Hamburger Beiträge
zur Angewandten Mathematik

Zur mathematischen Fundierung einer Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen

Andreas Meister

Reihe F
Computational Fluid Dynamics and Data Analysis 1
Juli 1997

Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik

Reihe A	Preprints
Reihe B	Berichte
Reihe C	Mathematische Modelle und Simulation
Reihe D	Elektrische Netzwerke und Bauelemente
Reihe F	Computational Fluid Dynamics and Data Analysis

Zur mathematischen Fundierung einer Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen

Andreas Meister
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Hamburg
Bundesstraße 55, 20146 Hamburg
e-mail: meister@math.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

Abstrakt

In den vergangenen Jahren konnte Klein [2] erstmalig eine asymptotische Mehrskalenanalyse der in dimensionsloser konservativer Form gegebenen Euler-Gleichungen im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen durchführen und die hieraus gewonnenen Erkenntnisse zur Erweiterung eines numerischen Verfahrens nutzen.

Die vorliegende Arbeit widmet sich der detaillierten Herleitung und mathematischen Fundierung der in [2] beschriebenen Eigenschaften asymptotischer Funktionen innerhalb des gewählten Mehrskalenansatzes.

Im Anschluß an eine kurze Einleitung werden einige grundlegende Aussagen bezüglich Ein- und Mehrskalenentwicklungen bewiesen. Basierend auf einer speziellen dimensionslosen Form der Euler-Gleichungen werden die hierdurch erhaltenen Kenntnisse im Rahmen der durchgeführten Analyse zum Nachweis relevanter Eigenschaften physikalischer Größen im erwähnten Strömungsbereich genutzt.

1. Einleitung

Vielen technischen Problemstellungen liegen Gleichungen zugrunde, die Parameter oder physikalische Größen enthalten, welche trotz ihrer geringen Quantität einen nicht vernachlässigbaren Einfluß auf das Verhalten des Gesamtsystems ausüben.

Beispiele hierfür ergeben sich bei der Umströmung eines Profils geringer Dicke [4, 3] oder bei einem Masse-Feder-Dämpfer-System mit kleiner Masse respektive Dämpfung [1, 3]. Auch bei turbulenten Strömungen zeigt sich, daß die auftretenden Geschwindigkeitsfluktuationen zwar nur wenige Prozent der Hauptströmungsgeschwindigkeit betragen, jedoch eine ausschlaggebende Wirkung auf die Gesamtströmung ausüben, weil sie sich lokal auf die mittlere Strömung wie eine starke Zähigkeitserhöhung auswirken. Bei den im folgenden betrachteten Euler-Gleichungen erweist sich die Mach-Zahl als signifikanter Parameter, da im Grenzfall verschwindender Mach-Zahl das ursprünglich hyperbolische System zu einem elliptisch-hyperbolischen System degeneriert, wodurch unterschiedliche Anforderungen an das numerische Verfahren zur Simualtion der Strömungsfelder gestellt werden.

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit geben wir eine grundlegende Einführung in das Gebiet der asymptotischen Entwicklungen. Neben dem Nachweis fundamentaler Eigenschaften asymptotischer Einskalenentwicklungen beschreiben wir zwei zentrale Probleme hierauf beruhender Ansätze. Die erste Problematik liegt in der Wahl der zugrundeliegenden asymptotischen Folge. Diese Folge muß oftmals ohne genauere Kenntnis über die Eigenschaften der gesuchten Funktion gewählt werden, obwohl ihre geeignete Definiton eine grundlegende Voraussetzung für einen erfolgreichen asymptotischen Ansatz darstellt. Analog zu diesem Sachverhalt weisen wir auch die zweite Tatsache anhand eines einfachen Beispiels nach. Dabei wird deutlich, daß Funktionen existieren, die eine Einskalenentwicklung von vornherein unmöglich machen. In diesen Fällen wird häufig eine Mehrskalenentwicklung benötigt.

Im zweiten Abschnitt widmen wir uns zunächst der Entdimensionalisierung der Euler-Gleichungen. Anschließend formulieren wir den verwendeten Mehrskalenansatz und leiten unter zusätzlichen Bedingungen ein System partieller Differentialgleichungen für die auftretenden asymptotischen Funktionen her. Basierend auf diesen Differentialgleichungen werden daraufhin die von Klein [2] hergeleiteten Eigenschaften der asymptotischen Funktionen mathematisch formuliert und bewiesen.

2. Asymptotische Entwicklungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir fundamentale Grundlagen asymptotischer Ein- und Mehrskalenentwicklungen und beweisen die im Rahmen der Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen benötigten Eigenschaften.

2.1 Einskalenentwicklungen

Asymptotische Entwicklungen basieren auf der Wahl der zugrundeliegenden asymptotischen Folge, die durch die folgende Definition festgelegt ist.

Definition 2.1.1
Eine Folge von Funktion $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt asymptotische Folge, falls*

$$\phi_{n+1}(\varepsilon) = o(\phi_n(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0 \tag{2.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Definition 2.1.2
Sei $u : D \times I \to \mathbb{R}, (\underline{x};\varepsilon) \stackrel{u}{\mapsto} u(\underline{x};\varepsilon)$ *und* $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine asymptotische Folge, dann heißt*

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{x}) \tag{2.2}$$

eine asymptotische N*-term Entwicklung von* u*, falls*

$$u(\underline{x};\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{x}) = o(\phi_N(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0 \tag{2.3}$$

gilt. Die asymptotische Entwicklung heißt gleichmäßig gültig, falls (2.3) *gleichmäßig in* D *gilt.*

Bevor wir eine Entwicklung anhand einer konkreten Problemstellung durchführen, erweist es sich als sinnvoll, zunächst einige fundamentale Eigenschaften asymptotischer Entwicklungen zu studieren.

Satz 2.1.3
Sei $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in I\!N}$ *eine asymptotische Folge und* $u_n : D \to I\!R,\ n = 1,\dots,N$ *gegeben, so daß*

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x}) \tag{2.4}$$

eine asymptotische N*-term Entwicklung der Funktion* $u : D\times I \to I\!R$ *darstellt, dann gilt*

$$u(\underline{x};\varepsilon) - \sum_{n=1}^{k} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x}) = o(\phi_k(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0$$

für $k = 1,\dots,N$ *und*

$$u(\underline{x};\varepsilon) - \sum_{n=1}^{k} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x}) = O(\phi_{k+1}(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0$$

für $k = 1,\dots,N-1$.

Beweis:

Da (2.4) eine asymptotische Entwicklung der Funktion u darstellt, gilt

$$u(\underline{x};\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x}) = \phi_N(\varepsilon)u_N(\underline{x}) + o(\phi_N(\varepsilon)) = O(\phi_N(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0.$$

Wegen $\phi_N(\varepsilon) = o(\phi_{N-1}(\varepsilon))\ \varepsilon \to 0$ folgt

$$u(\underline{x};\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x}) = o(\phi_{N-1}(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0,$$

wodurch sich der Beweis direkt mittels einer sukzessiven Dekrementierung der Summationsgrenze ergibt. □

Stellt $\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x})$ für alle $N \in I\!N$ eine asymptotische Entwicklung von u dar, so schreiben wir auch

$$u(\underline{x};\varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x}),\ \varepsilon \to 0.$$

Als direkte Folgerung des Satzes 2.1.3 erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 2.1.4
Sei $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in I\!N}$ *eine asymptotische Folge und* $u(\underline{x};\varepsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x})$, $\varepsilon \to 0$, *dann gilt*

$$u(\underline{x};\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon)u_n(\underline{x}) = O\left(\phi_{N+1}(\varepsilon)\right),\ \varepsilon \to 0$$

für alle $N \in I\!N$.

Neben der zunächst willkürlich wählbaren asymptotischen Folge benötigen wir zur Bestimmung einer asymptotischen N-term Entwicklung eine Vorschrift zur Berechnung der Funktionen $u_n,\ n = 1, \ldots, N$.

Satz 2.1.5
Sei $u : D \times I \to I\!R$ gegeben und $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in I\!N}$ eine asymptotische Folge, dann stellt die Summe

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{x})$$

genau dann eine asymptotische N-term Entwicklung der Funktion u dar, wenn für alle $\underline{x} \in D$

$$u_n(\underline{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(\underline{x};\varepsilon) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \phi_k(\varepsilon) u_k(\underline{x})}{\phi_n(\varepsilon)},\ n = 1, \ldots, N \tag{2.5}$$

gilt.

