)\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gleichung (3.69) folgt

$$\underline{u}^{\widetilde{n+1}} = \widetilde{\underline{u}}^{n+1} + O\left(\Delta t^2\right). \qquad (3.71)$$

Hierdurch erhalten wir mit

$$\underline{u}^{\tilde{n}} = \underline{u}^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{G}^{\tilde{n}} - \underline{G}^{\widetilde{n+1}}\right)$$

wegen

$$\begin{aligned}
\underline{u}^{\tilde{n}} - \underline{\widetilde{u}}^{\tilde{n}} &= -\frac{\Delta t}{2}\left(\underline{G}^{\tilde{n}} - \underline{G}^{\widetilde{n+1}} - \underline{\widetilde{G}}^{\tilde{n}} + \underline{\widetilde{G}}^{n+1}\right)\\
&\overset{(3.71)}{=} -\frac{\Delta t}{2}\left(\underline{G}^{\tilde{n}} - \underline{\widetilde{G}}^{\tilde{n}}\right) + O\left(\Delta t^3\right)\\
&= -\frac{\Delta t}{2}\left(O\left(\underline{u}^{\tilde{n}} - \underline{\widetilde{u}}^{\tilde{n}}\right)\right) + O\left(\Delta t^3\right)
\end{aligned}$$

die Darstellung

$$\underline{u}^{\tilde{n}} - \underline{\widetilde{u}}^{\tilde{n}} = O\left(\Delta t^3\right).$$

Abschließend ergibt sich

$$\begin{aligned}
\underline{u}^{n+1} - \underline{\widetilde{u}}^{n+1} &= \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{G}^{\tilde{n}} + \underline{G}^{n+1} - \underline{\widetilde{G}}^{\tilde{n}} - \underline{\widetilde{G}}^{n+1}\right)\\
&= \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{G}^{n+1} - \underline{\widetilde{G}}^{n+1}\right) + O\left(\Delta t^4\right) \qquad (3.72)\\
&= \frac{\Delta t}{2}\left(O\left(\underline{u}^{n+1} - \underline{\widetilde{u}}^{n+1}\right)\right) + O\left(\Delta t^4\right),
\end{aligned}$$

wodurch

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{\widetilde{u}}^{n+1} + O\left(\Delta t^4\right) = \underline{u}(t^{n+1}) + O\left(\Delta t^3\right) \qquad (3.73)$$

folgt. □

Im Gegensatz zu einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren kann aufgrund der starken Kopplung der Gleichungen (3.65) und (3.66) keine sukzessive Berechnung der Einzelschritte vorgenommen werden. Hier liegt die Notwendigkeit des diskutierten Zeitschrittverfahrens begründet. Zudem zeigen die Gleichungen (3.72) und (3.73), daß bereits eine Approximation an $\underline{G}^{n+1}$ von der Ordnung $O(\Delta t^2)$ ausreicht, um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen. Daher kann $\underline{G}^{n+1}$ beispielsweise aufgrund der Gleichung (3.70) durch $\underline{G}^{\widetilde{n+1}}$ ersetzt werden.

Für die Euler-Gleichungen verwenden wir zusammenfassend das Zeitintegrationsverfahren in der Form

$$\begin{aligned}
\underline{u}^{\widetilde{n+1}}(x) &= \underline{u}^n(x) - \Delta t \underline{H}(\underline{u}^n(x)) - \Delta t \underline{A}^{\widetilde{n+1}}(x),\\
\underline{u}^{\tilde{n}}(x) &= \underline{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{A}^{\tilde{n}}(x) - \underline{A}^{\widetilde{n+1}}(x)\right), \qquad (3.74)\\
\underline{u}^{n+1}(x) &= \underline{u}^n(x) - \Delta t \underline{H}(\underline{u}^n(x)) - \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{A}^{\tilde{n}}(x) + \underline{A}^{n+1}(x)\right),
\end{aligned}$$

wobei stets $\underline{A}^s(x) = \underline{A}(\underline{u}^s(x)) = \partial_x \underline{\widetilde{a}}(\underline{u}^s(x))$ gilt und mit $\underline{H}(\underline{u}^n(x))$ das bereits in Abschnitt 3.3.1 hergeleitete Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit für das homogene System bezeichnet wird.

Unter Ausnutzung der zum Abschluß des Abschnitts 3.2.2 angegebenen Variationsmöglichkeiten schreiben wir

$$\underline{\overline{a}}(\underline{u}^s) = \begin{pmatrix} \overline{a}_\rho(\underline{u}^s) \\ \overline{a}_m(\underline{u}^s) \\ \overline{a}_{(\rho E)}(\underline{u}^s) \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

gemäß

$$\begin{aligned}
\overline{a}_\rho(\underline{u}^s) &= \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\partial_x p^s \\
\overline{a}_m(\underline{u}^s) &= -\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}p^s + (\gamma-1)\frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)p^s\partial_x v^s + \partial_x\left(p_{\mathrm{NL}}v\right)^s\right) \\
&\quad +\Delta t\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}v^s\partial_x p^s, \\
\overline{a}_{(\rho E)}(\underline{u}^s) &= -(\mathrm{M}^2-1)(pv)^s - (p_{\mathrm{NL}}v)^s \\
&\quad +\mathrm{M}^2(\gamma-1)\frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)p^s\partial_x v^s + \partial_x\left(p_{\mathrm{NL}}v\right)^s\right)v^s \\
&\quad +\frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}H^{*,s}\partial_x p^s \\
&\quad +\frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)\partial_x(pv)^s + \partial_x(p_{\mathrm{NL}}v)^s\right)v^s.
\end{aligned}$$

Für das Kontrollvolumen $\Omega_i = [x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}]$ erhalten wir unter Verwendung der Gleichung (3.41) die Darstellung

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i}\underline{A}(\underline{u}^s(x))\,dx &= \int_{\Omega_i}\partial_x\underline{\widetilde{a}}(\underline{u}^s(x))\,dx \\
&= \underline{\widetilde{a}}(\underline{u}^s(\widetilde{x}_{i+\frac{1}{2}})) - \underline{\widetilde{a}}(\underline{u}^s(\widetilde{x}_{i-\frac{1}{2}})) \\
&= \underline{\overline{a}}(\underline{u}^s(\widetilde{x}_{i+\frac{1}{2}})) - \underline{\overline{a}}(\underline{u}^s(\widetilde{x}_{i-\frac{1}{2}})) + O\left(\Delta t^2\right).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Wir fordern daher von der numerischen Flußfunktion $\underline{\mathcal{A}} : I\!R^4 \times I\!R^4 \to I\!R^4$ die Approximationsgüte

$$\underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) = \underline{\overline{a}}(\underline{u}^s(x_{i+\frac{1}{2}})) + O(\Delta x^2),$$

wodurch sich unter Verwendung des Zeitschrittverfahrens (3.74) ein Gesamtverfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit ergibt.

Für den Zellmittelwert φ_i der physikalischen Größe φ auf der Box Ω_i mit dem Schwerpunkt x_i gilt

$$\varphi_i = \varphi(x_i) + O(\Delta x^2),$$

womit

$$\varphi(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2} + O(\Delta x^2) \tag{3.77}$$

folgt. Desweitern werden die in $\underline{\overline{a}}$ auftretenden Ortsableitungen gemäß

$$(\phi\ \partial_x \varphi)\,(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x} \frac{\phi_{i+1} + \phi_i}{2} + O(\Delta x^2), \tag{3.78}$$

diskretisiert. Hiermit können wir die numerische Flußfunktion in der Form

$$\underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\rho(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) \\ \mathcal{A}_m(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) \\ \mathcal{A}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

mit

$$\mathcal{A}_\rho(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \frac{p_{i+1}^s - p_i^s}{\Delta x}, \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_m(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) \\ &\quad = -\frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \frac{p_{i+1}^s + p_i^s}{2} \\ &\qquad + \frac{\Delta t}{2}(\gamma - 1)\left((\mathrm{M}^2 - 1) \frac{v_{i+1}^s - v_i^s}{\Delta x} \frac{p_{i+1}^s + p_i^s}{2} + p_{\mathrm{NL}} \frac{v_{i+1}^s - v_i^s}{\Delta x} \right) \\ &\qquad + \Delta t \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\mathrm{M}^2} \frac{p_{i+1}^s - p_i^s}{\Delta x} \frac{v_{i+1}^s + v_i^s}{2} \end{aligned} \tag{3.81}$$

und

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^s, \underline{u}_{i+1}^s) \\
&\quad = \; -(\mathrm{M}^2-1)\frac{p_{i+1}^s v_{i+1}^s + p_i^s v_i^s}{2} - p_{\mathrm{NL}}\frac{v_{i+1}^s + v_i^s}{2} \\
&\qquad +\mathrm{M}^2\frac{\Delta t}{2}(\gamma-1)\Bigg((\mathrm{M}^2-1)\frac{v_{i+1}^s - v_i^s}{\Delta x}\frac{p_{i+1}^s v_{i+1}^s + p_i^s v_i^s}{2} \\
&\qquad\qquad + p_{\mathrm{NL}}\frac{v_{i+1}^s - v_i^s}{\Delta x}\frac{v_{i+1}^s + v_i^s}{2}\Bigg) \\
&\qquad +\frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\frac{p_{i+1}^s - p_i^s}{\Delta x}\frac{H_{i+1}^{*,s} + H_i^{*,s}}{2} \\
&\qquad +\frac{\Delta t}{2}\left((\mathrm{M}^2-1)\frac{p_{i+1}^s v_{i+1}^s - p_i^s v_i^s}{\Delta x} + p_{\mathrm{NL}}\frac{v_{i+1}^s - v_i^s}{\Delta x}\right)\frac{v_{i+1}^s + v_i^s}{2}
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

zusammenfassen. Die Verwendung der Darstellung (3.76) innerhalb der Gleichung (3.41) ermöglicht eine vollständige Berechnung der zeitlichen Variation der Zellmittelwerte auf der Basis des Zeitschrittverfahrens (3.74) durch Nutzung der Approximationen (3.80), (3.81) und (3.82) in Kombination mit einer einfachen Linearisierung der implizit gegebenen asymptotischen Flußfunktionen und einer anschließenden iterativen Lösung der resultierenden linearen Gleichungssysteme. Diese Vorgehensweise berücksichtigt zwar die unterschiedlichen Informationsausbreitungsgeschwindigkeiten vernachlässigt jedoch die aus der asymptotischen Analyse gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Eigenschaften des Drucks. Wir werden daher eine Diskretisierung der asymptotischen Flußanteile innerhalb der Gleichung (3.61) auf der Basis der numerischen Flußfunktion (3.79) derart durchführen, daß sowohl die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten berücksichtigt als auch die Resultate der asymptotischen Mehrskalenanalyse einbezogen werden. Hierzu zerlegen wir den Druckterm in qualitativer Übereinstimmung mit der asymptotischen Druckentwicklung in der Form $p = p^{(0)} + \mathrm{M}p^{(1)} + \mathrm{M}^2 p^{(2)}$. Anschließend nehmen wir eine gezielte Berechnung des führenden Druckterms $p^{(0)}$ und des langwelligen Druckanteils $p^{(1)}$ auf der Grundlage einer Druckkorrekturgleichung respektive einer Wellengleichung vor. Einsetzen der Druckzerlegung in die Energiegleichung liefert unter Verwendung der ermittelten Druckterme $p^{(0),s}$ und $p^{(1),s}$ ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung des Druckanteils $p^{(2),s}$ bei der jedoch weitere physikalische Größen zum Zeitpunkt t^s benötigt werden. Wir führen daher eine Fixpunktiteration durch, bei der zunächst $p^{(2),s,\nu}$ auf der Grundlage bekannter Werte ermittelt und anschließend zur Korrektur der homogenen Flüsse gemäß der asymptotischen Flußanteile verwendet wird. Die hierdurch erzielte Variation aller physikalischer Größen nutzen wir daraufhin zur Modifikation des linearen Gleichungssystems, wodurch eine verbesserte Berechnung des hochfrequenten Druckanteils erzielt wird. In den folgenden Abschnitten geben wir eine exakte Beschreibung aller hier im Sinne der Verständlichkeit des Gesamtkontextes bereits im Vorfeld kurz erläuterten Vorgehensweise.

3.3.2.1 Druckzerlegung

Um die aus der asymptotischen Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen gewonnenen Resultate innerhalb der im numerischen Verfahren implizit diskretisierten asymptotischen Anteile nutzen zu können, nehmen wir eine Zerlegung des Drucks p in der Form

$$p = p^{(0)} + \mathrm{M} p^{(1)} + \mathrm{M}^2 p^{(2)} \tag{3.83}$$

vor, so daß im Gegensatz zur durchgeführten theoretischen Analyse kein Restterm der Größenordnung $o\left(\mathrm{M}^2\right)$ auftritt und folglich keine exakte Übereinstimmung der auftretenden Druckterme mit denen im Bereich der Mehrskalenanaylse genutzten asymptotischen Funktionen vorliegt. Die Wirkung der Zerlegung liegt auch nicht in einer quantitativen Identität begründet, sondern beruht auf einem qualitativ gleichen Verhalten der auftretenden Druckterme. Basierend auf den Ergebnissen der asymptotischen Analyse fordern wir somit für einen hinreichend kleinen Entwicklungsparameter M einen räumlich konstanten Druckterm $p^{(0)}$. Zudem setzen wir voraus, daß $p^{(1)}$ die langwelligen akustischen Phänomene der Strömung repräsentiert und $p^{(2)}$ die hochfrequenten Restanteile beinhaltet. Analog zum asymptotischen Mehrskalenansatz gelte desweiteren

$$p = p^{(0)} + o\left(1\right), \quad \mathrm{M} \to 0 \tag{3.84}$$

sowie

$$p = p^{(0)} + \mathrm{M} p^{(1)} + o\left(\mathrm{M}\right), \quad \mathrm{M} \to 0, \tag{3.85}$$

wodurch sich die Bedingungen

$$p^{(i)} = o\left(\mathrm{M}^{-1}\right), \quad \mathrm{M} \to 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.86}$$

ergeben.

Auf die genauen Berechnungsvorschriften der einzelnen Druckkomponenten $p^{(i)}$ werden wir erst im Kapitel 4 eingehen, da sie mit der Bestimmung des Entwicklungsparameters M einhergehen.

3.3.2.2 Evolution des führenden Druckterms

Gemäß der asymptotischen Mehrskalenanalyse wird die Evolution des führenden Druckterms $p^{(0)}$ durch die Druckkompressionsgleichung

$$\frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{dp^{(0)}}{dt} = - \int_{\partial\Omega} v^{(0)} \cdot n \; ds \tag{3.87}$$

beschrieben, wobei n die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ darstellt. Hierdurch wird deutlich, daß die zeitliche Entwicklung des Drucks $p^{(0)}$ durch Expansion respektive Kompression über den Rand des Strömungsgebietes festgelegt ist und folglich durch die Vorgabe der Randbedingungen bestimmt wird. Bei periodischen Rändern oder undurchlässigen Wänden verschwindet die rechte Seite der Gleichung (3.87) identisch und wir erhalten einen zeitlich invarianten Druckterm $p^{(0)}$.

3.3.2.3 System der langwelligen Akustik

Die zeitliche Entwicklung des langwelligen akustischen Druckterms $p^{(1)}$ ist der zugrundeliegenden asymptotischen Analyse [5, 10, 11] folgend durch eine Wellengleichung festgelegt. Diese Differentialgleichung läßt sich als System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

$$\partial_t \underline{w} + \partial_x \underline{g}(\underline{w}) = \underline{0} \tag{3.88}$$

mit

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{m} \\ p^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{g}(\underline{w}) = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ (c^{(0)})^2 \overline{m} \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei

$$c^{(0)} = \sqrt{\gamma p^{(0)} / \rho_\Omega},$$

und

$$\rho_\Omega(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho(x,t) \; dx$$

gilt. Hierbei beschreiben $(p^{(1)}, \overline{m})$ den rein langwelligen Anteil der Drucks, beziehungsweise des Impulses. Für die Bestimmung der langwelligen Anteile verweisen wir auf Kapitel 4, in dem der diskrete Zerlegungsoperator der physikalischen Variablen in ihre einzelnen Komponenten beschrieben wird. Desweiteren repräsentiert $p^{(0)}$ den führenden Druckterm.