Beweis:

Satz 2.1.3 besagt, daß eine asymptotische N-term Entwicklung stets auch die asymptotischen k-term Entwicklungen für $k < N$ beinhaltet. Daher muß der Beweis lediglich für $n = N$ durchgeführt werden. Hierfür erhalten wir die Äquivalenz unmittelbar aus der Gleichung

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{u(\underline{x};\varepsilon) - \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{x})}{\phi_N(\varepsilon)} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{u(\underline{x};\varepsilon) - \sum\limits_{n=1}^{N-1} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{x})}{\phi_N(\varepsilon)} \right) - u_N(\underline{x}).$$

□

Bei den im folgenden betrachteten Differentialgleichungen liegt in der Regel keine explizite Form der Lösung vor, so daß eine Vorgehensweise gemäß Satz 2.1.5 nicht durchgeführt werden kann. Der Satz beinhaltet jedoch bei gegebener asymptotischer Folge zum einen die Eindeutigkeit der asymptotischen N-term Entwicklung und zum anderen können wir hiermit auf eine nicht zu vernachlässigende Problematik asymptotischer Entwicklungen aufmerksam machen. Durch die Wahl der asymptotischen Folge wird der Funktionenraum festgelegt, innerhalb dessen die Lösung des Ausgangsproblems gesucht wird, ohne generell Kriterien zur Verfügung zu haben, die die Existenz einer Lösung im betrachteten Funktionenraum sicherstellen, oder zumindest garantieren, daß die gesuchte Funktion bis zu einer gewünschten Fehlerschranke approximiert werden kann. Sei zum Beispiel eine Differentialgleichung gegeben, deren exakte Lösung $u(x;\varepsilon) = (x + \sqrt{\varepsilon})^2$ ist, so können wir bei gewählter asymptotischer Folge $\{\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}\}_{n\in I\!N}$ keine geeignete asymptotische Entwicklung erwarten, da die Lösung nicht durch eine Funktion der Form

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(x)$$

dargestellt werden kann. Dieser Sachverhalt wird auch dadurch verdeutlicht, daß bei Verwendung der Vorschrift (2.5) unter Ausnutzung der exakten Lösung der Grenzwert zur Festlegung der Funktion $u_2(\underline{x})$ nicht existiert. Im Gegensatz hierzu liegt für $\left\{\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\right\}_{n\in I\!N}$ bereits mit

$$\sum_{n=1}^{3} \phi_n(\varepsilon) u_n(x)$$

die exakte Lösung vor, wenn die Funktionen u_1, u_2, u_3 bei Kenntnis der exakten Lösung durch (2.5) ermittelt wurden. Hieraus ersehen wir, daß der Erfolg einer asymptotischen Analyse eng mit einer geeigneten Wahl der asymptotischen Folge verknüpft ist. Bevor wir Gleichungen zur Berechnung asymptotischer Entwicklungen für homogene Differentialgleichungen beschreiben, werden wir mit dem folgenden Satz eine für die asymptotische Analyse fundamentale Eigenschaft beweisen.

Satz 2.1.6
Sei $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in I\!N}$ eine asymptotische Folge, L_n, $n = 1, \ldots, N$ beliebige von ε unabhängige Terme, dann sind die Aussagen

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) L_n = o(\phi_N(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0, \tag{2.6}$$

und

$$L_n = 0,\ n = 1, \ldots, N. \tag{2.7}$$

äquivalent.

Beweis:

"(2.7) $\Rightarrow$ (2.6)" :
Ergibt sich direkt durch Einsetzen von (2.7) in (2.6).

"(2.6) $\Rightarrow$ (2.7)" :
Annahme: Es gibt Terme $L_1, \ldots, L_N$ mit $\max\limits_{n=1,\ldots,N} |L_n| > 0$, die die Gleichung (2.6) erfüllen. Sei $m = \min\limits_{\substack{n=1,\ldots,N \\ L_n \neq 0}} n$, dann folgt mit (2.6)

$$\sum_{n=1}^{m} \phi_n(\varepsilon) L_n = o(\phi_m(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0.$$

Somit erhalten wir durch

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{m} \phi_n(\varepsilon) L_n}{\phi_m(\varepsilon)} = L_m + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{m-1} \phi_n(\varepsilon) L_n}{\phi_m(\varepsilon)} = L_m$$

einen Widerspruch zur getroffenen Annahme. $\square$

Eine übliche Vorgehensweise bei der Verwendung asymptotischer Entwicklungen für homogene Differentialgleichungen verläuft nach den folgenden Schritten. Zunächst wird mittels einer gewählten asymptotischen Folge $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Ansatz der Form

$$u(\underline{x}; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{x}) + o\left(\phi_N(\varepsilon)\right),\ \varepsilon \to 0$$

für die Lösung u der Differentialgleichung vorgenommen. Anschließend wird der Ansatz in die Differentialgleichungen eingesetzt und diese in die Form

$$\sum_{n=1}^{M} \psi_k(\varepsilon) L_k(u_1, \ldots, u_N) = o\left(\psi_M(\varepsilon)\right),\ \varepsilon \to 0$$

mit $M \in \mathbb{N}$ und einer Folge $\{\psi_k(\varepsilon)\}_{k=1,\ldots,M}$, $\psi_{k+1}(\varepsilon) = o\left(\psi_k(\varepsilon)\right),\ \varepsilon \to 0$ für $k = 1, \ldots, M-1$ geschrieben. Die Operatoren $L_k,\ k = 1, \ldots, M$ sind hierbei unabhängig von ε, wodurch mit Satz 2.1.6 die gesuchten Funktionen $u_n, n = 1, \ldots, N$ durch Lösen der Differentialgleichungen

$$L_k(u_1, \ldots, u_N) = 0,\ k = 1, \ldots, M$$

gewonnen werden können.

2.2 Mehrskalenentwicklungen

Im letzten Abschnitt wurde deutlich, daß ein notwendiges Kriterium für eine erfolgreiche asymptotische Analyse in der geeigneten Wahl der zugrundeliegenden asymptotischen Folge liegt. Viele Problemstellungen weisen jedoch ein Verhalten auf, so daß auch bei einer vorliegenden sinnvollen asymptotischen Folge keine zufriedenstellende asymptotische Entwicklung ermittelt werden kann. Die Ursache dieser Tatsache liegt häufig im Verhalten der betrachteten Differentialgleichung, die im Grenzfall ihren Typ wechselt oder eine Ordnung verliert, so daß die gegebenen Anfangs- oder Randbedingungen auf ein überbestimmtes System führen. Oftmals treten daher in der Lösung u Phänomene auf, die sich auf unterschiedlichen räumlichen oder zeitlichen Skalen bewegen und somit eine Darstellung der Funktion u in der Form (2.2) unmöglich machen.

Betrachten wir hierzu als Beispiel die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\varepsilon^2 u''(x;\varepsilon) + u(x;\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)\sin x,\ x \in (0,\pi), \varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0;\varepsilon) = \varepsilon \text{ und } u'(0;\varepsilon) = 1.$$

Die exakte Lösung lautet

$$u(x;\varepsilon) = \sin x + \varepsilon \cos \frac{x}{\varepsilon},$$

so daß aufgrund der Beschränktheit der Kosinusfunktion die Lösung gleichmäßig für $\varepsilon \to 0$ gegen die Lösung des ungestörten Problems konvergiert, obwohl in diesem Fall die Differentialgleichung zwei Ordnungen verliert und zu einer algebraischen Gleichung mit Anfangsbedingungen degeneriert. Trotz dieser Eigenschaft gilt die folgende Aussage.

Satz 2.2.1
Für die Funktion $u : (0,\pi) \times (0,\varepsilon_1) \to I\!R$

$$u(x;\varepsilon) = \sin x + \varepsilon \cos \frac{x}{\varepsilon} \tag{2.8}$$

existiert keine asymptotische N-term Entwicklung gemäß Definition 2.1.2, *die der Bedingung*

$$u(x;\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(x) = o(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0 \tag{2.9}$$

genügt.

Beweis:

Satz 2.1.5 liefert bei festgelegter asymptotischer Folge $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in I\!N}$ neben der Eindeutigkeit der asymptotischen Entwicklung für eine gegebene Funktion

$u : D \times I \rightarrow I\!R$ auch eine Vorschrift zur Berechnung der asymptotischen Funktionen $u_n : D \rightarrow I\!R$. Da einerseits für $\phi_1(\varepsilon) \gg 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x;\varepsilon)}{\phi_1(\varepsilon)} = 0$$

gilt und andererseits der obige Grenzwert für $\phi_1(\varepsilon) = o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht existiert, folgt mit (2.5), daß o.B.d.A. $\phi_1(\varepsilon) = 1$ gewählt werden kann. Hiermit ergibt sich

$$u_1(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x;\varepsilon)}{\phi_1(\varepsilon)} = \sin x.$$

Da $u(x;\varepsilon) - u_1(x) = \varepsilon \cos \frac{x}{\varepsilon}$ nicht die geforderte Bedingung (2.9) erfüllt, muß die asymptotische Entwicklung mindestens zu einer Zweitermentwicklung erweitert werden. Die Verwendung von $\phi_2(\varepsilon)$ mit $\phi_2(\varepsilon) \gg \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$ kann wegen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x;\varepsilon) - u_1(x)}{\phi_2(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon \cos \frac{x}{\varepsilon}}{\phi_2(\varepsilon)} = 0$$

vernachlässigt werden, so daß lediglich

$$1 \ll \phi_2(\varepsilon) \lll \varepsilon, \; \varepsilon \rightarrow 0 \tag{2.10}$$

eine sinnvolle Zweitermentwicklung liefern kann. Genügt $\phi_2(\varepsilon)$ der Bedingung (2.10), so existiert jedoch der Grenzwert zur Berechnung der Funktion u_2 nicht, wodurch mit u_1 die bestmögliche Einskalenentwicklung vorliegt. □

Satz 2.2.1 verdeutlicht auf eindrucksvolle Weise das Versagen von Einskalenentwicklungen bei Funktionen, die einen Einfluß mehrerer Skalen aufweisen. Für den Fall eines kleinen Parameters ε zeigt sich, daß die Funktionen u_n nur langwellige Effekte beschreiben können, da sie ausschließlich von der Variablen x abhängen und sich der Einfluß des Parameters ε bei dem gewählten Einskalenansatz alleinig in der Amplitude und nicht in der Frequenz auswirken kann. Diese Eigenschaft kommt in dem betrachteten Beispiel dadurch zum Tragen, daß die langwellige Sinusschwingung der Funktion u durch den gewählten Ansatz reproduziert wird, während die für kleine ε hochfrequente Überlagerung nicht dargestellt werden kann. Für spezielle Strömungsfelder werden wir im folgenden detailliert nachweisen, daß der in den Euler-Gleichungen auftretende Druck im Fall einer kleinen Mach-Zahl neben langwelligen Phänomenen auch betragsmäßig kleine, hochfrequente Anteile aufweist. Folglich sollte für eine asymptotische Analyse der Euler-Gleichungen ein Mehrskalenansatz verwendet werden.

Definition 2.2.2
Seien $u : D \times I \to \mathbb{R}, (\underline{x};\varepsilon) \overset{u}{\mapsto} u(\underline{x};\varepsilon)$, $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine asymptotische Folge und $\underline{g} : D \times I \to \tilde{D}$, dann heißt

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{g}(\underline{x};\varepsilon)) \tag{2.11}$$

eine asymptotische N-term Mehrskalenentwicklung von u, falls

$$u(\underline{x};\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\varepsilon) u_n(\underline{g}(\underline{x};\varepsilon)) = o(\phi_N(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0 \tag{2.12}$$

gilt. Die asymptotische Entwicklung heißt gleichmäßig gültig, falls (2.12) *gleichmäßig in D gilt.*

Die Grundidee der Mehrskalenentwicklung liegt in der Verwendung eines im Verhältnis zu D höherdimensionalen Raums $\tilde{D}$, innerhalb dessen D mittels einer durch $\underline{g}$ beschriebenen Mannigfaltigkeit repräsentiert wird. Die genutzten Funktionen u_n sind weiterhin unabhängig vom Parameter ε, können jedoch in Abhängigkeit von der eingeführten Abbildung $\underline{g}$ Phänomene auf unterschiedlichen Skalen repräsentieren. Die durch (2.8) gegebene Funktion kann daher in kanonischer Weise durch eine Mehrskalenentwicklung dargestellt werden. Zur Berücksichtigung der zwei auftretenden Skalen definieren wir die Abbildung

$$\underline{g} : (0,\pi) \times (0,\varepsilon_1) \to \mathbb{R}^2 \text{ durch } \underline{g}(x;\varepsilon) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Mit

$$u_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u_1(\xi_1,\xi_2) = \sin\xi_1$$

und

$$u_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u_2(\xi_1,\xi_2) = \cos\xi_2$$

erhalten wir bei Verwendung der asymptotischen Folge $\{\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$u(x;\varepsilon) - \phi_1(\varepsilon)u_1(\underline{g}(x;\varepsilon)) = \varepsilon\cos\frac{x}{\varepsilon} = o(\phi_1(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0$$

und

$$u(x;\varepsilon) - \phi_1(\varepsilon)u_1(\underline{g}(x;\varepsilon)) - \phi_2(\varepsilon)u_2(\underline{g}(x;\varepsilon)) = 0,$$

so daß bereits mit einer asymptotischen Zweitermmehrskalenentwicklung die Funktion u bei geeigneter Wahl der zugrundeliegenden Abbildung $\underline{g}$ und der asymptotischen Folge $\{\phi_n(\varepsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ exakt dargestellt werden kann.

3. Die Euler-Gleichungen

Die Euler-Gleichungen beschreiben reibungsfreie Strömungen Newtonscher Fluide im Gültigkeitsbereich der Kontinuumsannahme. Sie beinhalten mit den Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses und der Energie drei fundamentale Prinzipien der Physik und stellen ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

Während die Navier-Stokes-Gleichungen bei einer üblichen Entdimensionalisierung mit der Reynolds-Zahl eine für die Strömung charakteristische dimensionslose Kennzahl beinhalten, weisen die dimensionslosen Euler-Gleichungen in der Regel keine solche Größe auf. Um eine asymptotische Analyse der Euler-Gleichungen für den Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl Ma durchführen zu können, erweist es sich als sinnvoll, eine Entdimensionalisierung der Gleichungen derart vorzunehmen, daß das System eine Kennzahl M mit $\mathrm{M} = O_s(\mathrm{Ma})$, $\mathrm{Ma} \to 0$ enthält.

Physikalische Größe	Bezugsgröße	Dimensionslose Größe
Länge	$\hat{L}$	$\underline{x} = \dfrac{\hat{\underline{x}}}{\hat{L}}$
Zeit	$\dfrac{\hat{L}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}$	$t = \dfrac{\hat{t}\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}{\hat{L}}$
Geschwindigkeit	$\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert$	$\underline{v} = \dfrac{\hat{\underline{v}}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}$
Dichte	$\hat{\rho}_\infty$	$\rho = \dfrac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_\infty}$
Druck	$\hat{p}_\infty$	$p = \dfrac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty}$
Totalenergie	$\dfrac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty}$	$E = \dfrac{\hat{E}\hat{\rho}_\infty}{\hat{p}_\infty}$

Tabelle 3.1: Bezugsgrößen und dimensionslose Variablen.

Mach-Zahl	$\mathrm{Ma} = \frac{\lvert\hat{v}\rvert}{\hat{c}}$
Entwicklungsparameter	$\mathrm{M} = \sqrt{\gamma}\mathrm{Ma}$

Tabelle 3.2: Dimensionslose Kennzahlen.

Die Tabelle 3.1 beschreibt die verwendete Transformation der Strömungsgrößen in dimensionslose Variablen und Tabelle 3.2 beinhaltet die dimensionslosen Kennzahlen, wobei der auftretende Isentropenexponent γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen repräsentiert, so daß für Luft $\gamma = 1.4$ gilt. Das Superskript $\hat{}$ kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen, der Index $_\infty$ die Referenzwerte der Anströmung und $\hat{L}$ repräsentiert die charakteristische Bezugslänge.

Bei den betrachteten Strömungsfeldern gehen wir von der physikalisch sinnvollen Annahme aus, daß zu jeder auftretenden Größe $\hat{w} \in \left\{\hat{\rho}, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_d, \hat{p}, \hat{E}\right\}$ Konstanten $r > 0$ und $c > 0$ derart existieren, daß

$$|\hat{w}(\underline{x}, t)| \leq c, \ \forall (\underline{x}, t) \in (\mathbb{R}^d \setminus B_{\underline{x}}(\underline{0}, r)) \times \mathbb{R}_0^+$$

gilt, wobei $B_{\underline{x}}(\underline{0}, r)$ die abgeschlossene d-dimensionale Kugel vom Radius r um den Nullpunkt repräsentiert. Diese Eigenschaft erwarten wir folglich auch von den dimensionslosen Variablen. Um einen sinnvollen Zusammenhang zwischen den vorliegenden physikalischen Zuständen im Fernfeld und den Referenzwerten der Anströmung zu gewährleisten, fordern wir stets

$$\left|\frac{\hat{w}(\underline{x}, t)}{\hat{w}_\infty}\right| \leq c^*, \ \forall (\underline{x}, t) \in (\mathbb{R}^d \setminus B_{\underline{x}}(\underline{0}, r^*)) \times \mathbb{R}_0^+ \tag{3.1}$$

mit Konstanten $r^* > 0$ und $c^* > 0$, die unabhängig von der gewählten Entdimensionalisierung sind.