Aus der quasilinearen Form des Systems (3.88) läßt sich direkt ablesen, daß das System

$$\partial_t \underline{w} + \frac{1}{\mathrm{M}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (c^{(0)})^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \underline{w} = \underline{0} \tag{3.89}$$

hyperbolisch ist und die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{c^{(0)}}{M}$$

aufweist. Somit ergibt sich im Fall $M \ll 1$ eine sehr schnelle Informationsausbreitung, die zu einer starken Restriktion der Zeitschrittweite aufgrund der CFL-Bedingung führt. Dieser Zeitschritt liegt für kleine Werte des Entwicklungsparamters M weit unterhalb der zulässigen Zeitschrittweite des verwendeten Verfahrens zur Lösung des homogenen Systems, so daß zum Beispiel die large time step method von LeVeque [8], ein Mehrgitterverfahren oder eine implizite Methode genutzt werden sollte. Wir werden uns im folgenden auf den impliziten Ansatz konzentrieren. Analog zu der im Abschnitt 3.2.1 vorgestellten charakteristischen Analyse der modifizierten Euler-Gleichungen betrachten wir zur Berechnung der charakteristischen Variablen des Systems (3.88) die in Gleichung (3.89) auftretende Funktionalmatrix in einer lokal linearisierten Form. In dem vorliegenden Fall betrachten wir daher $c^{(0)}$ innerhalb der charakteristischen Analyse als zeitlich konstant. Die zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2}$ gehörenden Eigenvektoren lauten

$$\underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c^{(0)} \end{pmatrix} \text{ und } \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Fassen wir die Eigenvektoren in der Matrix

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c^{(0)} & -c^{(0)} \end{pmatrix}$$

zusammen, so ergibt sich mit

$$\underline{\underline{R}}^{-1} = \frac{1}{2c^{(0)}} \begin{pmatrix} c^{(0)} & 1 \\ c^{(0)} & -1 \end{pmatrix}$$

die charakteristische Form des Systems gemäß

$$\partial_t \underline{\widetilde{w}} + \begin{pmatrix} \frac{c^{(0)}}{\mathrm{M}} & 0 \\ 0 & -\frac{c^{(0)}}{\mathrm{M}} \end{pmatrix} \partial_t \underline{\widetilde{w}}. \tag{3.90}$$

Hierbei lautet der Vektor der charakteristischen Variablen

$$\underline{\widetilde{w}} = \begin{pmatrix} \widetilde{w}_1 \\ \widetilde{w}_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{w} = \begin{pmatrix} \overline{m} + \dfrac{1}{c^{(0)}} p^{(1)} \\ \overline{m} - \dfrac{1}{c^{(0)}} p^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Analog zu den Euler-Gleichungen betrachten wir schwache Lösungen des Systems (3.88). Unter Verwendung des Zellmittelwertes

$$\underline{w}_i(t) = \left(\mathcal{M}_{\Omega_i} \underline{w}\right)(t)$$

auf dem Kontrollvolumen Ω_i läßt sich das numerische Verfahren durch Einführung einer numerischen Flußfunktion $\mathcal{A}^{(1)}$ in der Form

$$\frac{d}{dt} \underline{w}_i(t) = -\frac{1}{|\Omega_i|} \left\{ \mathcal{A}^{(1)}(\underline{w}_i(t), \underline{w}_{i+1}(t)) - \mathcal{A}^{(1)}(\underline{w}_{i-1}(t), \underline{w}_i(t)) \right\}$$

schreiben. Integrieren wir die Gleichung über das Zeitintervall $[t^n, t^{n+1}]$, so ergibt sich mittels des linearen Einschrittverfahrens

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} h(t)\, dt = \frac{\Delta t}{2} \Big(h(t^{n+1}) + h(t^n) \Big) + O\left(\Delta t^3\right)$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} \underline{w}_i^{n+1} - \underline{w}_i^n \;&=\; -\frac{\Delta t}{2\Delta x} \Big\{ \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i^{n+1}, \underline{w}_{i+1}^{n+1}\right) - \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_{i-1}^{n+1}, \underline{w}_i^{n+1}\right) \\ &\qquad + \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i^{n}, \underline{w}_{i+1}^{n}\right) - \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_{i-1}^{n}, \underline{w}_i^{n}\right) \Big\} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Für jede Kontrollvolumensgrenze, die sich im Inneren des Intervalls Ω befindet, betrachten wir die Komponenten des in Gleichung (3.90) gegebenen Vektors $\underline{\widetilde{w}}$, die auch als Riemannsche Invarianten bezeichnet werden. Da die Größen $\widetilde{w}_i$ in der (x,t)-Ebene auf der Geraden mit der Steigung λ_i^{-1} konstant sind, ergibt sich der auf der gemeinsamen Grenze der Kontrollvolumina Ω_i und Ω_{i+1} vorliegende Wert $\underline{w}^* = \left(\overline{m}^*, p^{(1),*}\right)^T$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \overline{m}^* + \frac{1}{c^{(0)}}\, p^{(1),*} \;&=\; \overline{m}_i + \frac{1}{c^{(0)}}\, p_i^{(1)}, \\ \overline{m}^* - \frac{1}{c^{(0)}}\, p^{(1),*} \;&=\; \overline{m}_{i+1} - \frac{1}{c^{(0)}}\, p_{i+1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned} p^{(1),*} \;&=\; \frac{1}{2}\left(p_i^{(1)} + p_{i+1}^{(1)}\right) + \frac{c^{(0)}}{2}\left(\overline{m}_i - \overline{m}_{i+1}\right), \\ \overline{m}^* \;&=\; \frac{1}{2}\left(\overline{m}_i + \overline{m}_{i+1}\right) + \frac{1}{2c^{(0)}}\left(p_i^{(1)} - p_{i+1}^{(1)}\right). \end{aligned}$$

Hierdurch definieren wir die numerische Flußfunktion vermöge

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i, \underline{w}_{i+1}\right) \\
&= \underline{g}\left(\underline{w}^*\right) = \frac{1}{\mathrm{M}} \begin{pmatrix} p^{(1),*} \\ (c^{(0)})^2 \overline{m}^* \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{M}} \begin{pmatrix} c^{(0)}\left(w_{i,1} - w_{i+1,1}\right) + \left(w_{i,2} + w_{i+1,2}\right) \\ (c^{(0)})^2\left(w_{i,1} + w_{i+1,1}\right) + c^{(0)}\left(w_{i,2} - w_{i+1,2}\right) \end{pmatrix}. \qquad (3.92)
\end{aligned}
$$

Mit (3.91) liegt ein implizites Verfahren vor, so daß zur approximativen Ermittlung des numerischen Flusses zur Zeit t^{n+1} eine Linearisierung der Flußfunktion vorgenommen wird. Wir nutzen hierzu die Taylorentwicklung

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i^{n+1}, \underline{w}_{i+1}^{n+1}\right) \\
&= \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i^n, \underline{w}_{i+1}^n\right) + \frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i^n, \underline{w}_{i+1}^n\right)}{\partial \underline{w}_i} \underbrace{\left(\underline{w}_i^{n+1} - \underline{w}_i^n\right)}_{=:\Delta \underline{w}_i} \\
&\quad + \frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i^n, \underline{w}_{i+1}^n\right)}{\partial \underline{w}_{i+1}} \underbrace{\left(\underline{w}_{i+1}^{n+1} - \underline{w}_{i+1}^n\right)}_{=:\Delta \underline{w}_{i+1}} + O\left(\|\Delta \underline{w}_i\|^2\right) + O\left(\|\Delta \underline{w}_{i+1}\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Die auftretenden Funktionalmatrizen weisen die Gestalt

$$
\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i, \underline{w}_{i+1}\right)}{\partial \underline{w}_i} = \frac{1}{2\mathrm{M}} \begin{pmatrix} c^{(0)} & 1 \\ (c^{(0)})^2 & c^{(0)} \end{pmatrix}
$$

und

$$
\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_i, \underline{w}_{i+1}\right)}{\partial \underline{w}_{i+1}} = \frac{1}{2\mathrm{M}} \begin{pmatrix} -c^{(0)} & 1 \\ (c^{(0)})^2 & -c^{(0)} \end{pmatrix}
$$

auf.

3.3.2.3.1 Randbedingungen

Bei den Strömungsfeldern betrachten wir ausschließlich periodische Ränder. Somit können wir die Randflüsse gemäß

$$
\mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_N, \underline{w}_{N+1}\right) = \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_N, \underline{w}_1\right)
$$

und

$$
\mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_0, \underline{w}_1\right) = \mathcal{A}^{(1)}\left(\underline{w}_N, \underline{w}_1\right)
$$

definieren, wodurch sowohl die explizite Bestimmung der Flüsse als auch der zugehörigen Funktionalmatrizen analog zu den inneren Kontrollvolumensgrenzen verläuft.

3.3.2.3.2 Lineare Gleichungssystemlöser

Die Diskretisierung des Systems der langwelligen Akustik auf der Basis eines impliziten Zeitschrittverfahrens führt bei der beschriebenen Linearisierung der numerischen Flußfunktion auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der zeitlichen Veränderung des Druckterms $p^{(1)}$. Das Gleichungssystem weist im Kontext der gewählten Diskretisierung des Strömungsgebietes eine Block-Tridiagonalgestalt auf, wobei im Fall periodischer Randbedingungen zudem die Komponenten $A_{1,N}$ und $A_{N,1}$ von Null verschieden sind. Zur Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme stellen präkonditionierte Krylov-Unterraum-Verfahren ein effektives Mittel dar. Wir nutzen hierbei den von van der Vorst entwickelten BiCGSTAB-Algorithmus [16], wobei das lineare Gleichungssystem zunächst mittels einer unvollständigen LU-Zerlegung der Matrix $\underline{\underline{A}}$ geeignet vorkonditionert wird.

3.3.2.4 Die Energie–Poisson–Gleichung

Zur Evolution des hochfrequenten Druckanteils $p^{(2)}$ ersetzen wir innerhalb jeder Gleichung des Zeitintegrationsverfahrens (3.74) die auf der linken Seite auftretende Totalenergie pro Einheitsvolumen $(\rho E)^s$ unter Verwendung der Zustandsgleichung

$$(\rho E)^s = \frac{p^s}{\gamma - 1} + \frac{\mathrm{M}^2}{2}\rho^s (v^s)^2.$$

Einsetzen der Druckkomposition

$$p = p^{(0)} + \mathrm{M}p^{(1)} + \mathrm{M}^2 p^{(2)}$$

liefert für die Energiegleichung innerhalb $(3.74)_1$ unter Berücksichtigung der numerischen Flußfunktion $\mathcal{H}$ und $\mathcal{A}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^2 \frac{p_i^{(2),\widetilde{n+1}}}{\gamma - 1} \quad = \quad & (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0),\widetilde{n+1}}}{\gamma - 1} - \mathrm{M}\frac{p_i^{(1),\widetilde{n+1}}}{\gamma - 1} - \frac{\mathrm{M}^2}{2}\rho_i^{\widetilde{n+1}} \left(v_i^{\widetilde{n+1}}\right)^2 \\
& - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{\mathcal{H}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^n, \underline{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^n, \underline{u}_i^n)\Big\} \\
& - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{\mathcal{A}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1}}, \underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1}}) - \mathcal{A}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1}}, \underline{u}_i^{\widetilde{n+1}})\Big\}. \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

Auf der Basis der Druckkompressionsgleichung und der Wellengleichung können $p^{(0),n+1}$ und $p^{(1),n+1}$ bestimmt und als Approximation für den Hintergrundsdruck $p^{(0)}$ und $p^{(1)}$ innerhalb der Gleichungen $(3.74)_1$ und $(3.74)_3$

genutzt werden. Die Größe $\underline{u}^{\tilde{n}}$ stellt hingegen eine Variation von $\underline{u}^n$ auf dem Zeitniveau t^n dar, weshalb stets $p^{(0),\tilde{n}} = p^{(0),n}$ und $p^{(1),\tilde{n}} = p^{(1),n}$ verwendet wird. Desweiteren nutzen wir zur Initialisierung der innerhalb der Fixpunktiteration benötigten Variablen die zur Verfügung stehende Approximation des homogenen Systems gemäß

$$v^{\widetilde{n+1},0} = v_h^{n+1}, H^{*,\widetilde{n+1},0} = H_h^{*,n+1} \text{ und } \rho^{\widetilde{n+1},0} = \rho_h^{n+1}.$$

für $(3.74)_1$, sowie

$$v^{\tilde{n},0} = v^n, H^{*,\tilde{n},0} = H^{*,n} \text{ und } \rho^{\tilde{n},0} = \rho^n$$

für $(3.74)_2$ und

$$v^{n+1,0} = v^{\widetilde{n+1}}, H^{*,n+1,0} = H^{*,\widetilde{n+1}} \text{ und } \rho^{n+1,0} = \rho^{\widetilde{n+1}}.$$

für $(3.74)_3$.

Betrachten wir die Gleichung $(3.74)_1$, dann erhalten wir für den asymptotischen Energieflußanteil gemäß (3.82) die Darstellung

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) \\
&= \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) \\
&\quad -(\mathrm{M}^2-1)\mathrm{M}^2 \frac{p_{i+1}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + p_i^{(2),\widetilde{n+1},\nu} v_i^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
&\quad +\mathrm{M}^4 \frac{\Delta t}{2}(\gamma-1)(\mathrm{M}^2-1) \frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} - v_i^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x} \frac{p_{i+1}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + p_i^{(2),\widetilde{n+1},\nu} v_i^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
&\quad +\frac{\Delta t}{2}(\mathrm{M}^2-1) \frac{p_{i+1}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} - p_i^{(2),\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x} \frac{H_{i+1}^{*,\widetilde{n+1},\nu} + H_i^{*,\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
&\quad +\frac{\Delta t}{2}(\mathrm{M}^2-1)\mathrm{M}^2 \frac{p_{i+1}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} - p_i^{(2),\widetilde{n+1},\nu} v_i^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x} \frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + v_i^{\widetilde{n+1},\nu}}{2}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

mit

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) \\
= \quad & -(\mathrm{M}^2-1)\frac{\left(p_{i+1}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i+1}^{(1),n+1}\right) v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
& -(\mathrm{M}^2-1)\frac{\left(p_{i}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i}^{(1),n+1}\right) v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} - p_{\mathrm{NL}}\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
& +\frac{\Delta t}{2}\mathrm{M}^2(\mathrm{M}^2-1)(\gamma-1)\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} - v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x}\frac{p_{i+1}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i+1}^{(1),n+1}}{2}v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} \\
& +\frac{\Delta t}{2}\mathrm{M}^2(\mathrm{M}^2-1)(\gamma-1)\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} - v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x}\frac{p_{i}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i}^{(1),n+1}}{2}v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu} \\
& +\frac{\Delta t}{2}\mathrm{M}^2(\gamma-1)p_{\mathrm{NL}}\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} - v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x}\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
& +\frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\frac{p_{i+1}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i+1}^{(1),n+1}}{\Delta x}\frac{H_{i+1}^{*,\widetilde{n+1},\nu} + H_{i}^{*,\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
& -\frac{\Delta t}{2}\frac{\mathrm{M}^2-1}{\mathrm{M}^2}\frac{p_{i}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i}^{(1),n+1}}{\Delta x}\frac{H_{i+1}^{*,\widetilde{n+1},\nu} + H_{i}^{*,\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
& +\frac{\Delta t}{2}(\mathrm{M}^2-1)\frac{(p_{i+1}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i+1}^{(1),n+1})v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x}\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
& -\frac{\Delta t}{2}(\mathrm{M}^2-1)\frac{(p_{i}^{(0),n+1} + \mathrm{M}p_{i}^{(1),n+1})v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x}\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{2} \\
& +\frac{\Delta t}{2}p_{\mathrm{NL}}\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} - v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x}\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + v_{i}^{\widetilde{n+1},\nu}}{2}.
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

Folglich ergibt sich zur Berechnung von $p_i^{(2),\widetilde{n+1},\nu}$, $i = 1, \ldots, N$ ein lineares Gleichungssystem der Form

$$
\underline{\underline{A}}^{\widetilde{n+1},\nu}\, \underline{p}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} = \underline{b}^{\widetilde{n+1},\nu} \text{ mit } \underline{p}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} = \begin{pmatrix} p_1^{(2),\widetilde{n+1},\nu} \\ \vdots \\ p_N^{(2),\widetilde{n+1},\nu} \end{pmatrix}. \tag{3.96}
$$

Eine Kombination der Gleichungen (3.93), (3.94) und (3.95) liefert

$$
\begin{aligned}
b_i^{\widetilde{n+1,\nu}} &= (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0),n+1}}{\gamma-1} - \mathrm{M}\frac{p_i^{(1),n+1}}{\gamma-1} - \frac{\mathrm{M}^2}{2}\rho_i^{\widetilde{n+1,\nu}}\left(v_i^{\widetilde{n+1,\nu}}\right)^2 \\
&\quad -\frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{\mathcal{H}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^n,\underline{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^n,\underline{u}_i^n)\Big\} \\
&\quad -\frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{\widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1,\nu}},\underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}}) - \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}},\underline{u}_i^{\widetilde{n+1,\nu}})\Big\}. \qquad (3.97)
\end{aligned}
$$

Für die nichtverschwindenen Matrixkomponenten erhalten wir unter Berücksichtigung von $|\Omega_i| = \Delta x$ die Darstellung

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}_{i,i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}} &= \frac{\Delta t(\mathrm{M}^2-1)}{2\Delta x}\Bigg\{\mathrm{M}^2 v_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}} + \Delta t\frac{H_i^{*,\widetilde{n+1,\nu}} + H_{i-1}^{*,\widetilde{n+1,\nu}}}{2\Delta x} \\
&\qquad + \Delta t\mathrm{M}^2\frac{v_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}}(v_i^{\widetilde{n+1,\nu}} + v_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}})}{2\Delta x} \\
&\qquad - \Delta t\mathrm{M}^4(\gamma-1)\frac{v_i^{\widetilde{n+1,\nu}} - v_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}}}{2\Delta x}v_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}}\Bigg\}, \\
\underline{\underline{A}}_{i,i}^{\widetilde{n+1,\nu}} &= \frac{\mathrm{M}^2}{\gamma-1} \\
&\quad + \frac{\Delta t^2(\mathrm{M}^2-1)}{4\Delta x^2}\Bigg\{\mathrm{M}^4(\gamma-1)\left(v_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}} - 2v_i^{\widetilde{n+1,\nu}} + v_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}}\right)v_i^{\widetilde{n+1,\nu}} \\
&\qquad - \left(H_{i+1}^{*,\widetilde{n+1,\nu}} + 2H_i^{*,\widetilde{n+1,\nu}} + H_{i-1}^{*,\widetilde{n+1,\nu}}\right) \\
&\qquad - \mathrm{M}^2 v_i^{\widetilde{n+1,\nu}}\left(v_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}} + 2v_i^{\widetilde{n+1,\nu}} + v_{i-1}^{\widetilde{n+1,\nu}}\right)\Bigg\}, \\
\underline{\underline{A}}_{i,i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}} &= \frac{\Delta t(\mathrm{M}^2-1)}{2\Delta x}\Bigg\{-\mathrm{M}^2 v_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}} + \Delta t\frac{H_{i+1}^{*,\widetilde{n+1,\nu}} + H_i^{*,\widetilde{n+1,\nu}}}{2\Delta x} \\
&\qquad + \Delta t\mathrm{M}^2\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}}(v_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}} + v_i^{\widetilde{n+1,\nu}})}{2\Delta x} \\
&\qquad + \Delta t\mathrm{M}^4(\gamma-1)\frac{v_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}} - v_i^{\widetilde{n+1,\nu}}}{2\Delta x}v_{i+1}^{\widetilde{n+1,\nu}}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Die Verwendung des ermittelten hochfrequenten Druckterms $p^{(2),\widetilde{n+1,\nu}}$

ermöglicht eine vollständige Bestimmung der asymptotischen Korrekturanteile. Hiermit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu+1} &= \underline{u}_i^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{\underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_i^n,\underline{u}_{i+1}^n) - \underline{\mathcal{H}}(\underline{u}_{i-1}^n,\underline{u}_i^n)\Big\} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{|\Omega_i|}\Big\{\underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu},\underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) - \underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu},\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu})\Big\}. \qquad (3.98)
\end{aligned}
$$

Diese Vorgehensweise liefert eine Folge von Druckanteilen $\{p^{(2),\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$ durch die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.96) sowie Folgen $\{\rho^{\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$, $\{m^{\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$ und $\{(\rho E)^{\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$ durch die iterative Flußkorrektur (3.98). Als Abbruchkriterium für die Iteration verwenden wir die diskrete L_1-Norm der Flußkorrekturänderung mittels

$$
\begin{aligned}
\Bigg\| \frac{\Delta t}{|\Omega|}\sum_{i=1}^{N}\Big|\underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu},\underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) - \underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu},\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}) \\
- \Big(\underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu-1},\underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu-1}) - \underline{\mathcal{A}}(\underline{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu-1},\underline{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu-1})\Big)\Big|\Bigg\|_\infty < \varepsilon
\end{aligned}
\qquad (3.99)
$$

mit einer extern vorgegebenen Genauigkeitsschranke ε. Zur Lösung des auftretenen linearen Gleichungssystems wird analog zum System der langwelligen Akustik eine ILU-Vorkonditionierung in Kombination mit einem BiCGSTAB-Verfahren verwendet.

Analog verfahren wir für die zwei verbleibenden Gleichungen $(3.74)_2$ und $(3.74)_3$, wodurch stets ein Gleichungssystem

$$
\underline{\underline{A}}^{\tilde{n},\nu}\,\underline{p}^{(2),\tilde{n},\nu} = \underline{b}^{\tilde{n},\nu} \qquad (3.100)
$$

respektive

$$
\underline{\underline{A}}^{n+1,\nu}\,\underline{p}^{(2),n+1,\nu} = \underline{b}^{n+1,\nu} \qquad (3.101)
$$

gelöst werden muß, bei dem die jeweils auftretende Matrix eine zu $\underline{\underline{A}}^{\widetilde{n+1},\nu}$ äquivalente Struktur aufweist und die Komponenten der entsprechenden rechten Seite die Darstellung

$$
\begin{aligned}
b_i^{\tilde{n},\nu} &= (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0),n}}{\gamma-1} - \mathrm{M}\frac{p_i^{(1),n}}{\gamma-1} - \frac{\mathrm{M}^2}{2}\rho_i^{\tilde{n},\nu}\left(v_i^{\tilde{n},\nu}\right)^2 \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\Big\{\widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\tilde{n},\nu},\underline{u}_{i+1}^{\tilde{n},\nu}) - \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^{\tilde{n},\nu},\underline{u}_i^{\tilde{n},\nu}) \\
&\quad - \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\widetilde{n+1}},\underline{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1}}) + \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1}},\underline{u}_i^{\widetilde{n+1}})\Big\} \qquad (3.102)
\end{aligned}
$$

beziehungsweise

$$
\begin{aligned}
b_i^{n+1,\nu} \;=\;& (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0),n+1}}{\gamma-1} - \mathrm{M}\frac{p_i^{(1),n+1}}{\gamma-1} - \frac{\mathrm{M}^2}{2}\rho_i^{n+1,\nu}\left(v_i^{n+1,\nu}\right)^2 \\
& -\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big\{\mathcal{H}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^n,\underline{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^n,\underline{u}_i^n)\Big\} \\
& -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\Big\{\widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{n+1,\nu},\underline{u}_{i+1}^{n+1,\nu}) - \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^{n+1,\nu},\underline{u}_i^{n+1,\nu}) \\
& \qquad + \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_i^{\tilde{n}},\underline{u}_{i+1}^{\tilde{n}}) - \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\underline{u}_{i-1}^{\tilde{n}},\underline{u}_i^{\tilde{n}})\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

besitzen.

Entsprechend der Vorschrift (3.98) zur iterativen Lösung der Gleichung $(3.74)_1$ wird auch für die Gleichungen $(3.74)_2$ und $(3.74)_3$ eine deratige Iteration durchgeführt und der Iterationsabbruch jeweils analog zu (3.99) vorgenommen.

3.3.3 Exakte Projektion im Fall sehr kleiner Entwicklungsparameter

Die in Abschnitt 3.3.2 gewählten Operatoren zur Diskretisierung der Ortsableitungen sind so gewählt, daß für den Grenzfall $\mathrm{M} \to 0$ bei verschwindener Kompression von außen keine exakte Projektion des Geschwindigkeitsfeldes auf ihren divergenzfreien Anteil vorliegt. Dies ist zum einen darin begründet, daß sich die Diskretisierung der zweiten Ableitungen innerhalb des Poissonproblems nicht als Hintereinanderausführung des verwendeten Divergenzoperators auf den Gradientoperator darstellen lassen. Zum anderen macht die Verwendung des Godunov-type-Verfahrens zur Berechnung der Flüsse des homogenen Systems bei der Bestimmung von $p^{(2)}$ eine exakte Projektion unmöglich.

Wir verwenden eine inkompressible Modellgleichung, um den Sachverhalt der diskreten Operatorwahl zu verdeutlichen,

$$
\begin{aligned}
\underline{w}_t + \underline{w}\cdot\nabla\underline{w} &= \nabla\phi, \\
\nabla\cdot\underline{w} &= 0.
\end{aligned}
$$

Es sei $\underline{w} = (v_1, v_2, v_3)^T$ der Geschwindigkeitsvektor und ϕ eine skalare Funktion mit $\phi = \frac{p}{\rho}$, wobei die Dichte ρ als konstant gegeben vorliegt. Die Zeitableitung wird wie folgt diskretisiert,

$$
\underline{w}^{n+1} = \underline{w}^n - \Delta t\,(\underline{w}\cdot\nabla_g\underline{w} - \nabla_g\phi)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3).
$$

Dabei bezeichne $\nabla_g(\cdot)$ den diskreten Gradientoperator und der diskrete Divergenzoperator wird im folgenden mit $\nabla_d \cdot (\cdot)$ bezeichnet.

Um sicher zu stellen, daß die berechnete Geschwindigkeit zum Zeitschritt $n+1$ die Divergenzbedingung

$$\nabla_d \cdot \underline{w}^{n+1} = 0$$

unter der Voraussetzung $\nabla_d \cdot \underline{w}^n = 0$ erfüllt, wird $\nabla_g \phi^{n+\frac{1}{2}}$ über ein Poissonproblem

$$\Delta\phi^{n+\frac{1}{2}} = \nabla_d \cdot \left(\nabla_g \phi^{n+\frac{1}{2}}\right) = \nabla_d \cdot (\underline{w} \cdot \nabla_g \underline{w})^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.104}$$

bestimmt. Dann gilt,

$$\nabla_d \cdot \underline{w}^{n+1} = \nabla_d \cdot \underline{w}^n - \Delta t \nabla_d \cdot (\underline{w} \cdot \nabla_g \underline{w} - \nabla_g \phi)^{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Werden die Diskretisierungen für den Divergenzoperator $\nabla_d \cdot (\cdot)$ und den Gradientoperator $\nabla_g(\cdot)$ nicht konsistent zur Wahl des diskreten Laplaceoperators in (3.104) gewählt, so liegt keine exakte Projektion vor und im Falle der kompakten Diskretisierungen aus 3.3.2 gilt bestenfalls

$$\nabla_d \cdot \underline{w}^{n+1} = O(\Delta t \Delta x^2) = O(\Delta x^3).$$

Im folgenden beschreiben wir eine Vorgehensweise, bei der im Fall $\mathrm{M} \to 0$ eine exakte Projektion der Geschwindigkeit auf ihren divergenzfreien Anteil vorliegt, falls keine Kompression über den Rand des Gebietes erfolgt. Im Fall $\mathrm{M} \neq 0$ liefert die diskrete Projektion Exaktheit im Sinne einer Projektion auf ein Geschwindigkeitsfeld mit vorgeschriebener Divergenz.

Die Idee, gleichzeitig die Godunovflüsse des homogenen Systems nutzen zu können und insbesondere im Fall $\mathrm{M} \ll 1$ diskret eine exakte Projektion zu realisieren, beruht auf der Tatsache, daß wir im nahezu inkompressiblen Fall nicht auf die bisher verwendete Ortsdiskretisierung zur Herleitung des Poissonproblems angewiesen sind [13].

Wir werden das im Abschnitt 3.3.2 beschriebene Verfahren nutzen, um die Evolution eines Zeitschrittes auszuführen. Liegt der Wert des Entwicklungsparameters M oberhalb eines zu wählenden Schwellenwertes, so ist keine exakte Projektion nötig und die Berechnung des Zeitschrittes abgeschlossen. Erst für Werte von M unterhalb des Schwellenwertes müssen die Impulse eine weitere Korrektur erfahren, damit eine exakte Projektion gewährleistet wird.

Wir ändern die Notation des vollständig impliziten Ansatzes wie folgt ab,

$$\begin{aligned}\underline{w}^{\widetilde{n+1}}(x) &= \underline{u}^n(x) - \Delta t \underline{H}(\underline{u}^n(x)) - \Delta t \underline{A}^{\widetilde{n+1}}(x),\\ \underline{u}^{\tilde{n}}(x) &= \underline{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{A}^{\tilde{n}}(x) - \underline{A}^{\widetilde{n+1}}(x)\right),\\ \underline{u}^{n+1,*}(x) &= \underline{u}^n(x) - \Delta t \underline{H}(\underline{u}^n(x)) - \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{A}^{\tilde{n}}(x) + \underline{A}^{n+1,*}(x)\right),\end{aligned}$$

mit

$$\rho^{n+1} = \rho^{n+1,*} \qquad \text{und} \qquad (\rho E)^{n+1} = (\rho E)^{n+1,*}.$$

Für die Impulse setzen wir zunächst

$$m^{**} = m^{n+1,*} - \frac{\Delta t}{2}(\mathrm{M}^2 - 1)\nabla p^{(2),n+1,*},$$

und schließlich

$$m^{n+1} = m^{**} + \frac{\Delta t}{2}(\mathrm{M}^2 - 1)\nabla p^{(2),n+1}. \tag{3.105}$$

Um die Impulse zum neuen Zeitschritt berechnen zu können, müssen wir erneut $p^{(2)}$ über die Lösung eines Poissonproblems bestimmen. Wir wählen dazu eine Diskretisierung der Energiegleichung $(\rho E)_t + (\rho H v)_x = 0$ der Form

$$\begin{aligned}(\rho E)^{n+1} - (\rho E)^n &= -\frac{\Delta t}{2}\left(\nabla(\rho H v)^{n+1} + \nabla(\rho H v)^n\right)\\ &\overset{(3.105)}{=} -\frac{\Delta t}{2}\left(\nabla\Big(H^{n+1}\big(m^{**} + \frac{\Delta t}{2}(\mathrm{M}^2-1)\nabla p^{(2),n+1}\big)\Big)\right)\\ &\quad -\frac{\Delta t}{2}\nabla(\rho H v)^n.\end{aligned} \tag{3.106}$$

In Gleichung (3.106) sind alle Variablen bis auf $p^{(2),n+1}$ bekannt. Trotzdem muß $(\rho E)^{n+1}$ über die Zustandsgleichung durch

$$(\rho E)^{n+1} = \frac{1}{\gamma - 1}(p^{(0)} + \mathrm{M}p^{(1)} + \mathrm{M}^2 p^{(2)})^{n+1} + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\frac{(m^2)^{n+1,*}}{\rho^{n+1}}$$

ersetzt werden, um zu einem stabilen Verfahren zu gelangen. Dabei ist es unerheblich, daß in der kinetischen Energie die Impulse durch die mit * gekennzeichneten Zwischenlösung approximiert wurden, da ihr Einfluß für $\mathrm{M} \to 0$ verschwindet. Da die Ableitungsoperatoren konsistent gewählt werden müssen, werden die in (3.106) auftretenen Ortsableitungen wie folgt diskretisiert,

$$(\phi\, \partial_x \varphi)(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\varphi_{i+2} + \varphi_{i+1} - \varphi_i - \varphi_{i-1}}{4\Delta x}\frac{\phi_{i+1} + \phi_i}{2} + O(\Delta x^2). \tag{3.107}$$

Die vollständig diskretisierte Form der Energiegleichung lautet somit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma-1}(p^{(0)}+\mathrm{M}p^{(1)}+\mathrm{M}^2p^{(2)})_i^{n+1}+\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\frac{(m_i^2)^{n+1,*}}{\rho_i^{n+1}}-(\rho E)_i^n \\
&= -\frac{\Delta t}{4\Delta x}\Big(\big(H^{n+1}m^{**}\big)_{i+1}-\big(H^{n+1}m^{**}\big)_{i-1}\Big) \\
&\quad -\frac{\Delta t}{4\Delta x}\Big(\big(\rho H v\big)_{i+1}^n-\big(\rho H v\big)_{i-1}^n\Big) \\
&\quad -\frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\bigg\{\Big(H_{i+1}^{n+1}+H_i^{n+1}\Big)\Big(p_{i+2}^{(2)}+p_{i+1}^{(2)}-p_i^{(2)}-p_{i-1}^{(2)}\Big)^{n+1} \\
&\qquad -\Big(H_i^{n+1}+H_{i-1}^{n+1}\Big)\Big(p_{i+1}^{(2)}+p_i^{(2)}-p_{i-1}^{(2)}-p_{i-2}^{(2)}\Big)^{n+1}\bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Hieraus erhalten wir ein Gleichungssystem zur Bestimmung von $p^{(2),n+1}$,

$$\underline{\underline{A}}^{n+1}\,\underline{p}^{(2),n+1}=\underline{b}^{n+1} \text{ mit } \underline{p}^{(2),n+1}=\begin{pmatrix} p_1^{(2),n+1} \\ \vdots \\ p_N^{(2),n+1}\end{pmatrix}$$

und Einträgen im Vektor der rechten Seite

$$\begin{aligned}
\underline{b}_i^{n+1} &= (\rho E)_i^n-\frac{1}{\gamma-1}(p^{(0)}+\mathrm{M}p^{(1)})_i^{n+1}-\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\frac{(m_i^2)^{n+1,*}}{\rho_i^{n+1}} \\
&\quad -\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(H_{i+1}^{n+1}m_{i+1}^{**}-H_{i-1}^{n+1}m_{i-1}^{**}\right) \\
&\quad -\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left((\rho H v)_{i+1}^n-(\rho H v)_{i-1}^n\right).
\end{aligned}$$

Die Matrix stellt eine schwach gekoppelte Bandmatrix dar, deren nicht verschwindenen Matrixkomponenten sich wie folgt berechnen,

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}_{i,i-2}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_i^{n+1}+H_{i-1}^{n+1}\Big), \\
\underline{\underline{A}}_{i,i-1}^{n+1} &= -\frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1}-H_{i-1}^{n+1}\Big), \\
\underline{\underline{A}}_{i,i}^{n+1} &= \frac{\mathrm{M}^2}{\gamma-1}-\frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1}+2H_i^{n+1}+H_{i-1}^{n+1}\Big), \\
\underline{\underline{A}}_{i,i+1}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1}-H_{i-1}^{n+1}\Big), \\
\underline{\underline{A}}_{i,i+2}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1}+H_i^{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Liegt eine räumlich konstante Dichteverteilung vor, so ergibt sich im Grenzfall $\mathrm{M} = 0$ eine ebenfalls räumlich konstante Enthalpie H, wodurch

$$\overline{\underline{\underline{A}}}^{n+1}_{i,i-1} = \overline{\underline{\underline{A}}}^{n+1}_{i,i+1} = 0$$

folgt. Hierdurch ergibt sich eine reduzible Matrix und eine Entkoppelung des Druckterms $p^{(2)}$. Zur Vermeidung derartiger numerischer Phänomene werden häufig sogenannte *Staggered-Grid-Techniken* verwendet. Wir nutzen eine in [2] vorgestellte Vorgehensweise, bei der, übertragen auf den vorliegenden Fall, zur Stabilisierung des Verfahrens eine Addition des Terms

$$-\frac{\Delta t^2}{2}(\mathrm{M}^2-1)\frac{\Delta x^2}{4}\nabla\left(H^{n+1}\left(\partial_x^3 p^{(2),n+1,\nu} - \partial_x^3 p^{(2),n+1,\nu-1}\right)\right) \tag{3.109}$$

innerhalb des Poissonproblems vorgenommen wird und $p^{(2),n+1}$ nun iterativ bestimmt werden muß. Ergibt sich eine hinsichtlich des Iterationsindexes ν auskonvergierte Druckverteilung, so verschwinden die Zusatzterme, wodurch sichergestellt ist, daß im Grenzfall die ursprüngliche Gleichungen gelöst werden. Hinsichtlich des betrachteten Gleichungssystems führt dieser Term auf eine stets irreduzible Gesamtmatrix, wodurch die Druckentkopplung vermieden wird. Die auftretenden Ableitungen werden gemäß

$$\left(\phi\,\partial_x^3\varphi\right)(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{\varphi_{i+2} - 3\varphi_{i+1} + 3\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta x^3}\frac{\phi_{i+1}+\phi_i}{2} \tag{3.110}$$

diskretisiert und zur Initialisierung

$$p^{(2),n+1,-1} = p^{(2),n+1,*}$$

verwendet. Die durch den Stabilisierungsterm (3.109) unter Nutzung der Diskretisierung (3.110) auftretenden zusätzlichen Matrixeinträge lauten folglich

$$\begin{aligned}
\overline{\underline{\underline{A}}}^{Z,n+1}_{i,i-2} &= -\frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_i^{n+1} + H_{i-1}^{n+1}\Big),\\
\overline{\underline{\underline{A}}}^{Z,n+1}_{i,i-1} &= \frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1} + 4H_i^{n+1} + 3H_{i-1}^{n+1}\Big),\\
\overline{\underline{\underline{A}}}^{Z,n+1}_{i,i} &= -\frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(3H_{i+1}^{n+1} + 6H_i^{n+1} + 3H_{i-1}^{n+1}\Big),\\
\overline{\underline{\underline{A}}}^{Z,n+1}_{i,i+1} &= \frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(3H_{i+1}^{n+1} + 4H_i^{n+1} + H_{i-1}^{n+1}\Big),\\
\overline{\underline{\underline{A}}}^{Zn+1}_{i,i+2} &= -\frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1} + H_i^{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\underline{\underline{A}}^{n+1}\underline{p}^{(2),n+1,\nu} = \underline{b}^{\nu-1} \tag{3.111}$$

mit der vom Iterationsindex unabhängigen Matrix $\underline{\underline{A}}^{n+1}$,

$$\underline{\underline{A}}^{n+1} = \overline{\underline{\underline{A}}}^{n+1} + \underline{\underline{A}}^{Z,n+1}.$$