Bezeichnen wir mit $m_i = \rho v_i$ die i-te Impulskomponente und fassen die Erhaltungsgrößen im Vektor der konservativen Variablen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ m_1 \\ \vdots \\ m_d \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \underline{m} \\ \rho E \end{pmatrix}$$

zusammen, so lassen sich die Euler-Gleichungen unter Verwendung der Enthalpie $H = E + p/\rho$ als System von Erhaltungsgleichungen in der Form

$$\partial_t \underline{u} + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} \underline{f}_j(\underline{u}) = \underline{0} \text{ in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \tag{3.2}$$

schreiben, wobei

$$\underline{f}_j(\underline{u}) = \begin{pmatrix} m_j \\ m_1 v_j + \delta_{1j} \mathrm{M}_\infty^{-2} p \\ \vdots \\ m_d v_j + \delta_{dj} \mathrm{M}_\infty^{-2} p \\ \rho H v_j \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, 3$$

die konvektiven Flußfunktionen repräsentieren. Die Euler-Gleichungen stellen somit ein System von $d+2$ Gleichungen für die $d+3$ Unbekannten $\rho, m_1, \ldots, m_d, \rho E$ und p dar, so daß das System erst durch Hinzunahme der algebraisch gegebenen Zustandsgleichung geschlossen ist. Diese ergibt sich unter Berücksichtigung der beschriebenen Entdimensionalisierung in der Form

$$p = (\gamma - 1)\, \rho \left(E - \frac{\mathrm{M}_\infty^2}{2} |\underline{v}|^2 \right) = (\gamma - 1)\, \rho e, \tag{3.3}$$

wobei e die innere Energie darstellt.

3.1 Ein asymptotischer Mehrskalenansatz für die Euler-Gleichungen

Für die Analyse der Euler-Gleichungen im Bereich einer sehr kleinen Mach-Zahl folgen wir Klein [2], der eine Einskalenentwicklung in der Zeit und eine Zweiskalenentwicklung im Raum vornimmt.

Wir betrachten daher feste aber beliebige $\mathrm{M}_\infty \in I := (0, \mathrm{M}')$ mit $\mathrm{M}' \ll 1$ und definieren für die d-dimensionalen Euler-Gleichungen die Abbildung

$$\underline{g} : \mathbb{R}^{d+1} \times I \to \mathbb{R}^{2d+1}$$

durch

$$(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \stackrel{g}{\longmapsto} (\underline{x}, \mathrm{M}_\infty \underline{x}, t)\,. \tag{3.4}$$

Hierbei ist zu bemerken, daß die Abbildung $\underline{g}$ wie auch einige im folgenden betrachteten physikalischen Größen im Urbildbereich das Intervall I aufweisen, die Entwicklungen jedoch stets für einen festen Entwicklungsparameter M_∞ durchgeführt werden, so daß keine Ableitungen nach dem Entwicklungsparameter vorgenommen werden. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes trennen wir variable und feste Größen stets durch ein Semikolon.

Bezeichne $\mathcal{L}\left(I\!R^m; I\!R^n\right)$ den Raum der linearen Abbildungen vom $I\!R^m$ in den $I\!R^n$ und $D\underline{f} = \left(D_1\underline{f}, \ldots, D_m\underline{f}\right)$ die Ableitung der Funktion $\underline{f} : I\!R^m \to I\!R^n$ im Sinne der Funktionalmatrix, dann gilt

$$D\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \\ \mathrm{M}_\infty \underline{\underline{I}} & \\ & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}\left(I\!R^{d+1}; I\!R^{2d+1}\right),$$

wobei $\underline{\underline{I}}$ die Identität auf dem $I\!R^d$ repräsentiert.

Für die durch

$$\left(f \circ \underline{g}\right)(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right)$$

gegebene Komposition der Funktion $f : I\!R^{2d+1} \to I\!R$ und der Abbildung $\underline{g}$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
&D\left(f \circ \underline{g}\right)(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \\
&= Df\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) \cdot D\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \\
&= \left[D_1 f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right), \ldots, D_{2d+1} f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right)\right] \cdot D\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \\
&= \Big[D_1 f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + \mathrm{M}_\infty D_{d+1} f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right), \ldots, \\
&\quad D_d f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + \mathrm{M}_\infty D_{2d} f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right), \\
&\quad D_{2d+1} f\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right)\Big] \in \mathcal{L}\left(I\!R^{d+1}; I\!R\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Unter Verwendung der asymptotischen Folge $\{\phi_n(\mathrm{M}_\infty) = \mathrm{M}_\infty^{n-1}\}_{n \in I\!N}$ und der durch (3.4) gegebenen Abbildung $\underline{g}$ werden wir im folgenden das Verhalten von Lösungen der Euler-Gleichungen (3.2) untersuchen, bei denen sich jede physikalische Größe $w : I\!R^d \times I\!R_0^+ \times I \to I\!R$ bei festem aber beliebigem Parameter $\mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$ in der Form

$$\begin{aligned}
w(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) &= \sum_{i=1}^{3} \phi_i(\mathrm{M}_\infty)\, w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o\left(\phi_3(\mathrm{M}_\infty)\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0 \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathrm{M}_\infty^{i-1}\, w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

mit

$$w^{(i-1)} : I\!R^d \times I\!R^d \times I\!R_0^+ \to I\!R,\ i = 1,2,3$$
$$(\eta_1, \ldots, \eta_d, \xi_1, \ldots, \xi_d, t) \overset{w^{(i-1)}}{\longmapsto} w^{(i-1)}\,(\eta_1, \ldots, \eta_d, \xi_1, \ldots, \xi_d, t)$$

schreiben läßt und die hierdurch gegebene asymptotische Entwicklung gleichmäßig gültig in $I\!R^d \times I\!R_0^+$ ist. Zusätzlich fordern wir, daß die vorliegende Dreitermmehrskalenentwicklung die gleichmäßig gültigen k-term Mehrskalenentwicklungen für $k = 1,2$ enthält. Für die asymptotischen Funktionen $w^{(0)}$ und $w^{(1)}$ erhalten wir hieraus die folgende Eigenschaft.

Lemma 3.1.1
Sei $w : I\!R^d \times I\!R_0^+ \times (0, \mathrm{M}') \to I\!R$ eine physikalische Größe und die unter Verwendung der durch (3.4) definierten Abbildung gegebene asymptotische Mehrskalenentwicklung

$$w\,(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = \sum_{i=1}^{j} \mathrm{M}_\infty^{i-1}\; w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o\left(\mathrm{M}_\infty^{j-1}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$$

für $j = 1,2,3$ gleichmäßig gültig, dann folgt mit beliebigem aber festem $\alpha > 0$ für die asymptotischen Funktionen

$$w^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(|\underline{x}|^\alpha\right),\ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right),\quad \mathrm{M}_\infty \to 0 \tag{3.7}$$

und

$$w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(|\underline{x}|\right),\ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right),\quad \mathrm{M}_\infty \to 0,\ i = 2,3, \tag{3.8}$$

wobei $B_{\underline{x}}\,(\underline{0}, r) = \{\underline{x} \in I\!R^d \big|\, |\underline{x}| \le r\}$ gilt.

Beweis:

Aufgrund der bezüglich der Entdimensionalisierung geforderten Eigenschaft (3.1) ergibt sich mit beliebigem aber festem $\alpha > 0$

$$w(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = o(r^\alpha),\ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}(\underline{0}, r),\ r \to \infty$$

gleichmäßig für alle $\mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$. Mit der vorausgesetzten gleichmäßigen Gültigkeit von

$$w(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = w^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o(1),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$$

in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ erhalten wir somit für alle $\underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)$

$$w^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{-\alpha}\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0.$$

Zum Nachweis der zweiten Behauptung nutzen wir wiederum die gleichmäßige Gültigkeit der Mehrskalenentwicklung, so daß wir für $i = 2, 3$

$$w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{-1}\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0, \tag{3.9}$$

gleichmäßig für alle $(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ erhalten. Sei $\{\mathrm{M}_{\infty,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann definieren wir eine beliebige Folge $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\underline{x}_n \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_{\infty,n}}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der gleichmäßigen Gültigkeit der Gleichung (3.9) folgt für $i = 2, 3$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}_n, t; \mathrm{M}_{\infty,n})\right)}{\mathrm{M}_{\infty,n}^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}_n, t; \mathrm{M}_{\infty,n})\right)}{|\underline{x}_n|}$$

und somit

$$w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(|\underline{x}|\right), \ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right), \ \ \mathrm{M}_\infty \to 0, \ i = 2, 3.$$

□

An dieser Stelle sei bemerkt, daß der vorgenommene Ansatz (3.6) nicht notwendigerweise zu sinnvollen asymptotischen Gleichungen führen muß. Es wird sich jedoch zeigen, daß mit der gewählten Mehrskalenentwicklung in Kombination mit einigen zusätzlichen physikalischen Annahmen hilfreiche Informationen über das Verhalten der Strömungsgrößen im Bereich kleiner Mach-Zahlen gewonnen werden können.

Lemma 3.1.2
Existiert für die physikalischen Größen w, g, h mit $w = gh$ je eine Dreiterm-mehrskalenentwicklung gemäß (3.6), dann gelten für die Funktionen $w^{(0)}, w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ die Darstellungen

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= g^{(0)}h^{(0)} \\ w^{(1)} &= g^{(0)}h^{(1)} + g^{(1)}h^{(0)} \\ w^{(2)} &= g^{(0)}h^{(2)} + g^{(1)}h^{(1)} + g^{(2)}h^{(0)}. \end{aligned}$$

Beweis:

Der Beweis ergibt sich direkt durch eine Multiplikation der Dreitermmehrskalenentwicklungen der Größen g und h. □

Für die weitere Vorgehensweise erweist es sich als sinnvoll, die Euler-Gleichungen unter Nutzung der Differentialoperatoren D_i in der Form

$$\begin{aligned}\left(D_{d+1}\rho+\sum_{j=1}^{d}D_jm_j\right)(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty) &= 0\\ \left(D_{d+1}m_i+\sum_{j=1}^{d}D_j\left(m_iv_j+\delta_{ij}\mathrm{M}_\infty^{-2}p\right)\right)(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty) &= 0,\ i=1,\dots,d\\ \left(D_{d+1}(\rho E)+\sum_{j=1}^{d}D_j(\rho Hv_j)\right)(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty) &= 0\end{aligned}$$

zu schreiben. Das Einsetzen des Ansatzes (3.6) für die Dichte und alle Impulskomponenten in die Kontinuitätsgleichung liefert unter Verwendung von

$$\begin{aligned}&D_{d+1}\rho(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\\ &= D_{d+1}\left(\sum_{i=1}^{3}\mathrm{M}_\infty^{i-1}\left(\rho^{(i-1)}\circ\underline{g}\right)\right)(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0\\ &= \sum_{i=1}^{3}\mathrm{M}_\infty^{i-1}D_{2d+1}\rho^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&D_jm_j(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\\ &= D_j\left(\sum_{i=1}^{3}\mathrm{M}_\infty^{i-1}\left(m_j^{(i-1)}\circ\underline{g}\right)\right)(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0\\ &= D_jm_j^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)+\mathrm{M}_\infty\left(D_{d+j}m_j^{(0)}+D_jm_j^{(1)}\right)\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)\\ &\quad +\mathrm{M}_\infty^2\left(D_{d+j}m_j^{(1)}+D_jm_j^{(2)}\right)\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0,\end{aligned}$$

$j=1,\dots,d$, die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\left[D_{2d+1}\rho^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} D_j m_j^{(0)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty \left[D_{2d+1}\rho^{(1)} + \sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j} m_j^{(0)} + D_j m_j^{(1)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty^2 \left[D_{2d+1}\rho^{(2)} + \sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j} m_j^{(1)} + D_j m_j^{(2)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&=\ o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0,\ \forall\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\widetilde{\mathcal{D}},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

wobei

$$\widetilde{\mathcal{D}} := \left\{\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in I\!R^d \times I\!R^d \times I\!R_0^+ \,\middle|\, \left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) = \underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty),\ (\underline{x},t)\in I\!R^d \times I\!R_0^+\right\}$$

die durch $\underline{g}$ festgelegte Mannigfaltigkeit in $I\!R^{2d} \times I\!R_0^+$ repräsentiert.

Durch ein analoges Vorgehen erhalten wir mit Lemma 3.1.2 für die Impulsgleichungen

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_\infty^{-2}\left[D_i p^{(0)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty^{-1}\left[D_{d+i} p^{(0)} + D_i p^{(1)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \left[D_{2d+1} m_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} D_j\left(m_i^{(0)} v_j^{(0)} + \delta_{ij} p^{(2)}\right) + D_{d+i} p^{(1)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&=\ o(1),\ \mathrm{M}_\infty \to 0,\ \forall\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\widetilde{\mathcal{D}},\ i = 1,\ldots,d
\end{aligned} \tag{3.11}$$

und für die Energiegleichung

$$\begin{aligned}
&\left[D_{2d+1}(\rho E)^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} D_j (\rho H v_j)^{(0)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty\left[D_{2d+1}(\rho E)^{(1)} + \sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}(\rho H v_j)^{(0)} + D_j(\rho H v_j)^{(1)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty^2\left[D_{2d+1}(\rho E)^{(2)} + \sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}(\rho H v_j)^{(1)} + D_j(\rho H v_j)^{(2)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&=\ o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0,\ \forall\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\widetilde{\mathcal{D}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Zusammenfassend liefert uns die bisherige Analyse der Euler-Gleichungen folgende Aussage. Existiert für jede physikalische Größe w einer Lösung der Euler-Gleichungen (3.2) eine Mehrskalenentwicklung gemäß (3.6), dann erfüllen die entsprechenden asymptotischen Funktionen $w^{(0)}, w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ die Gleichungen (3.10), (3.11) und (3.12).

Um konkrete Aussagen für die jeweiligen Funktionen $w^{(i-1)}$, $i = 1, 2, 3$ treffen zu können, betrachten wir nur Lösungen der Euler-Gleichungen, zu deren physikalischen Größen je eine Mehrskalenentwicklung gemäß (3.6) derart existiert, daß die vorliegenden Gleichungen (3.10) bis (3.12) für alle $\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \in \mathcal{D}$ mit

$$\mathcal{D} := \left\{ \left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \in I\!R^d \times I\!R^d \times I\!R_0^+ \,|\mathrm{M}'\eta_j < \xi_j, j = 1, \dots, d \text{ mit } \mathrm{M}' \ll 1 \right\}$$

erfüllt sind. Dadurch weisen die in den eckigen Klammern auftretenden Terme keine Abhängigkeit von M_∞ auf, so daß mit Satz 2.1.6 die Gleichung (3.10) zu

$$D_{2d+1}\rho^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} D_j m_j^{(0)} = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.13}$$

$$D_{2d+1}\rho^{(1)} + \sum_{j=1}^{d} \left(D_{d+j} m_j^{(0)} + D_j m_j^{(1)} \right) = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.14}$$

$$D_{2d+1}\rho^{(2)} + \sum_{j=1}^{d} \left(D_{d+j} m_j^{(1)} + D_j m_j^{(2)} \right) = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.15}$$

die Gleichungen (3.11) für $i = 1, \dots, d$ zu

$$D_i p^{(0)} = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.16}$$

$$D_{d+i} p^{(0)} + D_i p^{(1)} = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.17}$$

$$D_{2d+1} m_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} D_j \left(m_i^{(0)} v_j^{(0)} + \delta_{ij} p^{(2)} \right) + D_{d+i} p^{(1)} = 0 \text{ in } \mathcal{D} \tag{3.18}$$

und die Gleichung (3.12) zu

$$D_{2d+1} \left(\rho E\right)^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} D_j \left(\rho H v_j\right)^{(0)} = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.19}$$

$$D_{2d+1} \left(\rho E\right)^{(1)} + \sum_{j=1}^{d} \left(D_{d+j} \left(\rho H v_j\right)^{(0)} + D_j \left(\rho H v_j\right)^{(1)} \right) = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.20}$$

$$D_{2d+1} \left(\rho E\right)^{(2)} + \sum_{j=1}^{d} \left(D_{d+j} \left(\rho H v_j\right)^{(1)} + D_j \left(\rho H v_j\right)^{(2)} \right) = 0 \text{ in } \mathcal{D}, \tag{3.21}$$

äquivalent sind. Konsequenterweise fordern wir analog zur Erweiterung des vorliegenden Gültigkeitsbereiches der obigen Differentialgleichungen auch die Unabhängigkeit der in Lemma 3.1.1 nachgewiesenen Eigenschaften (3.7) und (3.8) der asymptotischen Funktionen vom Entwicklungsparameter M_∞. Für die im folgenden betrachteten asymptotischen Funktionen gelte daher stets

$$w^{(0)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)=o\left(|\underline{\eta}|^\alpha\right),\ \underline{\eta}\in\partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},r\right),\quad r\to\infty \tag{3.22}$$

mit beliebigem aber festem $\alpha>0$ und

$$w^{(i)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)=o\left(|\underline{\eta}|\right),\ \underline{\eta}\in\partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},r\right),\quad r\to\infty,\ i=1,2 \tag{3.23}$$

für alle $\left(\underline{\xi},t\right)\in I\!R^d\times I\!R_0^+$.