Die Matrix weist jetzt eine kompakte Bandstruktur auf. Die nicht verschwindenden Matrixelemente lauten

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A}}^{n+1}_{i,i-1} &= \frac{\Delta t^2}{8\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_i^{n+1} + H_{i-1}^{n+1}\Big),\\
\underline{\underline{A}}^{n+1}_{i,i} &= \frac{\mathrm{M}^2}{\gamma-1} - \frac{\Delta t^2}{8\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1} + 2H_i^{n+1} + H_{i-1}^{n+1}\Big),\\
\underline{\underline{A}}^{n+1}_{i,i+1} &= \frac{\Delta t^2}{8\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big(H_{i+1}^{n+1} + H_i^{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Für die iterationsabhängige rechte Seite $\underline{b}^{\nu-1}$ gilt entsprechend

$$\begin{aligned}
b_i^{\nu-1} &= (\rho E)_i^n - \frac{1}{\gamma-1}(p^{(0)} + \mathrm{M}p^{(1)})_i^{n+1} - \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\frac{(m_i^2)^{n+1,*}}{\rho_i^{n+1}}\\
&\quad -\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left(H_{i+1}^{n+1}m_{i+1}^{**} - H_{i-1}^{n+1}m_{i-1}^{**}\right)\\
&\quad -\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left((\rho H v)_{i+1}^n - (\rho H v)_{i-1}^n\right)\\
&\quad -\frac{\Delta t^2}{32\Delta x^2}(\mathrm{M}^2-1)\Big\{(H_{i+1}^{n+1} + H_i^{n+1})\\
&\qquad\qquad (p_{i+2}^{(2)} - 3p_{i-1}^{(2)} + 3p_i^{(2)} - p_{i-1}^{(2)})^{n+1,\nu-1}\\
&\qquad - (H_i^{n+1} + H_{i-1}^{n+1})\\
&\qquad\qquad (p_{i+1}^{(2)} - 3p_i^{(2)} + 3p_{i-1}^{(2)} - p_{i-2}^{(2)})^{n+1,\nu-1}\Big\}.
\end{aligned}$$

Als Abbruchkriterium verwenden wir die diskrete Maximumsnorm der Differenz zweier aufeinander folgender Iterierten $p^{(2),n+1,\nu}$ und $p^{(2),n+1\nu-1}$,

$$\max_{\Omega_i\in\Xi}\left|p_i^{(2),n+1,\nu} - p_i^{(2),n+1\nu-1}\right| < \varepsilon$$

mit vorgegebener Genauigkeitsschranke ε. Um zu einer numerisch exakten Projektion zu gelangen, muß die Schranke im Bereich der für die Funktionen vorgegebenen Genauigkeit gesetzt werden.

Nach der Iteration zur Bestimmung von $p^{(2),n+1}$ ergibt sich der Impuls zum neuen Zeitschritt aus Gleichung (3.105) zu

$$m_i^{n+1} = m_i^{**} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\big(\mathrm{M}^2-1)(p_{i+1}^{(2),n+1} - p_{i-1}^{(2),n+1}\big)$$

Lemma 3.3.2 *Wir betrachten den Fall, in dem der Entwicklungsparameter* M *so klein gewählt sei, daß unter der gewählten numerischen Genauigkeit an die Funktionen aufgrund der Abschneidefehler dies dem Grenzwert* $\mathrm{M} = 0$ *entspräche.*

Weiterhin sei angenommen, daß das Strömungsfeld zum Zeitschritt n *divergenzfrei sei, der Hintergrunddruck* $p^{(0)}$ *eine homogene Verteilung im Raum aufweise und keine Kompression über den Rand des betrachteten Gebietes erfolge, d. h.,*

$$p^{(0),n+1} = p^{(0),n} = const.. \tag{3.112}$$

Dann ist die Gesamtenergie $(\rho E)^{n+1}$ *zum neuen Zeitschritt homogen in Raum und Zeit und die neue Geschwindigkeit ist divergenzfrei.*

Beweis:
O.E.d.A. kann im folgenden $\mathrm{M} = 0$ gesetzt werden. Dann lautet die Zustandsgleichung unter Einbezug der Druckzerlegung (3.83)

$$(\rho E)^n = \frac{1}{\gamma - 1} p^{(0),n}.$$

Für die Enthalpie H, bzw. H^*, gilt entsprechend

$$H^n = H^{*,n} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0),n}.$$

Die Poissonprobleme (3.96), (3.100), (3.101) des Zeitschrittverfahrens (3.74) sind so konstruiert, daß die Gesamtenergie zum neuen Zeitschritt im Fall eines verschwindenen Entwicklungsparameters

$$(\rho E)^{n+1} = \frac{1}{\gamma - 1} p^{(0),n+1}$$

erfüllt. Es folgt aus Voraussetzung (3.112) die Homogenität in Zeit und Raum für ρE und ρH.

Da für den Hintergrunddruck $p^{(0)}$, $p^{(0)} > 0$ gilt, läßt sich die Divergenzfreiheit aus der Bestimmungsgleichung (3.105) herleiten,

$$\begin{aligned}
(\rho H)^{n+1} \nabla \cdot v^{n+1} &= \nabla \cdot (\rho H v)^{n+1} = \nabla \cdot (H^{n+1} m^{n+1}) \\
&\overset{(3.105)}{=} \nabla \cdot \left(H^{n+1} (m^{**} - \frac{\Delta t}{2} \nabla p^{(2),n+1}) \right) \\
&\overset{(3.106)}{=} 0,
\end{aligned}$$

also

$$\nabla \cdot v^{n+1} = 0.$$

□

3.4 Das Gesamtverfahren

Die in den vorausgegangenen Abschnitten beschriebenen Zeit- und Orstdiskretisierungen ermöglichen eine zusammenfassende Darstellung des Gesamtverfahrens. Hierbei stellt $\underline{u}^n = (\underline{u}_1^n, \ldots, \underline{u}_N^n)^T$ die gegebenen Zellmittelwerte der physikalischen Größen auf den Boxen $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ zur Zeit t^n dar. Gesucht ist eine Approximation $\underline{u}^{n+1}$ der Strömungsgrößen zum Zeitpunkt $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Das hierzu verwendete Zeitschrittverfahren läßt sich in folgender schematischer Form darstellen.

Darstellung eines Zeitschrittes —

Berechne die zulässige Zeitschrittweite Δt bezogen auf die explizite Lösung des homogenen Systems

Berechne die Lösung $\underline{u}_h^{n+1}$ des homogenen Systems (3.19) mittels der Approximation (3.48)

Berechne $p^{(1),n+1}$ mittels des Systems der langwelligen Akustik (3.88)

Initialisiere $v^{\widetilde{n+1},0} = v_h^{n+1}$, $H^{*,\widetilde{n+1},0} = H_h^{*,n+1}$ und $\rho^{\widetilde{n+1},0} = \rho_h^{n+1}$

$\nu = 0$

Wiederhole

Löse das Gleichungssystem $\underline{\underline{A}}^{\widetilde{n+1},\nu}\, \underline{p}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} = \underline{b}^{\widetilde{n+1},\nu}$

Ermittle $\underline{u}^{\widetilde{n+1},\nu+1}$ über die Flußkorrekturgleichung (3.98)

L_1-Norm der Flußkorrekturänderung $< \varepsilon$

Y	N
$\underline{u}^{\widetilde{n+1}} = \underline{u}^{\widetilde{n+1},\nu+1}$	$\nu = \nu + 1$
STOP	

Fortsetzung —

Initialisiere $v^{\tilde{n},0} = v^n$, $H^{*,\tilde{n},0} = H^{*,n}$ und $\rho^{\tilde{n},0} = \rho^n$

$\nu = 0$

Wiederhole

- Löse das Gleichungssystem $\underline{\underline{A}}^{\tilde{n},\nu}\, \underline{p}^{(2),\tilde{n},\nu} = \underline{b}^{\tilde{n},\nu}$
- Ermittle $\underline{u}^{\tilde{n},\nu+1}$ durch eine aus $(3.74)_2$ resultierende Flußkorrekturgleichung entsprechend der Form (3.98)
- L_1-Norm der Flußkorrekturänderung $< \varepsilon$
  - Y: $\underline{u}^{\tilde{n}} = \underline{u}^{\tilde{n},\nu+1}$
    STOP
  - N: $\nu = \nu + 1$

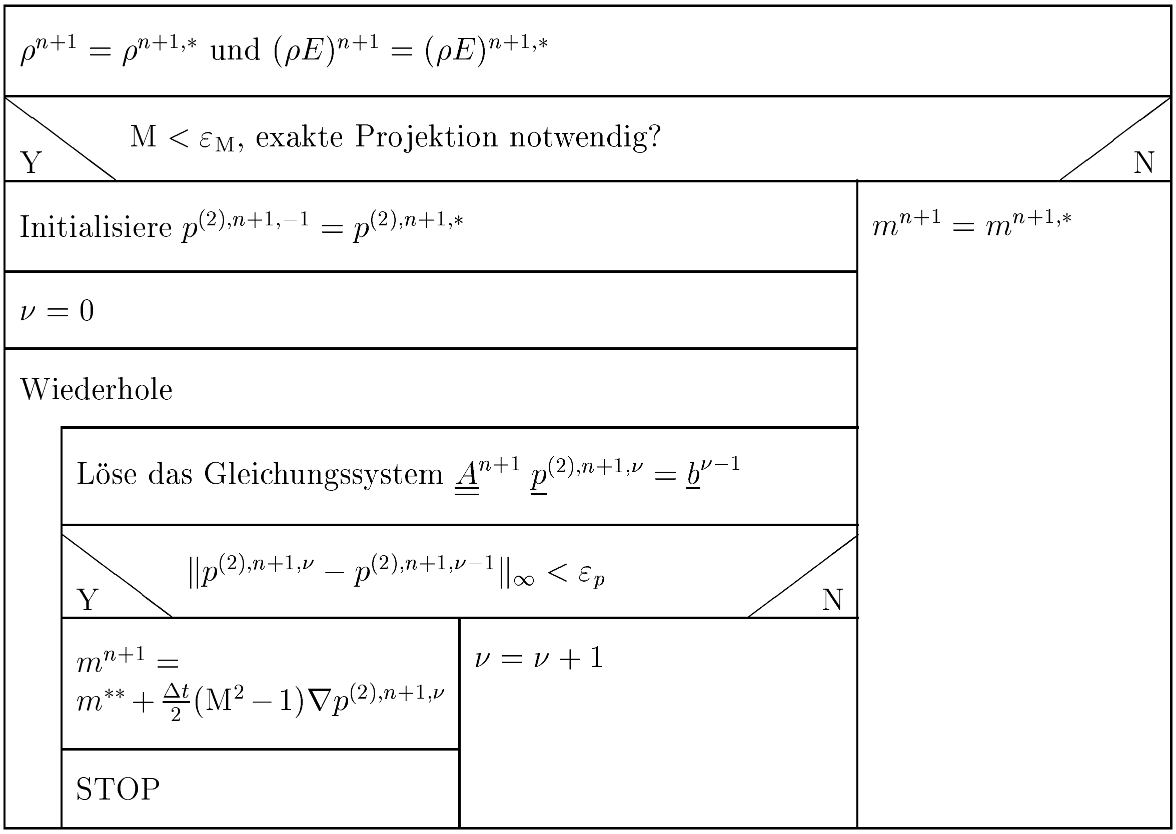
Initialisiere $v^{n+1,*,0} = v^{\widetilde{n+1}}$, $H^{*,n+1,*,0} = H^{*,\widetilde{n+1}}$ und $\rho^{n+1,*,0} = \rho^{\widetilde{n+1}}$

$\nu = 0$

Wiederhole

- Löse das Gleichungssystem $\underline{\underline{A}}^{n+1,*,\nu}\, \underline{p}^{(2),n+1,*,\nu} = \underline{b}^{n+1,*,\nu}$
- Ermittle $\underline{u}^{n+1,*,\nu+1}$ durch eine aus $(3.74)_3$ resultierende Flußkorrekturgleichung entsprechend der Form (3.98)
- L_1-Norm der Flußkorrekturänderung $< \varepsilon$
  - Y: $\underline{u}^{n+1,*} = \underline{u}^{n+1,*,\nu+1}$
    STOP
  - N: $\nu = \nu + 1$

Fortsetzung —



4. Referenzparameter und Datenzerlegung

Das in den vorangehenden Abschnitten beschriebene numerische Verfahren basiert grundlegend auf der Festlegung eines geeigneten Referenzparameters und der Zerlegung der physikalischen Größen in Anteile unterschiedlicher, vom Referenzparameter abhängiger Frequenzen.

Mit der Bestimmung eines geeigneten Zerlegungsalgorithmus als auch mit der hiermit verbundenen Berechnung des Referenzparameters werden wir uns in diesem Kapitel beschäftigen.

In den folgenden Abschnitten sind alle Variablen, falls nicht ausdrücklich vermerkt, dimensionsbehaftet. Wir werden aber, um eine bessere Übersichtlichkeit zu gewährleisten, das Superskript $\hat{}$ zur Bezeichnung der dimensionsbehafteten Form an allen Stellen, wo es zu keiner Verwechselung kommen kann, weglassen.

4.1 Identifikation eines asymptotischen Regimes

Die Identifikation eines asymptotischen, das heißt schwach kompressiblen, Regimes geht einher mit der Bestimmung des Entwicklungsparameters $\mathrm{M} \in (0,1]$ und den für die Ansätze aus der Mehrskalenanalyse benötigten additiven Zerlegungen des Impulses als auch des Druckes. Die Voraussetzungen der kontinuierlichen Mehrskalenanalyse an die Funktionen übertragen sich wie folgt in den diskreten Kontext:

i. Der Impuls $\hat{m}$ soll additiv in einem langwelligen Anteil $\overline{m}$ und einen kurzwelligen Rest m' zerfallen,

$$\hat{m} = \overline{m} + m'.$$

ii. Im Rahmen des in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten numerischen Verfahrens, welches auf den aus der asymptotischen Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen gewonnenen Resultate aufbaut, wurde eine Komposition des Druckes der Form

$$\hat{p} = \hat{p}^{(0)} + \mathrm{M}\hat{p}^{(1)} + \mathrm{M}^2\hat{p}^{(2)} \tag{4.1}$$

verwendet. Wie schon in Abschnitt 3.3.2.1 angemerkt, besitzt diese Zerlegung keinen Abschneidefehler der Ordung $o(\mathrm{M}^2)$, so daß keine exakte

Übereinstimmung der Druckterme $\hat{p}^{(0)}$, $\hat{p}^{(1)}$ und $\hat{p}^{(2)}$ mit denen aus der Theorie der Mehrskalenanalyse genutzten kontinuierlichen Funktionen vorliegt. In der numerischen Umsetzung ist es jedoch vollkommen ausreichend, daß die einzelnen Druckterme ein qualitativ gleiches Verhalten aufweisen wie ihre kontinuierlichen Gegenspieler.

Dem entsprechend fordern wir für hinreichend kleine Entwicklungsparameter M einen räumlich konstanten Druckterm $\hat{p}^{(0)}$. Zudem fordern wir, daß $\hat{p}^{(1)}$ die rein langwelligen akustischen Phänomene der Strömung repräsentiert und $\hat{p}^{(2)}$ die kurzwelligen Restanteile beinhaltet. Aufgrund der exakten Zerlegung läßt sich $\hat{p}^{(2)}$ allein aus der Kenntnis von $\hat{p}$, $\hat{p}^{(0)}$ und $\hat{p}^{(1)}$ bestimmen.

Im Gegensatz zur Theorie sind wir nicht ausschließlich am Verhalten der Druckterme im Grenzwert eines verschwindenen Entwicklungsparameters interessiert, sondern an Abschätzungen die für alle Werte von M Gültigkeit besitzen. Die Abschätzungen (3.84) und (3.86) werden somit wie folgt abgeschwächt

$$\hat{p}^{(i)} \leq C_i \hat{p}_{ref}, \; i = \{1, 2, 3\}, \tag{4.2}$$

welche durch die Zerlegung erfüllt werden müssen. Die Konstanten C_i sind dabei frei, aber natürlich unabhängig von M, wählbar.

Aus der Formel der Druckzerlegung (4.1) wird ersichtlich, daß eine Zerlegungsroutine in Einklang mit der Bestimmung des Entwicklungsparameters stehen und numerisch simultan umgesetzt werden muß.

Ist keine Zerlegung, welche die Bedingungen (4.2) erfüllen, möglich, so ist $\mathrm{M} = 1$ zu wählen. Man befindet sich in einem rein kompressiblen Regime, in dem die Annahmen der Mehrskalenasymptotik keine Gültigkeit mehr besitzen.

Im dem Fall, daß M im Bezug auf den maximalen Durchmesser des Gebietes $\widehat{\Omega}$ so klein wird, daß keine langwellige Akustik mehr aufgelöst werden kann,

$$\frac{1}{\mathrm{M}} \gg \frac{d_{max}(\widehat{\Omega})}{\hat{l}_{ref}} = d_{max}(\Omega),$$

degeneriert der Mehrskalenansatz zu einen Einskalenansatz. Die Berechnungen des langwelligen Anteils des Impulses $\overline{m}$ als auch die Bestimmung von $\hat{p}^{(1)}$ werden überflüssig, da sie im numerischen Verfahren nicht mehr benötigt werden.

Der Grenzfall $\mathrm{M} = 0$ eines rein inkompressiblen Regimes stellt einen Sonderfall dar, auf den in [13] explizit eingegangen wird.