Ersetzen wir die Differentialoperatoren D_i wieder durch die entsprechenden partiellen Ableitungen, so lassen sich die Gleichungen (3.13) bis (3.21) als asymptotisches System in der Form

$$\partial_t\rho^{(0)}+\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\underline{m}^{(0)} = 0 \tag{3.24}$$

$$\partial_t\rho^{(1)}+\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\underline{m}^{(1)} = -\nabla_{\underline{\xi}}\cdot\underline{m}^{(0)} \tag{3.25}$$

$$\partial_t\rho^{(2)}+\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\underline{m}^{(2)} = -\nabla_{\underline{\xi}}\cdot\underline{m}^{(1)} \tag{3.26}$$

$$\nabla_{\underline{\eta}}p^{(0)} = \underline{0} \tag{3.27}$$

$$\nabla_{\underline{\eta}}p^{(1)} = -\nabla_{\underline{\xi}}p^{(0)} \tag{3.28}$$

$$\partial_t\underline{m}^{(0)}+\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\left(\underline{m}^{(0)}\otimes\underline{v}^{(0)}\right)+\nabla_{\underline{\eta}}p^{(2)} = -\nabla_{\underline{\xi}}p^{(1)} \tag{3.29}$$

$$\partial_t\left(\rho E\right)^{(0)}+\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\left(\rho H\underline{v}\right)^{(0)} = 0 \tag{3.30}$$

$$\partial_t\left(\rho E\right)^{(1)}+\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\left(\rho H\underline{v}\right)^{(1)} = -\nabla_{\underline{\xi}}\cdot\left(\rho H\underline{v}\right)^{(0)} \tag{3.31}$$

$$\partial_t\left(\rho E\right)^{(2)}+\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\left(\rho H\underline{v}\right)^{(2)} = -\nabla_{\underline{\xi}}\cdot\left(\rho H\underline{v}\right)^{(1)} \tag{3.32}$$

schreiben.

3.2 Eine Analyse des asymptotischen Systems

Eine mögliche Vorgehensweise zur Entwicklung eines Verfahrens im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen liegt in der Lösung der im letzten Abschnitt hergeleiteten Differentialgleichungen (3.24) bis (3.32) und einer anschließenden Berechnung jeder physikalischen Größe w gemäß Ansatz (3.6) unter Verwendung der ermittelten asymptotischen Funktionen $w^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$. Diese Vorgehensweise erweist sich bei praxisrelevanten Problemstellungen jedoch zumeist als immens aufwendig, da signifikant mehr Differentialgleichungen gelöst werden müssen, die zudem abhängig vom gewählten Mehrskalenansatz auf einem Integrationsgebiet definiert sind, das eine vielfache Dimension des Ausgangsgebietes besitzt. Im Gegensatz hierzu werden wir in diesem Paragraphen, ausgehend von den Differentialgleichungen (3.24) bis (3.32), Aussagen über die asymptotischen Funktionen herleiten, die uns einen tieferen Einblick in die physikalischen Phänomene einer Strömung im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen liefern. Anschließend werden wir die hierdurch erhaltenen Informationen innerhalb eines Verfahrens zur Berechnung der kompressiblen Euler-Gleichungen nutzen und somit den Anwendungsbereich der Methode bis in den Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl erweitern.

Den ersten Indikator für den Wechsel der dimensionslosen Euler-Gleichungen (3.2) von einem hyperbolischen zu einem hyperbolisch-elliptischen System erkennen wir bereits innerhalb der Impulsgleichungen. Der vorliegende Druckgradient wird durch das Quadrat des Entwicklungsparameters M_∞ dividiert, so daß die Impulsgleichungen bei kleiner werdender Mach-Zahl Ma_∞ zunehmend stärker einen elliptischen Charakter aufweisen. Diese Eigenschaft spiegelt sich in der asymptotischen Analyse in den elliptischen Differentialgleichungen (3.27) und (3.28) für die Druckterme $p^{(0)}$ und $p^{(1)}$ wieder. Mit dem folgenden Satz werden wir ausgehend von diesen Gleichungen erste unmittelbare Folgerungen für diese Funktionen nachweisen.

Satz 3.2.1
Es gilt

$$p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = P^{(0)}(t) \tag{3.33}$$

und

$$p^{(1)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = P^{(1)}\left(\underline{\xi}, t\right).$$

Beweis:

Zunächst erhalten wir

$$p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = \tilde{P}^{(0)}\left(\underline{\xi}, t\right) \tag{3.34}$$

direkt aus der Gleichung (3.27). Sei desweiteren $B_{\underline{\eta}}(\underline{0}, r) := \left\{\underline{\eta} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |\underline{\eta}| \leq r\right\}$, dann folgt mit (3.28) für alle $\left(\underline{\xi}, t\right) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_{\underline{\eta}}(\underline{0},r)} \nabla_{\underline{\xi}} p^{(0)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) d\underline{\eta} &= -\int\limits_{B_{\underline{\eta}}(\underline{0},r)} \nabla_{\underline{\eta}} p^{(1)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) d\underline{\eta} \\ &= -\int\limits_{\partial B_{\underline{\eta}}(\underline{0},r)} p^{(1)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) \underline{n}\left(\underline{\eta}\right) ds,\end{aligned}$$

wobei $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)^T$ die äußere Einheitsnormale an $\partial B_{\underline{\eta}}(\underline{0}, r)$ repräsentiert. Unter Berücksichtigung der Gleichung (3.34) erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla_{\underline{\xi}} \tilde{P}^{(0)}\left(\underline{\xi},t\right) &= -\frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}(\underline{0},r)\right|} \int\limits_{\partial B_{\underline{\eta}}(\underline{0},r)} p^{(1)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) \underline{n}\left(\underline{\eta}\right) ds \\ &\overset{(3.23)}{=} O\left(r^{-d}\right) \cdot O\left(r^{d-1}\right) \cdot o(r), \; r \to \infty \\ &= o(1), \; r \to \infty,\end{aligned}$$

wodurch sich

$$p^{(0)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) = P^{(0)}(t)$$

ergibt und mit (3.28)

$$p^{(1)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) = P^{(1)}\left(\underline{\xi},t\right)$$

folgt. □

Hochfrequente Fluktuationen weisen aufgrund der obigen Sätze maximal einen Einfluß der Größenordnung $O(\mathrm{M}_\infty^2)$ auf die vorliegende Druckverteilung aus, während eventuell auftretende langwellige Phänomene Variationen der Größenordnung $O(\mathrm{M}_\infty)$ im Druckfeld hervorrufen können. $O(1)$-Variationen des Drucks treten nur im zeitlichen Verlauf gleichmäßig für das gesamte Strömungsfeld auf und wir erhalten im Fall einer verschwindenden Mach-Zahl die zu erwartende räumlich konstante Druckverteilung.

Satz 3.2.2

Es gilt

$$\nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)}\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right) = \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}\left(\underline{\eta},t\right) = -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t). \tag{3.35}$$

Beweis:

Einsetzen der asymptotischen Entwicklungen (3.6) für ρE und $\rho|\underline{v}|^2$ in die Zustandsgleichung (3.3) liefert

$$\begin{aligned} & p(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \\ = \; & (\gamma - 1)\left((\rho E)^{(0)} + \mathrm{M}_\infty (\rho E)^{(1)} + \mathrm{M}_\infty^2 \left[(\rho E)^{(2)} - \frac{1}{2}\left(\rho|\underline{v}|^2\right)^{(0)}\right]\right)\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) \\ & + o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right), \; \mathrm{M}_\infty \to 0, \end{aligned} \tag{3.36}$$

wodurch

$$p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = (\gamma - 1)\,(\rho E)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \tag{3.37}$$

folgt. Hiermit erhalten wir für den führenden Term der Enthalpie pro Einheitsvolumen $(\rho H)^{(0)}$ wegen $\rho H = \rho E + p$ die Darstellung

$$\begin{aligned} (\rho H)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \quad & = \quad (\rho E)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) + p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \\ & \overset{(3.37)}{=} \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \\ & \overset{\text{Satz 3.2.1}}{=} \quad \frac{\gamma}{\gamma - 1} P^{(0)}(t) \end{aligned} \tag{3.38}$$

und folglich

$$\nabla_{\underline{\eta}}\,(\rho H)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = \underline{0}. \tag{3.39}$$

Schreiben wir die führende asymptotische Energiegleichung (3.30) in der Form

$$0 = \partial_t\,(\rho E)^{(0)} + (\rho H)^{(0)}\,\nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} + \underline{v}^{(0)} \cdot \nabla_{\underline{\eta}}\,(\rho H)^{(0)}$$

und berücksichtigen

$$\partial_t\,(\rho E)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \overset{(3.37)}{=} \frac{1}{\gamma - 1} \partial_t p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \overset{\text{Satz 3.2.1}}{=} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t),$$

so ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (3.38) und (3.39) die Darstellung

$$0 = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P^{(0)}(t) \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right).$$

Aufgrund der Positivität des Drucks folgt

$$\nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} \left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t).$$

□

Bei der asymptotischen Analyse gehen wir von zwei unterschiedlichen Regimen aus. Im ersten Regime betrachten wir Strömungsfelder, deren räumlicher Anteil $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ der Bedingung

$$d_{\max}(V) = O_s\left(\hat{L}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$$

genügt, wobei

$$d_{\max}(V) := \sup_{\underline{x},\underline{y}\in V} \max_{k=1,\ldots,d} |x_k - y_k| \tag{3.40}$$

gilt. In diesem Regime ist somit V für hinreichend kleine Entwicklungsparameter M_∞ beschränkt und es gilt

$$\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{\mathrm{M}_\infty d_{\max}(V)}{\hat{L}} = 0,$$

so daß der in der asymptotischen Analyse auftretenden Skala $\underline{\xi}$ der langwelligen Phänomene im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen keine Informationen mehr entnommen werden können, da die Frequenzen der langwelligen Effekte im Verhältnis zur Größe des betrachteten Strömungsfeldes unendlich groß werden. Jede asymptotische Funktion $f^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ ist daher konstant auf der langwelligen Skala $\underline{\xi}$, so daß

$$\nabla_{\underline{\xi}} f^{(i)} = \underline{0},\ i = 0, 1, 2 \tag{3.41}$$

für jedes Strömungsfeld V mit $d_{\max}(V) = O_s\left(\hat{L}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$ vorausgesetzt werden kann.

Im zweiten Regime liegt ein Strömungsfeld vor, dessen räumlicher Anteil $V = V(\mathrm{M}_\infty)$ die Bedingung

$$d_{\min}(V) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$$

mit

$$d_{\min}(V) := \sup_{\underline{x},\underline{y}\in V} \min_{k=1,\ldots,d} |x_k - y_k| \tag{3.42}$$

erfüllt. In diesem Fall können die führenden asymptotischen Funktionen der Mehrskalenentwicklung auch im Fall beliebig kleiner Mach-Zahlen signifikante

Einflüsse auf der langwelligen Skala $\underline{\xi}$ beinhalten, so daß $O_s(1)$-Variationen der physikalischen Größen auch durch langwellige Phänomene hervorgerufen werden können.

Betrachten wir zunächst das erste Regime.

Satz 3.2.3
Sei $\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}$ für alle $\mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$ über das Integrationsgebiet $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ mit $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$, gleichmäßig beschränkt, dann folgt für alle $t \in I\!R_0^+$

$$\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_V \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \; d\underline{x} = \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{\eta}, t) \; d\underline{\eta}, \tag{3.43}$$

wobei $\tilde{V} = \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} V(\mathrm{M}_\infty)$ gilt.

Beweis:

Aufgrund der Beschränktheit der Integranden erweist sich dieser für alle Nullfolgen $\{\mathrm{M}_{\infty,n}\}_{n \in I\!N}$ aus $(0, \mathrm{M}')$ als Lebesgue-integrierbar über die zugehörigen $\{V(\mathrm{M}_{\infty,n})\}_{n \in I\!N}$. Zudem ergibt sich wegen $\left|V(\mathrm{M}_{\infty,n}) / \tilde{V}\right| = o(1)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ für jede beschränkte Funktion f

$$\int_V f(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \; d\underline{x} = \int_{\tilde{V}} f(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \; d\underline{x} + o(1), \; \mathrm{M}_\infty \to 0. \tag{3.44}$$

Unter Verwendung der Gleichungen (3.5) ergibt sich

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} \left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o(1), \; \mathrm{M}_\infty \to 0, \tag{3.45}$$

so daß mit

$$\begin{aligned} &\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \\ &= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} \left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) \\ &\overset{(3.35)}{=} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{x}, t) \end{aligned} \tag{3.46}$$

punktweise Konvergenz für alle $\underline{x} \in V$ vorliegt. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir mit (3.44)

$$\begin{aligned} &\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_V \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \; d\underline{x} \\ &= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \; d\underline{x} \\ &= \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{\eta}, t) \; d\underline{\eta}. \end{aligned}$$

□

Die Integration der Gleichung (3.35) über $\tilde{V}$ liefert

$$-\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)}\frac{dP^{(0)}}{dt}(t) = \frac{1}{|\tilde{V}|}\int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}\left(\underline{\eta}, t\right)\, d\underline{\eta},$$

so daß unter Verwendung von

$$p\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) = P^{(0)}(t) + o(1),\ \mathrm{M}_\infty \to 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) = \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) + o(1),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$$

und der Positivität der Druckverteilung die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} -\frac{1}{\gamma p\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right)}\frac{\partial p}{\partial t}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) \\
&= \quad -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)}\frac{dP^{(0)}}{dt}(t) \\
&= \quad \frac{1}{|\tilde{V}|}\int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}\left(\underline{\eta}, t\right)\, d\underline{\eta} \\
&\overset{\text{Satz 3.2.3}}{=} \quad \frac{1}{|\tilde{V}|}\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0}\int_{V(\mathrm{M}_\infty)} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right)\, d\underline{x} \\
&= \quad \frac{1}{|\tilde{V}|}\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0}\int_{\partial V(\mathrm{M}_\infty)} \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) \cdot \underline{n}\left(\underline{x}\right)\, ds
\end{aligned}$$

folgt. Im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl ergeben sich somit für Strömungsfelder $V(\mathrm{M}_\infty)$, die der Bedingung $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$, genügen, Veränderungen des vorliegenden Druckfeldes ausschließlich durch auftretende Volumenflüsse über den Rand des Gebietes. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) &\overset{(3.46)}{=} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}\left(\underline{x}, t\right) \\
&\overset{\text{Satz 3.2.2}}{=} -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)}\frac{dP^{(0)}}{dt}(t) \\
&= \frac{1}{|\tilde{V}|}\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0}\int_{\partial V(\mathrm{M}_\infty)} \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) \cdot \underline{n}\left(\underline{x}\right)\, ds,
\end{aligned}$$

so daß im betrachteten Grenzfall die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes stets räumlich konstant ist und in der zeitlichen Änderung durch $O(1)$-Variationen des Drucks oder durch Volumenflüsse über den Raum des beschränkten Strömungsfeldes hervorgerufen wird.

Eine zentrale Aussage für das zweite Regime erhalten wir durch den folgenden Satz.