Setzen wir

$$\hat{p}^{(0)}(t) := \hat{p}_{ref}(t) = \frac{1}{|\widehat{\Omega}|} \int\limits_{\widehat{\Omega}} \hat{p}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

an, so erfüllt der führende Druckterm $\hat{p}^{(0)}$ für alle $\mathrm{M} \in (0,1]$ die an ihn gestellten Forderungen. Desweiteren läßt sich die Druckzerlegung (4.1) nun auch schreiben als

$$\phi = \overline{\phi} + \phi',$$

mit $\phi := \hat{p} - \hat{p}^{(0)}$, $\overline{\phi} := \mathrm{M}\hat{p}^{(1)}$ und $\phi' := \mathrm{M}^2\hat{p}^{(2)}$. Das Ziel des Zerlegungsalgorithmus läßt sich somit wie folgt beschreiben:

Es bezeichne I die Indexmenge der Diskretisierung. Arbeite aus einem beliebig vorgegebenen Signal $(f_i)_{i\in I}$ einer Funktion f die langwelligen Strukturen so heraus, daß $(f_i)_{i\in I}$ additiv in einen rein langwelligen Anteil $(\overline{f}_i)_{i\in I}$ und einen Rest $(f_i')_{i\in I}$ zerfällt,

$$f_i = \overline{f}_i + f_i', \quad \forall i \in I.$$

Der Restanteil $(f_i')_{i\in I}$ enthält alle kurzwelligen Anteile und soll bezüglich der Maximumsnorm klein in Bezug auf die Norm von $(\overline{f}_i)_{i\in I}$ bleiben,

$$\|(\overline{f}_i)_{i\in I}\| \gg \|(f_i')_{i\in I}\|.$$

Ein für diese Zielvorstellung optimaler Zerlegungsalgorithmus sollte die folgenden Eigenschaften aufweisen:

A. Die Zerlegung als auch die Bestimmung von M müssen simultan erfolgen.

B. Der Entwicklungsparameter M soll stetig von den Daten abhängen und darf nicht a-priori auf eine kleine Menge diskrete Werte festgelegt werden.

C. Der Algorithmus soll weitestgehend parameterfrei sein und muß automatisch terminieren.

D. Das Verfahren soll sich lokal an die Daten anpassen, das heißt in Teilgebieten, die ein rein langwelliges Verhalten aufweisen, soll keine weitere Zerlegung stattfinden.

E. Wichtige Teilgebiete der Lösung dürfen nicht verschoben oder verschmiert werden.

F. Der Algorithmus muß unabhängig von der Art und der Feinheit der Diskretisierung sein. Außerdem sollte er robust gegenüber numerischen Rauschen sein. In diesem Sinne ist der Nachweis der Stetigkeit der nichtlinearen Zerlegungsoperatoren erstrebenswert.

G. Schließlich muß er eine gute numerische Performace aufweisen, da die Daten in jedem Zeitschritt erneut in ihren Komponenten aufgespalten werden müssen. Der Algorithmus darf höchstens von der Ordnung $O(n \log n)$ sein, wenn n die Anzahl der Diskretisierungspunkte bzw. Kontrollvolumina bezeichnet.

Aufgrund der Forderung (G) kommen einfache Mittelungsoperatoren, welche auf Faltungen mit einer Boxfunktion oder eines Gaußkerns beruhen, als Zerlegungsoperatoren nicht in betracht, obwohl man mit geeigneten a-priori-Abschätzungen zur Bestimmung von M alle Forderungen an die Zerlegungen erfüllen kann.

Von einer Verwendung eines Filters, der auf einer Fourierzerlegung des Signals basiert und die hohen Frequenzen geeignet manipuliert, haben wir abgesehen, da es nicht abzuschätzen ist, welche Auswirkungen das Verändern einzelner Frequenzbänder für das Gesamtsignal hat. Dies gilt insbesondere im unstrukturierten Fall, indem die Frequenzbänder zunächst über eine Faltung gewonnen werden müssen. Desweiteren ist der Ansatz nicht lokal.

Wavelets haben lokale Eigenschaften in Raum und Zeit. Sie sind jedoch an äquidistante strukturiere Gitter gebunden, was sie im Zusammenhang mit Punkt (F) zu unflexibel macht. Weiterhin muß der Referenzparameter M für kleine Werte genau bestimmt werden. Dies ist aber durch eine einzelne Waveletanalyse nicht möglich. Durch weitere Waveletzerlegungen der jeweiligen hochfrequenten Anteile der übergeordneten Analysen können alle numerischen Frequenzen der Funktionen bestimmt werden. Dies führt aber zwangsläufig zu dem Verlust der Multiskaleneigenschaft und der Ordnung des Algorithmus von $O(n)$.

Eine Übersicht über scale-space evoultion Algorithmen, welche auf parabolischen Differentialgleichungen aufbauen, ist in [18] gegeben. Neben den Vorteilen eines Kurvenevolutionsalgorithmus basierend auf linearen Diffusionsgleichungen, treten jedoch gravierende Probleme auf (Weickert [18], p. 6):

a. "Gaussian smoothing does not only reduce noise, but also blurs important features such as edges and, thus, makes them harder to identify. Since Gaussian scale-space is designed to be completly uncommitted, it cannot take into account any a-priori information on structures which are worth being preserved (or even enhanced).

b. Linear diffusion filtering dislocates edges when moving from finer to coarser scales. So structures which are identified at a coarse scale do not give the right location and have to be traced back to the original image[..]. In practice, relating dislocated information obtained at different scales is difficult and bifurcations may give rise to instabilities. These coarse-to-fine tracking difficulties are generally denoted as the correspondence problem."

Um diese Problem zu überwinden, werden anisotrope und nichtlineare Diffusionsprozesse oder auch Reaktions-Diffusionsprozesse betrachtet. Diese Algorithmen sind jedoch nicht parameterfrei und die Steuerung des Abbruchkriteriums ist ein offenes Problem. Desweiteren steigt der numerische Aufwand im Vergleich zu den linearen Diffusionsprozessen stark an. Diese besitzen jedoch schon einem numerischen Aufwand in der Größenordnung der Faltungsoperatoren, so daß die komplizierteren Algorithmen bei der von uns gestellten Aufgabe nicht sinnvoll anwendtbar sind.

Wir verwenden als Zerlegungsoperator einen aus der diskreten Datenanalyse stammenden neuen Evolutionsalgorithmus diskreter Strukturen [6]. In diesem Gebiet der diskreten Datenanalyse werden polygonalberandete Strukturen untersucht, die geeignet vereinfacht werden sollen, um die wichtigen visuellen Anteile herauszuarbeiten, ohne die Grobstruktur des Randes zu verändern und ohne die visuell wichtigen Punkte zu verschieben.

In jedem Evolutionsschritt werden gewisse aufeinander folgender Kanten durch jeweils eine ersetzt, welche die Eckpunkte eines Kantenpaares verbindet. Der Schlüssel zum Erfolg dieses sehr einfachen Algorithmus liegt in der Reihenfolge der Ersetzungen. Dazu wird jedem Kantenpaar in jedem Evolutionsschritt über ein Relevanzmaß ein Kostenwert zugeordnet, der die Signifikanz der Kontour, welche durch das Kantenpaar erzeugt wird, in Bezug auf die anderen Kontouren widerspiegelt. Ist der Kostenwert klein, das heißt, die Struktur, die durch das Paar hervorgerufen wird, ist unbedeutend, so wird dieses durch eine einzelne Kante ersetzt.

Die durch das Relevanzmaß erzwungende Reihenfolge der Ersetzungen bewirkt eine Hierarchie der einzelnen Kontouren, so daß sich in der Evolution zwei getrennte Phasen bemerkbar machen. In der ersten Phase kommt es zum Entrauschen der Kontour des Objektes, ohne daß sich deren Gestalt nennenswert ändert. Erst in der zweiten Phase treten sukzessive Vereinfachungen an der Gestalt der Kontour auf.

Übertragen auf die obige Zielvorstellung ist zu einer diskreten Punktverteilung der Funktion f ein geeignetes Relevanzmaß zu finden, welches es ermöglicht, diejenigen Punkte zu bestimmen, die nicht durch $\overline{f}$ repräsentiert werden und dann diese in einem zweiten Schritt durch andere Werte zu ersetzen, so daß die Punkteverteilung von $\overline{f}$ eine gewisse diskrete "Glattheit" besitzt. Die Werte von f' ergeben sich dann aus der Differenz von f und $\overline{f}$.

Zunächst benötigen wir eine in unserem Kontext geeignete Definition der Wellenlänge, um die Begriffe von lang- und kurzwelligen Strukturen gegeneinander abgrenzen zu können.

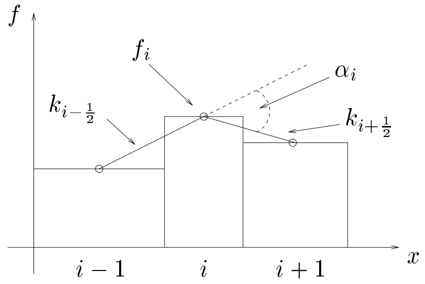
Im Gegensatz zum Fourieransatz bezeichnen wir jede Funktion als langwellig, dessen Wendepunkte einem genügend großen Abstand voneinander haben. Durch diese Festlegung hat eine Sinusfunktion und jede beliebige andere Funktion mit denselben Wendepunkten die gleiche Wellenlänge.

Diese Definition der Wellenlänge besitzt den Nachteil, daß sich, nach dem Fourieransatz kurzwellige, Anteile auch in Gebieten, welche nach unserer Festlegung als langwellig gelten, verstecken können, wie dies zum Beispiel bei einer sich zu einem Stoß aufsteilenden Welle der Fall ist. In diesem Beispiel wachsen die kurzwelligen Anteile nach Fourier stetig an und es entstehen sogar immer kurzwelligere Anteile, während der Abstand benachbarter Wendepunkte bis zur Stoßbildung sogar konstant bleiben kann. Nach der obigen Definition bliebe damit auch die Wellenlänge konstant. Es könnte deshalb nützlich sein *nach* der Zerlegung eine Fourier- oder Waveletanalyse durchzuführen.

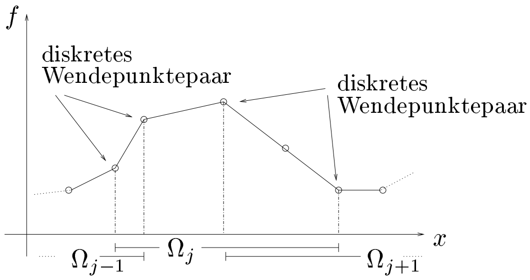
In Gebieten mit kurzwelligen Anteilen treten gehäuft Wendepunkte auf, während in Gebieten mit langwelligen Anteilen kaum Wendepunkte vorhanden sind. Diese Eigenschaft der Langwelligkeit werden wir uns bei der Definition einer Kostenfunktion zur Bestimmung des Relevanzmaßes zunutze machen.

4.1.1 Diskreter Evolutionsalgorithmus

Zu einer gegebenen disjunkten Zerlegung des Gebietes Ω in Kontrollvolumina $(\sigma_i)_{i\in\,I}$, I sei eine Indexmenge mit $n := \#(I)$, betrachten wir die Zellmittelwerte $(f_i)_{i\in I}$ einer Funktion f lokalisiert in den Schwerpunkten der Kontrollvolumina. Eine lineare Rekonstruktion der Zellmittelwerte führt direkt auf eine stückweise lineare Funktion vergleichbar mit den polygonal berandeten Kontouren aus [7]. Wir bezeichnen eine Kante, die die Zellmittelwerte f_i und f_{i+1} verbindet mit $k_{i+\frac{1}{2}}$. Aufgrund dieser Vorstellung ist es äquivalent, ob wir eine Eigenschaft einem Kontrollvolumen σ_i, einem Zellmittelwert f_i oder einem Kantenpaar $(k_{i-\frac{1}{2}}, k_{i+\frac{1}{2}})$, welches den Zellmittelwert f_i gemeinsam hat, zuordnen. Zum Beispiel werden wir von dem Wendewinkel α_i im Zellmittel f_i sprechen. Der Wendewinkel bezieht sich natürlich auf den von den Kanten $(k_{i-\frac{1}{2}}, k_{i+\frac{1}{2}})$ eingeschlossenen Winkel, ausgehend von der Kante $k_{i-\frac{1}{2}}$. Über



die Vorzeichenverteilung des Wendewinkels α_i läßt sich das Gebiet Ω in sich überlappwende konvexe und konkave Teilgebiete $\Omega_j, j \in J$ unterteilen, J bezeichnet hierbei die Indexmenge der Teilgebiete. Dabei reicht jedes Teilgebiet bis einschließlich zu den Kontrollvolumen, in denen sich das Vorzeichen des Wendeswinkels ändert. Somit stellt jeder Eckpunkt eines Teilgebietes einen diskreten Wendepunkt der Funktion f dar. Man beachte, daß diskrete Wendepunkte immer paarweise auftreten. Zwischen einem solchen Wendepunktepaar liegen höchstens Punkte, dessen Wendewinkel identisch verschwinden.



Eine diskrete Kurvenevolution einer Funktion f erzeugt eine Folge von Funktionen $\{f^0 = f, \ldots, f^m\}$ und einer Folge von Indexmengen $\{I^0 = I, \ldots, I^m\}$ mit $\#I^{l+1} < \#I^l$ und $\#I^m \leq 2$. Hierbei bezeichnen die Indexmengen I^l diejenigen Zellmittelwerte f_i der Funktion f, die zum Zeitpunkt des l-ten Evolutionsschrittes unverändert geblieben sind. Um diejenigen Indizes zu bestimmen, deren assoziierte Zellmitelwerte unverändert aus dem l-ten Evolutionsschritt hervorgehen, wird jedem Index $i \in I^l$ über das noch näher zu bestimmende Relevanzmaß ein Kostenwert $k(i, I^l) \in I\!R^+$ zugeordnet. Es sei

$$k_{min}(I^l) := \min\{k(i, I^l) : i \in I^l\}.$$

Die Menge $I_{min}(I^l)$ bezeichne die Menge der Indizes minimaler Kosten zum l-ten Evolutionsschritt,

$$I_{min}(I^l) := \{i \in I^l : \; k(i, I^l) = k_{min}(I^l)\}.$$

Der Evolutionsalgorithmus entfernt nun die Menge $I_{min}(I^l)$ aus I^l,

$$I^{l+1} = I^l \setminus I_{min}(I^l).$$

4.1.2 Das Relevanzmaß

Das Relevanzmaß gibt die Signifikanz jeder Einzelstruktur in Bezug auf alle anderen Strukturen wieder und steuert somit die Reihenfolge des Evolutionsalgorithmus. In unserem Fall soll das Relevanzmaß ein Maß für die Langwelligkeit darstellen. Da wir den Begriff der Wellenlänge über den Abstand der Wendepunkte zueinander festgelegt haben, ist für die Definition der Kostenfunktion, die jedem Index eines Kontrollvolumens einen Wert zuordnet, die Summe der Abstände zu den benachbarten Wendepunkten eines jeden Punktes von entscheidener Bedeutung, während die relative Lage zwischen den Wendepunkten oder auch lokale Eigenschaften eines Punktes, wie sein Krümmungsverhalten, nur untergeordnete Bedeutung besitzen.

Da alle Wendepunkte diskret als Wendepunktepaare auftreten, ist im diskreten Kontext der Abstand zu denjenigen Wendepunkten gemeint, die in der Krümmung ein anderes Vorzeichen aufweisen als das der Punkte, die zwischen ihnen liegen. Die Summe der Abstände zu den benachbarten Wendepunkten entspricht also gerade der Länge der konkaven oder konvexen Teilgebiete $|\Omega_j|$ projeziert auf die x-Achse. Jeder Zelle können also bis zu drei unterschiedliche Längen konkaver oder konvexer Teilgebiete zugeordnet werden. Um Eindeutigkeit zu gewährleisten, wählen wird jeweils das Minimum der zugeordneten Längen aus.

Da sich während der Evolution auch die Anzahl der Teilgebiete ändert, führen wir noch eine Folge von Indexmengen der Teilgebiete $\{J^0 = J, \dots, J^m\}$ ein.

Wir definieren die Kostenfunktion

$$k : i \in I^l \longmapsto \mathbb{R}^+$$

über

$$k(i, I^l) := \Big| \min_{j \in \{J^l, \sigma_i \in \Omega_j\}} |\Omega_j| - \min_{j \in J^l} |\Omega_j| \Big| \cdot |\alpha_i|, \quad \forall i \in I^l. \tag{4.3}$$

Hierdurch wird erreicht, daß innerhalb eines jeden Evolutionsschrittes neben Indizes mit kollinear angeordneten Funktionswerten, alle Indizes des zur Zeit kleinsten Teilgebietes entfernt werden.

Fassen wir den minimalen Abstand zweier benachbarter Teilgebiete Ω_j als minimale Wellenlänge der Funktion f^l auf,

$$\lambda_{min}(f^l) := \min_{j \in J^l} \big(|\Omega_j| + |\Omega_{j+1}| - |\Omega_j \cap \Omega_{j+1}| \big)$$

mit $\Omega_j := \emptyset, \ \forall j \notin J^l$, so gilt im allgemeinen nicht

$$\lambda_{min}(f^l) \leq \lambda_{min}(f^{l+1}).$$

Aus der Abbruchbedingung des Algorithmus folgt aber

$$\lambda_{min}(f^0) \leq \lambda_{min}(f^m).$$

Im Fall $\lambda_{min}(f^0) \neq |\Omega|$ ist die Ungleichung echt. Das heißt im Durchschnitt nimmt die minimale Wellenlänge während des Evolutionsalgorithmus zu, obwohl der Prozess nicht notwendigerweise monoton sein muß.

Wir können nun einen ersten Indikator für den Entwicklungsparameter M, basierend auf der Wellenlängeninformation, definieren,

$$\mathrm{M}(f^l) := \min\left\{\frac{1}{\lambda_{min}(f^l)}, 1\right\}. \tag{4.4}$$

4.1.3 Zerlegungsalgorithmus

Der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebene Zerlegungsalgorithmus kann wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Setze $M = 1,\ l = 0,\ \overline{f}_i = f_i,\ f_i' = 0,\ \forall i \in I^0 = I.$
2. Unterteile Ω in sich überlappende konkave und konvexe Teilgebiete Ω_j der Funktion $\overline{f}_i,\ \forall i \in I^0$.
3. Bestimme M aus Formel (4.4) und überprüfe die Gültigkeit der Abschätzungen (4.2), sowie $\#I^l > 2$. Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, ist die Evolution beendet. Ansonsten fahre mit 4. fort.
4. Ordne jedem Kontrollvolumen $\sigma_i,\ i \in I^l$ über das Relevenzmaß (4.3) einen Kostenwert $k(i, I^l)$ zu.
5. Bestimme $I_{min} = \{i \in I^l : k(i, I^l) = 0\}$.
6. Reduziere die Indexmenge der unveränderten Funktionswerte,
$$I^{l+1} = I^l \setminus I_{min}(I^l).$$
7. Berechne geglättete Daten $\overline{f}_i,\ i \in I^0 \setminus I^{l+1}$ aus den Daten $f_i,\ i \in I^{l+1}$.
8. Bestimme $f_i' = f_i - \overline{f}_i,\ i \in I^0 \setminus I^{l+1}$.
9. Erhöhe den Evolutionsindex, $l = l + 1$.
10. Gehe zu 2. .

Wir wollen einige Anmerkungen betreffend der Rekonstruktion der diskreten rein langwelligen Funktion $\overline{f}$ aus den unverändert gebliebenen Daten machen. Eine einfache lineare Interpolation führt nicht auf einen sinnvollen Rekonstruktionsalgorithmus, da es möglich ist, daß alle Punkte in größeren Teilen eines Gebietes herausgenommen worden sind. Kubische Splines stellen eine bessere Wahl dar, eine glatte Interpolation zu erreichen. Jedoch läßt sich der klassische Ansatz nicht ohne weiteres übertragen, da man sicher gehen muß, daß keine weiteren Wendepunkte über die Interpolation eingefügt werden.

Um das Problem zu umgehen, daß in größeren Teilgebieten keine Zellmittelwerte der Ausgangsfunktion f zur Verfügung stehen, fügen wir zunächst in geeigneter Weise Zellmittelwerte von f ein ohne dabei Wendepunkte zu erzeugen. Erst dann benutzen wir einen der obigen Interpolationen. Der Gesamtalgorithmus der Zerlegung liefert nun schon im Fall linearer Interpolation sehr gute Ergebnisse.

4.1.4 Eigenschaften des Zerlegungsalgorithmus

In [7] sind die Eigenschaften des diskreten Evolutionsalgorithmus aufgeführt, die von der Wahl des Relevanzmaßes unabhängig sind. Wir fassen diese Eigenschaften in diesem Abschnitt kurz zusammen, ergänzt durch die Eigenschaften, welche charakteristisch für das verwendete Relevanzmaß sind:

1. Die Zerlegung als auch die Bestimmung von M erfolgen simultan.

2. Die Genauigkeit der Bestimmung des Entwicklungsparameters hängt ausschließlich von der Güte der Diskretisierung ab.

3. Der Algorithmus läuft parameterfrei und terminiert automatisch. Gilt beim Abbruch $\#I^{ab} \leq 2$, so ergibt sich als Kurve eine Gerade.

4. Das Verfahren paßt sich lokal den Daten an. Aufgrund des gewählten Relevanzmaßes werden nur Teilgebiete, in denen kurzwellige Phänomene auftreten, während eines Evolutionsschrittes bearbeitet. Alle anderen bleiben davon unberüht. Dabei wird die Funktion im Laufe der Evolution im Durchschnitt immer langwelliger.

5. Es treten keine Abrundungseffekte oder Verschiebungen von relevanten Kontouren auf, da die übrigen Zellmittel ihren Wert nicht ändern.

6. Ein Nachweis der Stetigkeit des Zerlegungsoperators ist nicht möglich, da die gewählte Kostenfunktion unstetig ist. Trotzdem scheinen numerische Experimente zu belegen, daß die Zerlegung von der Feinheit der

Diskretisierung annähernd unabhängig ist, da immer einzelne Teilgebiete als Ganzes gleichzeitig bearbeitet werden. Weiterhin ist ein Entrauschen der Funktionen zu Beginn der Evolution zu erkennen, da numerisches Rauschen ein kurzwelliges Phänomen darstellt.

7. Der Algorithmus ist von der Ordnung $O(n \log n)$.

4.2 Entdimensionalisierung und Bestimmung des asymptotischen Entwicklungsparameters M

Um eine sinnvolle Entdimensionalisierung der physikalischen Werte gemäß Tabelle 2.1 durchführen zu können, müssen die benötigten Referenzwerte auf geeignete Weise aus den im Strömungsgebiet $\widehat{\Omega} \subset I\!R^d$ gegebenen Werten bestimmt werden. Üblicherweise ist die Entdimensionalisierung durch die Festlegung der Referenz der Länge $\hat{l}_{ref}$, der Dichte $\hat{\rho}_{ref}$ und der Geschwindigkeit $\hat{v}_{ref}$ zu Beginn der Modellierung unabhängig von der Art des zu modellierenden Strömungsfeldes, ob kompressibel oder inkompressibel, gegeben. Diese Modellierungen basieren auf der Annahme, daß der globale Charakter des Strömungsfeldes sich während der Rechenzeit nicht ändert. Somit ist eine Festlegung der Referenzen zu Beginn der Rechnung gerechtfertigt. Um jedoch Strömungen berechnen zu können, die ihren globalen Charakter von inkompressibel zu kompressibel oder umgekehrt wechseln dürfen, ist es notwendig eine zeitabhängige Entdimensionalisierung einzuführen.

Durch die Hinzunahme einer unabhängigen Druckreferenz $\hat{p}_{ref}$ weisen die dimensionslosen Euler-Gleichungen den Parameter

$$\mathrm{M} := \frac{\hat{v}_{ref}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}}} \tag{4.5}$$

auf, der bei der folgenden Wahl der zugrundeliegenden Referenzwerte sowohl als Maß für die Inkompressibilität des vorliegenden Strömungsfeldes verwendet werden kann als auch ein Maß für die Langwelligkeit von akustischen Wellen im Strömungsgebiet gilt und daher zur Gewichtung der Einflüsse der asymptotischen Analyse innerhalb des numerischen Verfahrens dient.

Die Referenzlänge $\hat{l}_{ref}$ ist eine problemgegebene Längenskala, welche die zu untersuchenden Änderungen im Geschwindigkeits–, Dichte– und Druckfeld genügend scharf auflöst oder welche eine charakteristische Größe eines umströmten Objektes bezeichnet. Sie kann zum Beispiel bei Tragflügelumströmungen als maximale Tragflügeldicke, Spannweite oder Tragflügeltiefe gewählt werden. Bei Kanalströmungen wird in der Regel der Kanaldurchmesser verwendet. Die Wahl von $\hat{l}_{ref}$ sollte demnach die gröbste Diskretisierung des Gebietes $\widehat{\Omega}$ vorgeben.

Die Referenzen für die Dichte und den Druck ergeben sich aus Gebietsmittelungen. Da jedoch auch die Randwerte, sofern es sich um Ein- oder Ausströmränder handelt, entscheidenen Einfluß auf den Charakter des Strömungsfeldes haben können, sollten sie bei der Bestimmung der Referenzen berücksichtigt werden. Dazu werden die Randzellen $\widehat{\Omega}_{Rand}$ doppelt gewichtet und einmal mit den Werten der Zelle, das andere Mal mit den Werten aus den Randbedingungen versehen. Die Mittelung erstreckt sich also über das Gebiet $\widehat{\Omega}'$ mit Mächtigkeit

$$|\widehat{\Omega}'| = |\widehat{\Omega}| + |\widehat{\Omega}_{Rand}|.$$

Die Referenzwerte der Dichte und des Druckes ergeben sich folglich vermöge

$$\hat{\rho}_{ref}(t) := \frac{1}{|\widehat{\Omega}'|} \int\limits_{\widehat{\Omega}'} \hat{\rho}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

und

$$\hat{p}_{ref}(t) := \frac{1}{|\widehat{\Omega}'|} \int\limits_{\widehat{\Omega}'} \hat{p}(\underline{x}, t) d\underline{x}.$$

Als direkte Folgerung aus der Kontinuumsannahme fordern wir eine zeitlich globale positive Schranke für die Druck- und Dichtereferenz. Desweiteren sei angenommen, daß sie auch zeitlich global nach oben beschränkt seien,

$$\begin{aligned} 0 < C_1 \leq \quad \hat{\rho}_{ref} \quad &\leq C_2 < \infty, \\ 0 < C_3 \leq \quad \hat{p}_{ref} \quad &\leq C_4 < \infty. \end{aligned}$$

Aus diesen Referenzen bestimmt sich die Referenz der globalen Schallgeschwindigkeit vermöge

$$\hat{c}_{ref} := \sqrt{\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}}.$$

Die Beschränktheitsannahmen von $\hat{\rho}_{ref}$ und $\hat{p}_{ref}$ übertragen sich somit auf $\hat{c}_{ref}$,

$$0 < C_5 \leq \hat{c}_{ref} \leq C_6 < \infty.$$

Durch die Bestimmung der Geschwindigkeitsreferenz $\hat{v}_{ref}$ und der Berechnung des Entwicklungsparameters M nach (4.5) könnte der Vorgang der Entdimensionalisierung abgeschlossen werden. Da der Entwicklungsparameter jedoch nicht nur in der Größenordnung der lokalen Machzahlen anzusetzen ist, sondern auch den Grad der Kompressibilität als auch die Langwelligkeit vorhandener akustischer Wellen messen soll, ist es sinnvoller M aus dem Strömungsfeld zu bestimmen und für $\mathrm{M} \neq 0$

$$\hat{v}_{ref} := \mathrm{M}\hat{c}_{ref} \tag{4.6}$$

zu setzen. Aufgrund der Beschränkheitsannahmen an $\hat{c}_{ref}$ folgt aus dem formalen Grenzübergang $\mathrm{M} \to 0$ sofort $\hat{v}_{ref} \to 0$. Damit die dimensionslosen Geschwindigkeiten aber nicht unbeschränkt anwachsen, muß $|\underline{\hat{v}}|_{max} \to 0$ im Falle $\mathrm{M} \to 0$ gefordert werden. Das heißt, der formale Übergang vom schwach kompressiblen Strömungsfeld in ein rein inkompressibles ist wegen des asymptotischen Ansatzes und den natürlich erscheinenden Beschränktheitsannahmen nur für die triviale Lösung möglich.

Ein annähernd divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld und nur kleine Fluktuationen im Druck stellen weitere natürliche Forderungen an die dimensionsbehafteten Grösen, um ein in unserem Sinne schwach kompressibles, beziehungsweise ein eher inkompressibles, Strömungsfeld zu charakterisieren. An die Dichteverteilung werden keine Forderungen gestellt, so daß Strömungen mit Dichteunstetigkeiten, wie sie bei Vermischungen von unterschiedlichen Medien auftreten, simuliert werden können.

Verbrennungsvorgänge sind ein typischer Vertreter für ein schwach kompressibles Strömungsfeld, in dem große Dichteunstetigkeiten vorkommen, das Druckfeld nachzu konstant ist und die Geschwindigkeiten klein gegen eins sind.

Wir führen drei Indikatoren ein, um die verschiedenen Eigenschaften eines schwach kompressiblen Strömungsfeldes zu messen. Der erste Indikator ist mit der Druckzerlegung gekoppelt, wie in Abschnitt 4.1 beschrieben. Um Mißverständnisse zu vermeiden, werden wir ihn folgenden mit M_l bezeichnen. Die anderen zwei Indikatoren charakterisieren die Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes,

$$\mathrm{M}_v := C_v \frac{\max_{\underline{x}\in\Omega'} |\underline{\hat{v}}|}{\hat{c}_{ref}}$$

und

$$\mathrm{M}_{div} := C_{div} \sqrt{\frac{\max_{\underline{x}\in\Omega'} |\nabla \cdot \underline{\hat{v}}|}{\hat{c}_{ref}}}.$$

Man beachte, daß M_{div} aufgrund der dimensionslosen Divergenzbildung eine dimensionsunabhängige Kennzahl ist. Bei allen Indikatoren werden die Randdaten mit berücksichtigt, weshalb die Maxima und Minima über $\widehat{\Omega}'$ zu berechnen sind.

Nun können wir formal den Entwicklungsparameter M definieren. Um sicher zu stellen, daß ein standard Godunov-type-Verfahren in den Fällen genutzt wird, in den einer der Indikatoren größer oder gleich einem kritischen Wert α, $\alpha \leq 1$, ist, definieren wir einen Hilfsparameter

$$\tilde{\mathrm{M}} = \min\left\{\alpha, \max(\mathrm{M}_v, \mathrm{M}_{div}, \mathrm{M}_l)\right\},$$

und eine Funktion

$$g(\tilde{\mathrm{M}}) = 1 + \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\alpha^2}\tilde{\mathrm{M}}^2.$$

Hieraus ergibt sich der Entwicklungsparameter zu

$$\mathrm{M} := g(\tilde{\mathrm{M}})\tilde{\mathrm{M}}, \quad \tilde{\mathrm{M}} \in (0, \alpha].$$

Über den kritischen Wert α und die Funktion g wird das Umschalten vom asymptotischen Korrekturverfahren auf das Godunov-type-Verfahren gesteuert. Ein kleiner Wert α bewirkt einen frühzeitigen Wechsel zum Godunov-type-Verfahren schon für relativ kleine lokale Machzahlen. Abbildung 4.1 verdeutlicht den Einfluß der Funktion g bei unterschiedlich gewältem Werten von α.

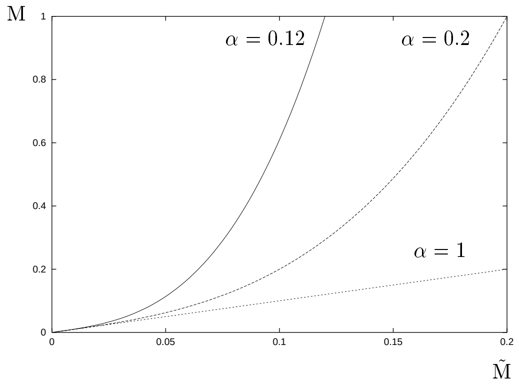


Abbildung 4.1: Einfluß der Funktion g auf den Referenzparameter

Es ist offensichtlich, daß ein kleiner werdener Entwicklungsparameter M stets mit einem dimensionsbehafteten Strömungsfeld gekoppelt ist, das ein in unserem Sinne zunehmend inkompressiblen Charakter aufweist.

Die Geschwindigkeitsreferenz ergibt sich nun wie in (4.6) beschrieben,

$$\hat{v}_{ref} = \mathrm{M}\hat{c}_{ref}.$$

Aufgrund der Indikatoren M_v und M_{div} ist das dimensionslose Geschwindigkeitsfeld beschränkt,

$$\max_{\underline{x}\in\Omega} |\underline{v}| = \frac{\max_{\underline{x}\in\Omega} |\hat{\underline{v}}|}{\hat{v}_{ref}} = \frac{1}{C_v}\frac{\mathrm{M}_v}{\mathrm{M}},$$

und die Divergenzfreiheit im Fall einer verschwindenen Machzahl garantiert,

$$\max_{\underline{x}\in\Omega} |\nabla \cdot \hat{\underline{v}}| = \frac{\max_{\underline{x}\in\Omega} |\nabla \cdot \underline{v}|}{\hat{v}_{ref}} = \frac{1}{C_{div}^2}\frac{\mathrm{M}_{div}^2}{\mathrm{M}}.$$

Der Vorgang der Entdimensionalisierung wird durch die Bestimmung der charakteristischen Zeitskala abgeschlossen, welche sich mit der durch (4.6) vorliegenden Referenzgeschwindigkeit $\hat{v}_{ref}$ zu

$$\hat{t}_{ref} = \frac{\hat{l}_{ref}}{\hat{v}_{ref}}.$$

ergibt. Damit scheint die Anzahl der Iterationen von $\hat{l}_{ref}$ abzuhängen. Da die Zeitschrittweite jedoch über die CFL–Bedingung mittels

$$\Delta t = (\text{CFL–Zahl})\frac{\Delta x}{|\underline{v}| + c}$$

gesteuert wird, kürzt sich der Einfluß der Entdimensionalisierung gerade wieder heraus.

4.3 Zeitliche Adaption des Entwicklungsparameter M

Da der Entwicklungsparameter M allein aus den Werten des Strömungsfeldes gewonnen wird, ist eine zeitliche Anpassung von M bei einem sich zeitlich in seinem Charakter ändernden Strömungsfeldes von großer Bedeutung.

Eine zeitliche Adaption kann leicht durch ein einfaches Reskalieren nach jedem Zeitschritt erreicht werden. Da die Zerlegung der Variablen in jedem Zeitschritt ausgeführt werden muß, ist eine Berechnung der Indikatoren als auch der Mittelwerte im Vergleich dazu nicht sehr zeitintensiv. Zusätzlich ist es möglich den Rechenaufwand weiter zu reduzieren und ein Reskalieren der Dichte und des Druckes zu vermeiden, falls sich ihre Durchschnittswerte während der rechenzeit nicht wesentlich ändern. Dann muß nur noch das Geschwindigkeitsfeld in jedem Zeitschritt neu reskaliert werden, um die Einflüsse eines sich ändernen Entwicklungsparameter auf das Strömungsfeld zu berücksichtigen.

Darstellung der Bestimmung des Referenzparameters M —

Setze $M_l = 0$.

Bestimme die Indikatoren M_v und M_{div} aus den Daten des Strömungsfeldes.

Berechne einen vorläufigen Entwicklungsparameter M ohne die Informationen aus dem Druckfeld zu nutzen.

Entwicklungsparameter M < 1

Y

Setze $M_l = 1$ und führe die Zerlegung des Druckes entsprechend Abschnitt 4.1.3 durch. In der Zerlegung wird M_l simultan bestimmt.

Berechne den entgültigen Wert des Entwicklungsparameters.

Entwicklungsparameter M < 1

Y

Zerlege den Impuls in seine langwelligen und kurzwelligen Anteile unter Berücksichtigung der Wellenlängeninformation der Druckzerlegung.

$flag = ASYMPTOTIC$

N

$flag = GODUNOV$

N

$flag = GODUNOV$

Entdimensionalisierung aller Datensätze.

$flag == ASYMPTOTIC$

Y

Berechne einen Zeitschritt mit dem vorgestellten Verfahren.

N

Berechne einen Zeitschritt mit einem klassischen Verfahren zur Lösung kompressibler Strömungen.

Redimensionalisierung der Strömungsdaten.

5. Numerische Resultate

Zur Validierung des vorgestellten numerischen Verfahrens betrachten wir zwei Beispiele aus unterschiedlichen Strömungsbereichen, wobei die Eigenschaften des Algorithmus sowohl im schwach kompressiblen Regime als auch im Übergangsbereich vom schwach kompressiblen zum kompressiblen Regime untersucht werden.

In beiden Fällen wurde der Parameter α innerhalb der Bestimmung von M auf $\alpha = 0.12$ gesetzt.

Betrachten wir zuerst den schwach kompressiblen Fall eines langwelligen akustischen Strömungsfeldes eines idealen Gases. Die Dichteverteilung weist einen kurzwelligen stark oszillierenden Wellenzug auf, welcher langsam innerhalb des akustischen Feldes bewegt wird. Dabei sind die Amplituden der kurzwelligen Oszillationen in der gleichen Größenordnung wie der Mittelwert der Dichteverteilung gewählt.

Das Rechengebiet $\Omega = [-51, 51]$ ist äquidistant in 1020 Zellen unterteilt. Wir betrachten periodische Randbedingungen, wodurch numerische Einflüsse der Ränder auf das Innere des Strömungsgebietes ausgeschlossen werden können. Die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(x, t=0) &= \Big(1 + \frac{1}{51}\big(1 + \cos(\frac{2\pi}{102}x)\big) + \Phi(x)\frac{1}{2}\sin(\frac{80\pi}{102}x)\Big)\frac{kg}{m^3}, \\
\hat{v}(x, t=0) &= \sqrt{\gamma}\Big(1 + \cos(\frac{2\pi}{102}x)\Big)\frac{m}{s}, \\
\hat{p}(x, t=0) &= \frac{1}{51^2}\Big(1 + \frac{\gamma}{51}(1 + \cos(\frac{2\pi}{102}x))\Big)\frac{N}{m^2}
\end{aligned}$$

mit

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(1 - \cos(\frac{10\pi}{102}x)\big) & , \text{ falls } 0 \le x \le \frac{204}{10} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Referenz der Länge ist auf $\hat{l}_{ref} = 1\ m$ festgelegt und x sowie t die gemäß Tab. 2.1 ermittelten dimensionslosen Orts- und Zeitvariablen darstellen.

Abbildung 5.1 zeigt die Dichteverteilung zum Ende der Berechnung ($t = 5.071$). Die Amplituden der kurzwelligen Oszillationen sind im Vergleich zu denen aus der Anfangsverteilung fast vollständig erhalten. Bei der gewählten Genauigkeit sind die Amplituden noch sehr stark von dem verwendeten Limiter

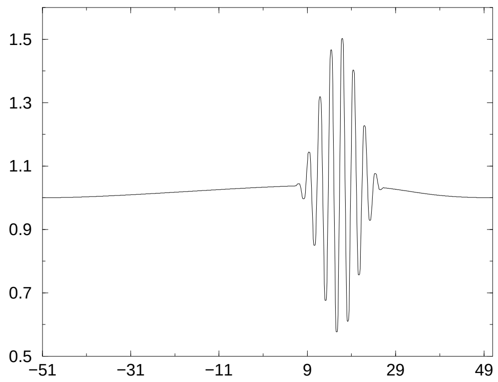


Abbildung 5.1: Dichteverteilung zum Zeitpunkt $t = 5,071$

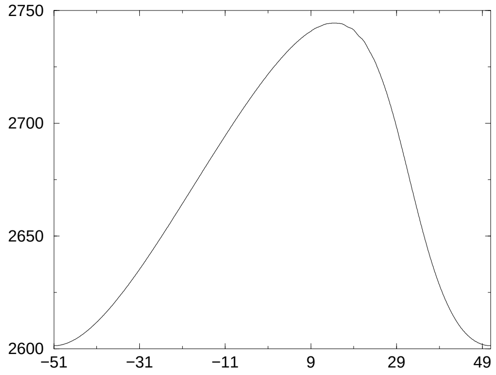


Abbildung 5.2: Druckverteilung

innerhalb der Berechnung der Riemannflüsse abhängig. Erst bei Verfeinerung der Diskretisierung nimmt der Einfluß der Limiter auf die Güte der Lösung ab. In der Berechnung wurde der bekannte Superbee-Limiter verwendet.

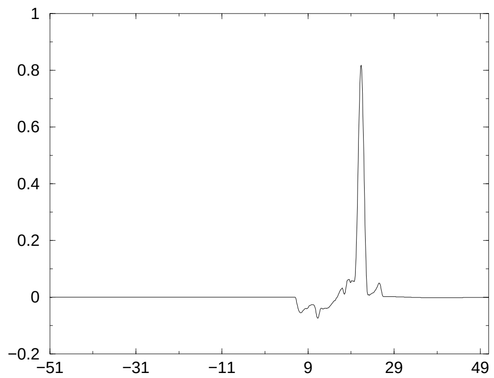


Abbildung 5.3: Druckanteil $p^{(2)}$

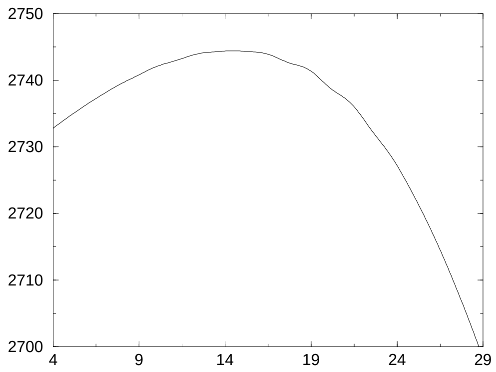


Abbildung 5.4: Ausschnitt aus der Druckverteilung

Der Druck weißt im Gegensatz zur glatten Anfangswertverteilung Oszillationen geringer Amplituden in dem Bereich auf, in dem die Dichteoszillationen auftreten. Diese Oszillationen geben den Einfluß des Druckanteils $p^{(2)}$ wieder, welcher in Abbildung 5.3 dokumentiert ist und sich wiederum auf den Bereich des Wellenzuges der Dichte beschränkt. Die Verteilung von $p^{(2)}$ liefert aufgrund der nichtlinearen Zerlegung keinen direkten Aufschluß über die Gesamtverteilung des Druckes wie die Ausschnittsvergrößerung 5.4 zeigt. Die Verteilung der Geschwindigkeit ist glatt.

Der Verlauf der zeitabhängigen Anpassung des Entwicklungsparameters M ist in Abb. 5.5 aufgezeigt. Die regelmäßigen Schwankungen in den Werten von M

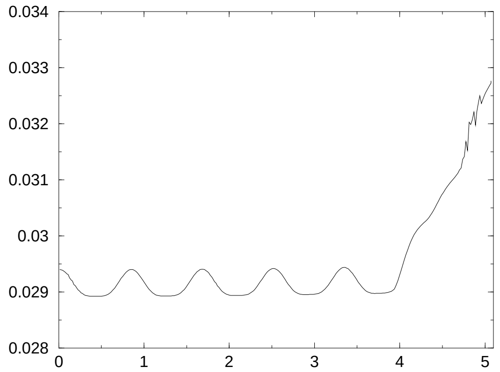


Abbildung 5.5: Zeitabhängige Anpassung von M

im ersten Teil der Berechnung basieren auf der Tatsache, daß sich die akustische Welle schneller als die Dichtestörung bewegt. Damit verändert sich die relative Lage der Dichteoszillationen zu den Extrema der langwelligen Anteile der Strömung. Dies wird von dem Indikator M_v erkannt, der die Entwicklung des Entwicklungsparameters zu Beginn der Berechnung steuert. Zum Ende der Berechnung hat sich die akustische Welle langsam immer stärker aufgesteilt, so daß hier der Indikator M_{div} die weitere Entwicklung von M übernimmt.

Im zweiten Beispiel betrachten wir eine sich zu einem Stoß aufsteilende Welle. Es handelt sich hierbei also um den Übergang eines schwach kompressiblen Strömungsfeldes in ein rein kompressibles.

Wir verwenden wiederum eine äquidistante Unterteilung des Rechengebietes $\Omega = [-22, 44]$ in 330 Zellen und geben periodische Randbedingungen vor. Die Anfangsverteilung lautet

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}(x, t=0) &= \left(0.955 + \frac{1}{11}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\right)\frac{kg}{m^3},\\
\hat{v}(x, t=0) &= \frac{\sqrt{\gamma}}{11}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\frac{m}{s},\\
\hat{p}(x, t=0) &= \left(2\gamma + \frac{\gamma}{11}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\right)\frac{N}{m^2},
\end{aligned}
$$

für $x \leq 0$ sowie

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(x, t=0) &= 0.955 \, \frac{kg}{m^3}, \\
\hat{v}(x, t=0) &= 0 \, \frac{m}{s}, \\
\hat{p}(x, t=0) &= 2\gamma \, \frac{N}{m^2},
\end{aligned}$$

im Fall $x > 0$. Die Referenzlänge ist auf $\hat{l}_{ref} = 1 \; m$ gesetzt.

Abbildung 5.6 zeigt die Dichteverteilung mit und ohne zeitliche Anpassung des Referenzparameters zum Ende der Berechnung, $t = 33$. In der nebenstehenden Abbildung 5.7 ist der zeitliche Verlauf der Werte von M dokumentiert.

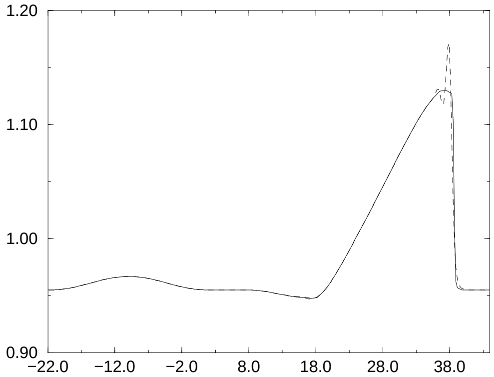


Abbildung 5.6: Dichteverteilung zum Zeitpunkt $t = 33$

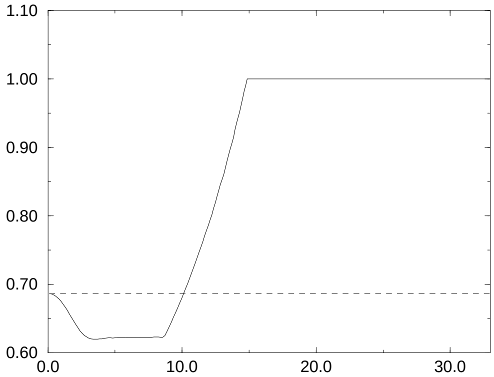


Abbildung 5.7: Verlauf der adaptiven Anpassung von M

Der Vergleich der numerischen Ergebnisse mit und ohne zeitliche Anpassung des Entwicklungsparameters verdeutlicht die Notwendigkeit einer zeitlichen Adaption von M und damit verbunden einer steten Re- und Entdimensionalisierung des betrachteten Strömungsfeldes im Fall einer sich von schwach kompressibel zu kompressibel ändernden Strömung. Obwohl sich die Lösungen in den glatten Bereichen annähernd überdecken, wird der Stoß nur bei dem adaptiven Ansatz richtig und ohne Überschwingen der Lösung aufgelöst. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die asymptotischen Korrekturen $\underline{a}(\underline{u})$ über einen zentralen Ansatz diskretisiert worden sind.

6. Zusammenfassung

Innerhalb des vorliegenden Berichtes wurde eine Finite-Volumen-Approximation der Euler-Gleichungen vorgestellt, deren Gültigkeitsbereich sich vom inkompressiblen Regime bis zu Überschallströmungen erstreckt. Es wurde eine gezielte Integration der aus der asymptotischen Analyse [5, 11] gewonnenen Erkenntnisse vorgenommen. Die erzielte Methode entspricht für transsonische und supersonische Strömungsfelder einem herkömmlichen Upwind-Verfahren, während im Bereich kleiner Mach-Zahlen eine Aufteilung der konvektiven Flußfunktion eine angepaßte Vorgehensweise im asymptotischen Sinne ermöglicht. Durch die physikalisch gesteuerte Anpassung des Referenzparameters liegt ein Algorithmus vor, der seine Diskretisierungsart selbständig dem zugrundeliegenden Strömungsfeld anpaßt. Zudem ergibt sich durch die gewählte Vorgehensweise stets eine divergenzfreies diskretes Geschwindigkeitsfeld im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl. Die Berücksichtigung von Reibungseffekten im Rahmen einer Erweiterung des Verfahrens auf zwei Raumdimensionen stellt einen zukünftigen Entwicklungsschritt dar.

Abschließend können wir feststellen, daß mit dem entwickelten Algorithmus eine selbstadaptive und räumlich wie zeitlich hochauflösende Methode vorliegt, die eine zuverlässige Berechnung instationärer Strömungen in unterschiedlichsten Mach-Zahlbereichen ermöglicht.

7. Danksagungen

Die Autoren danken Prof. Dr. Th. Sonar für sein stetes Interesse und seine konstruktive Unterstützung bei der Erstellung dieses Berichtes.

Desweiteren danken wir Prof. Dr. R. Klein, Prof. Dr. C.-D. Munz, Dr. N. Botta und Dipl.-Math. S. Roller für viele hilfreiche Diskussionen und Anregungen.

Für die Zusammenarbeit im Bereich der diskreten Datenanalyse möchten wir uns herzlich bei PD. Dr. J. Latecki und Dr. R. Lakämper bedanken.

Die Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Projektes So 363/3-1 gefördert.

A. Berechnung der gemittelten Werte sowie der Wellenstärken des modifizierten Roe–Riemannlösers

In diesem Abschnitt wird eine mögliche Berechnung der gesuchten Größen innerhalb des modifizierten Roe–Riemannlösers vorgestellt. Neben den Roe-Mittelwerten $\underline{\tilde{W}}$ sind die Wellenstärken $\tilde{\alpha}_j$ aus den Gleichungssystemen (3.52) und (3.53) zu bestimmen.

Bei zunächst als bekannt vorausgesetzten Roe-Mittelwerten $\underline{\tilde{W}}$ lassen sich die Koeffizienten $\tilde{\alpha}_j$ aus dem Gleichungssystem (3.52),

$$\Delta \underline{u}_{[i,i+1]} = (\underline{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})_L - (\underline{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R = \sum_{j=1}^{3} \tilde{\alpha}_j \underline{\tilde{r}}_j,$$

berechnen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit vernachlässigen wir den Index i und bezeichnen den linken beziehungsweise rechten Zustand an der betrachteten Zellgrenze mit

$$\begin{aligned} \underline{u}_l &:= (\underline{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R, \\ \underline{u}_r &:= (\underline{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})_L. \end{aligned}$$

Folglich läßt sich das System (3.52) als

$$\Delta \underline{u} = \underline{u}_r - \underline{u}_l = \sum_{j=1}^{3} \tilde{\alpha}_j \underline{\tilde{r}}_j$$

schreiben. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3, \\ \Delta m &= (\tilde{v} - \tilde{c}^*)\tilde{\alpha}_1 + \tilde{v}\tilde{\alpha}_2 + (\tilde{v} + \tilde{c}^*)\tilde{\alpha}_3, \\ \Delta(\rho E) &= (\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*)\tilde{\alpha}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{\alpha}_2 + (\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*)\tilde{\alpha}_3. \end{aligned}$$

Wir lösen die erste Gleichung nach $\tilde{\alpha}_3$ auf,

$$\tilde{\alpha}_3 = \Delta\rho - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2, \tag{A.1}$$

und ersetzen die dritte Wellenstärke in der zweiten Gleichung. Durch Auflösen nach $\tilde{\alpha}_1$ ergibt sich

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{c}^*}\Big[\Delta\rho(v + \tilde{c}^*) - \Delta m - \tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2\Big]. \tag{A.2}$$

Für den Koefizienten $\tilde{\alpha}_2$ gilt schließlich

$$(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*)\tilde{\alpha}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{\alpha}_2 + (\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*)\tilde{\alpha}_3 = \Delta(\rho E)$$

$$\begin{aligned}\stackrel{(A.1),(A.2)}{\Leftrightarrow}\quad & -2\mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*\left[\frac{1}{2\tilde{c}^*}\left(\Delta\rho(\tilde{v}+\tilde{c}^*) - \Delta m - \tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{\alpha}_2 - (\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*)\tilde{\alpha}_2 = \Delta(\rho E) - \Delta\rho(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad & -\mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta\rho(\tilde{v}+\tilde{c}^*) + \mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{\alpha}_2 - \tilde{H}^*\tilde{\alpha}_2}_{\stackrel{(3.54)}{=} -\frac{(\tilde{c}^*)^2}{\gamma-1}\tilde{\alpha}_2} \\ & - \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2 = \Delta(\rho E) - \Delta\rho(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad \tilde{\alpha}_2 = -\frac{\gamma-1}{(\tilde{c}^*)^2}\Big[& \Delta(\rho E) - \mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m - \Delta\rho\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*\Delta\rho \\ & + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*\Delta\rho + \mathrm{M}^2\tilde{v}^2\Delta\rho\Big]\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma-1}{(\tilde{c}^*)^2}\left[\Delta\rho(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m - \Delta(\rho E)\right]. \tag{A.3}$$

Zusammenfassend haben wir unter der Voraussetzung der Kenntnis der gemittelten Werte $\underline{\tilde{W}}$ die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Wellenstärken $\tilde{\alpha}_j$ erhalten:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 &= \frac{1}{2\tilde{c}^*}\Big[\Delta\rho(v+\tilde{c}^*) - \Delta m - \tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2\Big], \\ \tilde{\alpha}_2 &= \frac{\gamma-1}{(\tilde{c}^*)^2}\left[\Delta\rho(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m - \Delta(\rho E)\right], \\ \tilde{\alpha}_3 &= \Delta\rho - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2.\end{aligned}$$

Wir setzen die gefundenen Gleichungen (A.1), (A.2) und (A.3) in das verbleibende System, (3.53)

$$\Delta\underline{h} := \Delta\underline{h}_{[i,i+1]} = \underline{h}\left(\underbrace{(\underline{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})_L}_{=\underline{u}_r}\right) - \underline{h}\left(\underbrace{(\underline{u}_{i}^{n+\frac{1}{2}})_R}_{=\underline{u}_l}\right) = \sum_{i=j}^{3}\tilde{\alpha}_j\tilde{\lambda}_j\underline{\tilde{r}}_j,$$

ein. Die erste Gleichung liefert keine weitere Information. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich über leichte Umformungen eine Bestimmungsgleichung der gesuchten gemittelten Geschwindigkeit $\tilde{v}$. Die Berechnungen sind im folgenden ausgeführt:

$$\tilde{\alpha}_1(\tilde{v}-\tilde{c}^*)^2+\tilde{\alpha}_2\tilde{v}^2+\tilde{\alpha}_3(\tilde{v}+\tilde{c}^*)^2=\Delta(mv+p)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(3.57)}{\Leftrightarrow} \quad \tilde{\alpha}_1(\tilde{v}-\tilde{c}^*)^2+\tilde{\alpha}_2\tilde{v}^2+(\Delta\rho-\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2)(\tilde{v}+\tilde{c}^*)^2=\Delta(mv)+\Delta p\\
&\Leftrightarrow \quad -4\tilde{v}\tilde{c}^*\tilde{\alpha}_1-2\tilde{v}\tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2-(\tilde{c}^*)^2\tilde{\alpha}_2=\Delta(mv)+\Delta p-\Delta\rho[\tilde{v}^2+2\tilde{v}\tilde{c}^*+(\tilde{c}^*)^2]\\
&\overset{(3.55)}{\Leftrightarrow} \quad -2\tilde{v}\Big[\Delta\rho(\tilde{v}+\tilde{c}^*)-\Delta m-\tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2\Big]-2\tilde{v}\tilde{c}^*\tilde{\alpha}_2-(\tilde{c}^*)^2\tilde{\alpha}_2\\
&\qquad\qquad =\Delta(mv)+\Delta p-\Delta\rho(\tilde{v}^2+2\tilde{v}\tilde{c}^*)-\Delta\rho(\tilde{c}^*)^2\\
&\overset{(3.56)}{\Leftrightarrow} \quad -(\gamma-1)\Big[\Delta\rho(\tilde{H}^*-\mathrm{M}^2\tilde{v}^2)+\mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m-\Delta(\rho E)\Big]\\
&\qquad\qquad =\Delta(mv)+\Delta p+\Delta\rho(\tilde{v}^2-(\tilde{c}^*)^2)-2\Delta m\tilde{v}\\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{-(\gamma-1)\Delta\rho(\tilde{H}^*-\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2)}_{\overset{(3.54)}{=}-\Delta\rho(\tilde{c}^*)^2}+(\gamma-1)\Delta\rho\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2-(\gamma-1)\mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m\\
&\qquad\qquad +(\gamma-1)\Delta(\rho E)=\Delta(mv)+\Delta p+\Delta\rho\tilde{v}^2-\Delta\rho(\tilde{c}^*)^2-2\tilde{v}\Delta m.
\end{aligned}$$

Mit $(\gamma-1)\Delta(\rho E)=\Delta p+\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2\Delta(mv)$ und $\tau=(\gamma-1)\mathrm{M}^2$ folgt weiter,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\gamma-1)\Delta\rho\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2-(\gamma-1)\mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m+\Delta p+\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{M}^2\Delta(mv)\\
&\qquad\qquad =\Delta(mv)+\Delta p+\Delta\rho\tilde{v}^2-2\tilde{v}\Delta m\\
&\Leftrightarrow \quad \Delta\rho(\frac{1}{2}\tau-1)\tilde{v}^2+\Delta m(2-\tau)\tilde{v}+(\frac{1}{2}\tau-1)\Delta(mv)=0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stellt eine quadratische Bestimmungsgleichung für $\tilde{v}$ dar,

$$\tilde{v}^2-2\frac{\Delta m}{\Delta\rho}\tilde{v}+\frac{\Delta(mv)}{\Delta\rho}=0.$$

Folglich ergibt sich

$$\tilde{v}_\pm=\frac{\Delta m}{\Delta\rho}\pm\left(\left(\frac{\Delta m}{\Delta\rho}\right)^2-\frac{\Delta(mv)}{\Delta\rho}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Unter Ausnutzen der Gleichheit

$$\begin{aligned}
(\Delta m)^2-\Delta\rho\Delta(mv) &= \rho_r^2v_r^2-2\rho_r\rho_lv_rv_l+\rho_l^2v_l^2-(\rho_r-\rho_l)(\rho_rv_r^2-\rho_lv_l^2)\\
&= \rho_r\rho_lv_l^2-2\rho_r\rho_lv_rv_l+\rho_l\rho_rv_r^2
\end{aligned}$$

$$= \quad \rho_r\rho_l(\Delta v)^2$$

gilt weiter

$$\tilde{v}_\pm = \frac{\Delta m}{\Delta\rho} \pm \frac{\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v}{\Delta\rho}.$$

Die gemittelte Geschwindigkeit $\tilde{v}_+$ stellt eine numerisch unsinnige Wahl für die gemittelte Geschwindigkeit dar. Für $v_r \neq v_l$ und $\rho_r = \rho_l$ ist die gemittelte Geschwindigkeit $\tilde{v}_+$ unbeschränkt, denn

$$\begin{aligned}\tilde{v}_+ &= \frac{\rho_r v_r - \rho_l v_l + \sqrt{\rho_r\rho_l}(v_r - v_l)}{\rho_r - \rho_l} \\ &= \frac{(\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l})\sqrt{\rho_r}v_r - (\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l})\sqrt{\rho_l}v_l}{\rho_r - \rho_l} = \frac{\sqrt{\rho_r}v_r - \sqrt{\rho_l}v_l}{\sqrt{\rho_r} - \sqrt{\rho_l}}.\end{aligned}$$

Für $\tilde{v}_-$ gilt hingegen,

$$\begin{aligned}\tilde{v}_- = \frac{\Delta m}{\Delta\rho} - \frac{\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v}{\Delta\rho} &= \frac{\sqrt{\rho_r}v_r + \sqrt{\rho_l}v_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}} \\ &= \frac{\sqrt{\rho_l}}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}\left(\frac{\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\rho_l}}v_r + v_l\right) \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_l}}}\left(\sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_l}}v_r + v_l\right).\end{aligned}$$

Damit setzen wir die gemittelte Geschwindigkeit $\tilde{v}$ als

$$\tilde{v} := \tilde{v}_- = \frac{\sqrt{\rho_r}v_r + \sqrt{\rho_l}v_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}$$

an.

Die letzte Gleichung aus System (3.53) liefert die noch fehlende Bestimmungsgleichung für den Mittelwert $\tilde{H}^*$. Dabei lassen sich die nötigen Umformungen wie folgt vornehmen:

$$\tilde{\alpha}_1(\tilde{v} - \tilde{c}^*)(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*) + \tilde{\alpha}_2\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^3 + \tilde{\alpha}_3(\tilde{v} + \tilde{c}^*)(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*) = \Delta(H^*m)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.57)}{\Leftrightarrow} \quad \tilde{\alpha}_1(\tilde{v}\tilde{H}^* - \tilde{c}^*\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{c}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}(\tilde{c}^*)^2) + \tilde{\alpha}_2\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^3 + (\Delta\rho - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) \\
&\qquad (\tilde{v}\tilde{H}^* + \tilde{c}^*\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{c}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}(\tilde{c}^*)^2) = \Delta(H^*m) \\
&\Leftrightarrow \quad -2\tilde{c}^*\tilde{\alpha}_1(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \tilde{\alpha}_2(\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^3 - \tilde{v}\tilde{H}^* - \tilde{c}^*\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{c}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}(\tilde{c}^*)^2) \\
&\qquad = \Delta(H^*m) - \Delta\rho(\tilde{v} + \tilde{c}^*)(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*) \\
&\overset{(3.55)}{\Leftrightarrow} \quad -\Delta\rho(\tilde{v} + \tilde{c}^*)(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \Delta m(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \tilde{\alpha}_2\tilde{c}^*(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) \\
&\qquad + \tilde{\alpha}_2(\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^3 - \tilde{v}\tilde{H}^* - \tilde{c}^*\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{c}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}(\tilde{c}^*)^2) \\
&\qquad = \Delta(H^*m) - \Delta\rho(\tilde{v} + \tilde{c}^*)(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*) \\
&\overset{(3.56)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\gamma-1}{(\tilde{c}^*)^2}[\Delta\rho(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m - \Delta(\rho E)][\underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^3 - \tilde{v}\tilde{H}^*}_{\overset{(3.54)}{=} -\tilde{v}\frac{(\tilde{c}^*)^2}{\gamma-1}} - \mathrm{M}^2\tilde{v}(\tilde{c}^*)^2] \\
&\qquad = \Delta(H^*m) + \Delta\rho(\tilde{v} + \tilde{c}^*)[\mathrm{M}^2\tilde{v}^2 - \mathrm{M}^2\tilde{v}\tilde{c}^*] - \Delta m(\tilde{H}^* + \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) \\
&\Leftrightarrow \quad -\Delta\rho\tilde{v}\tilde{H}^* + \Delta\rho\mathrm{M}^2\tilde{v}^3 - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2\Delta m + \tilde{v}\Delta(\rho E) - \tau\tilde{v}[\Delta\rho(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \ldots] \\
&\qquad = \Delta(H^*m) - \Delta\rho\mathrm{M}^2\tilde{v}^3 + \Delta\rho\mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{c}^* - \Delta\rho\mathrm{M}^2\tilde{v}(\tilde{c}^*)^2 \\
&\qquad\quad - \Delta\rho\mathrm{M}^2\tilde{v}^2\tilde{c}^* - \Delta m\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2\Delta m \\
&\Leftrightarrow \quad -\Delta\rho\tilde{v}\tilde{H}^* + \tilde{v}\Delta(\rho E) - \tau\tilde{v}[\Delta\rho(\tilde{H}^* - \mathrm{M}^2\tilde{v}^2) + \mathrm{M}^2\tilde{v}\Delta m - \Delta(\rho E)] \\
&\qquad = \Delta(H^*m) - \Delta\rho\tilde{v}\tau[\tilde{H}^* - \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tilde{v}^2] - \Delta m\tilde{H}^* \\
&\Leftrightarrow \quad -\Delta\rho\tilde{v}\tilde{H}^* + \tilde{v}\Delta(\rho E) + \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\Delta\rho\tilde{v}^3 - \tau\mathrm{M}^2\tilde{v}^2\Delta m + \tau\tilde{v}\Delta(\rho E) - \Delta(H^*m) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\Delta\rho\tilde{v}^3 + \Delta m\tilde{H}^* = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \tilde{H}^*(\underbrace{\Delta m - \Delta\rho\tilde{v}}_{\overset{(3.58)}{=}\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v}) + \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\Delta\rho\tilde{v}^3 - \tau\mathrm{M}^2\Delta m\tilde{v}^2 \\
&\qquad\qquad + (\tau+1)\tilde{v}\Delta(\rho E) - \Delta(H^*m) = 0. \qquad\qquad (\mathrm{A}.4)
\end{aligned}
$$

Nun gilt,

$$
\begin{aligned}
(\rho E) &= \rho H^* - p_{\mathrm{NL}} - \mathrm{M}^2 p \\
&= \rho H^* - p_{\mathrm{NL}} - (\gamma-1)\mathrm{M}^2[(\rho E) - \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\rho v^2], \\
\Leftrightarrow \quad (\tau+1)(\rho E) &= \rho H^* - p_{\mathrm{NL}} + \tau\frac{1}{2}\mathrm{M}^2\rho v^2.
\end{aligned}
$$

Da die Funktion p_{NL} räumlich konstant ist, folgt weiter

$$(\tau+1)\Delta(\rho E) = \Delta(\rho H^*) + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tau\Delta(\rho v^2). \tag{A.5}$$

Wir setzen (A.5) in die umgeformte Gleichung (A.4) ein und erhalten

$$\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v\tilde{H}^* + \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\Delta\rho\tilde{v}^3 - \tau\mathrm{M}^2\Delta m\tilde{v}^2 - \Delta(H^*m) + \tilde{v}\Delta(\rho H^*) \\ + \frac{1}{2}\mathrm{M}^2\tau\Delta(\rho v^2)\tilde{v} = 0.$$

Es gilt jedoch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\tilde{v}^2(\tilde{v}\Delta\rho - \Delta m) - \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\Delta m\tilde{v}^2 + \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\Delta(\rho v^2)\tilde{v} \\
&\overset{(3.58)}{=} \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\left[-\tilde{v}^2\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v - \Delta m\tilde{v}^2 + \Delta(\rho v^2)\tilde{v}\right] \\
&\overset{(3.58)}{=} \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\tilde{v}\left[\Delta(\rho v^2) - \sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v\left\{\frac{\Delta m}{\Delta\rho} - \frac{\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v}{\Delta\rho}\right\}\right. \\
&\qquad\qquad\left. - \Delta m\left\{\frac{\Delta m}{\Delta\rho} - \frac{\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v}{\Delta\rho}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\tilde{v}\left[\Delta(\rho v^2) + \frac{\rho_r\rho_l(\Delta v)^2}{\Delta\rho} - \frac{(\Delta m)^2}{\Delta\rho}\right] \\
&= \frac{1}{2}\tau\mathrm{M}^2\tilde{v}\left[\frac{1}{\Delta\rho}\left\{(\rho_r-\rho_l)(\rho_r v_r v_r - \rho_l v_l v_l) + \rho_r\rho_l v_r^2 - 2\rho_r\rho_l v_r v_l + \rho_r\rho_l v_l^2\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left. - \rho_r^2 v_r^2 + 2\rho_r\rho_l v_r v_l - \rho_l^2 v_l^2\right\}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung zu

$$\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v\tilde{H}^* + \tilde{v}\Delta(\rho H^*) - \Delta(H^*m) = 0$$

Auflösen nach $\tilde{H}^*$ und vereinfachen der rechten Seite liefert schließlich

$$\begin{aligned}
\tilde{H}^* &\overset{(3.58)}{=} \frac{\Delta(H^*m)\Delta\rho - \Delta(\rho H^*)\Delta m}{\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v\Delta\rho} + \frac{\Delta(\rho H^*)}{\Delta\rho} \\
&= \frac{(H_r^*\rho_r v_r - H_l^*\rho_l v_l)(\rho_r-\rho_l) - (H_r^*\rho_r - H_l^*\rho_l)(\rho_r v_r - \rho_l v_l)}{\sqrt{\rho_r\rho_l}(v_r-v_l)(\rho_r-\rho_l)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{\Delta(\rho H^*)}{\Delta\rho} \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{\rho_r\rho_l}\Delta v\Delta\rho}\Big[H_r^* v_r\rho_r^2 + H_l^* v_l\rho_l^2 - H_r^* v_r\rho_r\rho_l - H_l^* v_l\rho_r\rho_l \\
& -H_r^* v_r\rho_r^2 - H_l^* v_l\rho_l^2 + H_r^* v_l\rho_r\rho_l + H_l^* v_r\rho_r\rho_l\Big] + \frac{\Delta(\rho H^*)}{\Delta\rho} \\
= \quad & \frac{\sqrt{\rho_r\rho_l}}{\Delta v\Delta\rho}\left[v_r(H_l^* - H_r^*) - v_l(H_l^* - H_r^*)\right] + \frac{\Delta(\rho H^*)}{\Delta\rho} \\
= \quad & -\frac{\sqrt{\rho_r\rho_l}}{\Delta\rho}(H_r^* - H_l^*) + \frac{\Delta(\rho H^*)}{\Delta\rho}.
\end{aligned}
$$

Für die gemittelte Enthalpie $\tilde{H}^*$ ergibt sich somit

$$
\tilde{H}^* := \frac{\sqrt{\rho_r}H_r^* + \sqrt{\rho_l}H_l^*}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}.
$$

Literaturverzeichnis

[1] R. Courant, K. O. Friedrichs, H. Lewy. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Math. Annalen*, (100): 32–74, 1928.

[2] J. H. Ferziger, M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

[3] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1. Wiley & Sons, Chicester, New York, 1988.

[4] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 2. Wiley & Sons, Chicester, New York, 1988.

[5] R. Klein. Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Scheme Based on Low Mach Number Asymptotics I: One-Dimensional Flow. *J. Comput. Phys.*, 121: 213–237, 1995.

[6] J. L. Latecki, R. Lakämper. Polygon Evolution by Vertex Deletion. In preparation.

[7] L. J. Latecki, R. Lakämper. Convexity Rule for Shape Decomposition Based on Discrete Contour Evolution. *Comput. Vision Image Understanding*, 73 (3): 441–454, 1999.

[8] R. LeVeque. A Large Time Step Generalization of Godunov's Method for Systems of Conservation Laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 22 (6): 1051–1073, 1985.

[9] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws.* Birkhäuser, Basel, 1990.

[10] A. Meister. Zur mathematischen Fundierung einer Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen. Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Reihe F, Computational Fluid Dynamics and Data Analysis 1, Hamburg, 1997.

[11] A. Meister. Asymptotic Single and Multiple Scale Expansions in the Low Mach Number Limit. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 60 (1): 256–271, 1999.

[12] A. Meister, Th. Sonar. Finite-volume schemes for compressible fluid flow. *Surv. Math. Ind.*, 8: 1–36, 1998.

[13] T. Schneider, N. Botta, K. J. Geratz, R. Klein. Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Compressible Solver Based on Low Mach Number Asymptotics II: Multi-Dimesional, Variable Density Zero Mach Number Flow. *J. Comput. Phys.*, 155: 248–286, 1999.

[14] J. Sesterhenn. *Zur numerischen Berechnung kompressibler Strömungen bei kleinen Mach-Zahlen.* PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Diss. ETH No. 11334, 1995.

[15] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

[16] H. A. van der Vorst. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13: 631–644, 1992.

[17] G. Volpe. Performance of Compressible Flow Codes at Low Mach Numbers. *AIAA J.*, 31 (1): 49–56, 1993.

[18] J. Weickert. A Review of Nonlinear Diffusion Filtering. *Scale-Space Theory in Computer Visions, Lecture Notes in Comp. Sciences*, 1252: 3–28, 1997.