Satz 3.2.4
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ *mit* $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$ *gegeben, dann folgt*

$$\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{x}, t) = 0 \tag{3.47}$$

und

$$P^{(0)}(t) = P_c^{(0)}. \tag{3.48}$$

Beweis:

Sei $B_{\underline{x}}(\underline{0}, r)$ die abgeschlossenen d-dimensionale Kugel vom Radius r, dann können wir wegen $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$ o.B.d.A.

$$B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right) \subset V(\mathrm{M}_\infty) \ \ \forall \mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$$

voraussetzen. Somit erhalten wir ausgehend von der Gleichung (3.35) durch Integration über $B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)$ die Folgerung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) &= -\frac{1}{\left|B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int_{B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{x}, t)\, d\underline{x} \\ &= -\frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int_{\partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \underline{v}^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \cdot \underline{n}(\underline{\eta})\, ds. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Unter Verwendung der Gleichung (3.22) mit der speziellen Wahl $\alpha = \frac{1}{2}$ erhalten wir für alle $\underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)$

$$v_i^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = o(\mathrm{M}_\infty^{-\frac{1}{2}}),\ \mathrm{M}_\infty \to 0,\ i = 1, \ldots, d. \tag{3.50}$$

Für den führenden Druckterm innerhalb der asymptotischen Entwicklung ergibt sich damit

$$\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) = O\left(\mathrm{M}_\infty^d\right) O\left(\mathrm{M}_\infty^{1-d}\right) o\left(\mathrm{M}_\infty^{-\frac{1}{2}}\right) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{\frac{1}{2}}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0.$$

Mit $P^{(0)}(t) > 0\ \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ folgt

$$\frac{dP^{(0)}}{dt}(t) = 0,$$

wodurch Gleichung (3.45) in Kombination mit (3.35) die aufgestellte Behauptung liefert. □

Viele Verfahren zur Berechnung inkompressibler Strömungen basieren auf der Voraussetzung einer räumlich und zeitlich konstanten Dichteverteilung. Hierdurch ergibt sich die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes als unmittelbare Folgerung aus der Kontinuitätsgleichung. Oftmals erweist sich die für das Dichtefeld getroffene Annahme aus physikalischer Sicht jedoch als zu restriktiv.

Mit Satz 3.2.4 liegt für das Regime der langwelligen Akustik der Nachweis vor, daß sich die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeitsverteilung im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl auch in der vorgenommenen asymptotischen Analyse der Euler-Gleichungen ergibt. Interessanterweise folgt diese Aussage bei dem verwendeten Ansatz ohne die beschriebene Bedingung an die Dichteverteilung und folglich auch nicht aus der Kontinuitätsgleichung, sondern auf der Basis der Energiegleichung in Kombination mit der Eigenschaft (3.33) des führenden Druckterms, die sich aus den Impulsgleichungen (3.27) und (3.28) ergibt.

Betrachten wir eine quasistatische und adiabate Strömung, so erhalten wir für die Entropie $s = p/\rho^\gamma$ aufgrund der vorliegenden Isentropie

$$0 = \frac{Ds}{Dt}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\rho^\gamma(\underline{x}, t)} \frac{Dp}{Dt}(\underline{x}, t) - \frac{\gamma p(\underline{x}, t)}{\rho^{\gamma+1}(\underline{x}, t)} \frac{D\rho}{Dt}(\underline{x}, t),$$

wobei die substantielle Ableitung

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}}$$

die zeitliche Änderung entlang einer Bahnlinie beschreibt. Aufgrund der Positivität der Druck- und Dichteverteilung erhalten wir somit

$$\frac{1}{\gamma} \frac{D \ln p}{Dt}(\underline{x}, t) = \frac{D \ln \rho}{Dt}(\underline{x}, t).$$

Satz 3.2.5
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ *mit* $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ *gegeben, dann gilt*

$$\frac{D \ln \rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \frac{1}{\gamma} \frac{D \ln P^{(0)}}{Dt}(t) \quad mit \quad \frac{D}{Dt} = \partial_t + \underline{v}^{(0)} \cdot \nabla_{\underline{\eta}}.$$

Beweis:

Ausgehend von der führenden Kontinuitätsgleichung erhalten wir

$$\frac{D\rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = -\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t)\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\underline{v}^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t),$$

so daß mit Satz 3.2.2 in Kombination mit der Positivität der Druck- und Dichteverteilung die Darstellung

$$\frac{1}{\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t)}\frac{D\rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)}\frac{DP^{(0)}}{Dt}(t)$$

liefert. Hieraus ergibt sich direkt der behauptete Zusammenhang. □

Der obige Satz zeigt, daß die führenden Terme der asymptotischen Entwicklungen für Dichte, Druck und Geschwindigkeit der Gleichung genügen, die sich für die beiden physikalischen Größen innerhalb einer quasistatischen und adiabaten Strömung ergibt. Somit kommt dem führenden Druckterm $p^{(0)}$ im Rahmen dieser asymptotischen Entwicklung die Bedeutung einer thermodynamischen Variablen zu. Im Gegensatz hierzu entnehmen wir dem folgenden Satz, daß die Kontinuitätsgleichung (3.24) im Fall des zweiten Regimes lediglich die Advektion der führenden asymptotischen Dichte $\rho^{(0)}$ beschreibt.

Satz 3.2.6
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ mit $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann folgt

$$\frac{D\rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = 0.$$

Beweis:

Der Nachweis ergibt sich direkt durch Einsetzen der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes (3.47) in Verbindung mit Gleichung (3.35) in die führende Kontinuitätsgleichung (3.24). □

Der folgende Satz belegt, daß wir als weitere Konklusion der Analyse nebem dem Druckterm $p^{(0)}$ auch der asymptotischen Funktion $p^{(2)}$ eine spezielle Bedeutung zuordnen können.

Satz 3.2.7
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ mit $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann gilt

$$\left(\partial_t\underline{m}^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}}\cdot\left(\underline{m}^{(0)}\otimes\underline{v}^{(0)}\right) + \nabla_{\underline{\eta}}p^{(2)}\right)(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \underline{0}. \tag{3.51}$$

Beweis:

Die Aussage (3.51) ergibt sich direkt durch Einsetzen der Gleichung (3.41) in die Impulsgleichung (3.29). □

Der Term $p^{(2)}$ kann somit aufgrund der Gleichung (3.51) mit dem in den inkompressiblen Euler-Gleichungen auftretenden Druckterm identifiziert werden.

Im zweiten Regime müssen auch die langwelligen Effekte geeignet berücksichtigt werden. Daher verschwindet $\nabla_{\underline{\xi}} p^{(1)}$ innerhalb der Impulsgleichung (3.29) nicht notwendigerweise und wir können mit den folgenden Sätzen ein System zur Ermittlung der zeitlichen Änderung des asymptotischen Druckterm $p^{(1)}$ herleiten. Als hilfreich erweist es sich hierzu den bezüglich der kurzwelligen Skala vorliegenden Mittelwert einer asymptotischen Größe $w^{(i)}$ im Grenzfall einer verschwinden Mach-Zahl durch einen Überstrich gemäß

$$\overline{w^{(i)}}(\underline{\xi}, t) := \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} w^{(i)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) d\underline{\eta} \tag{3.52}$$

zu beschreiben.

Satz 3.2.8
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ *mit* $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ *gegeben, dann gilt*

$$\overline{\partial_t \underline{m}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) + \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi}, t) = \underline{0}. \tag{3.53}$$

Beweis:

Wegen $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ können wir wiederum o.B.d.A.

$$B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right) \subset V(\mathrm{M}_\infty) \ \ \forall \mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$$

voraussetzen. Aus der vorliegenden Eigenschaft (3.23) des Terms $p^{(2)}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}(\underline{0}, r)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}(\underline{0}, r)} \nabla_{\underline{\eta}} p^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \, d\underline{\eta} \\ = \ & \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}(\underline{0}, r)\right|} \int\limits_{\partial B_{\underline{\eta}}(\underline{0}, r)} p^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \underline{n}(\underline{\eta}) \, ds = o(1), \ r \to \infty. \end{aligned}$$

Aus der Forderung (3.22) erhalten wir für jede Komponente des Tensors $\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}$ die Abschätzung

$$\left(\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}\right)(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{-\frac{1}{2}}\right), \; \forall \underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right), \; \mathrm{M}_\infty \to 0.$$

Eine Mittelung der Impulsgleichung (3.29) liefert somit unter Berücksichtigung des Satzes 3.2.1 die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi}, t) + \overline{\partial_t \underline{m}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) \\
&= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \partial_t \underline{m}^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}\right) + \nabla_{\underline{\eta}} p^{(2)} + \nabla_{\underline{\xi}} p^{(1)} \, d\underline{\eta} \\
&= \underline{0}.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.9
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ *mit* $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ *gegeben, dann gilt*

$$\partial_t P^{(1)}(\underline{\xi}, t) + \gamma P_c^{(0)} \overline{\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) = 0. \tag{3.54}$$

Beweis:

Die Gleichung (3.36) liefert

$$(\rho E)^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \frac{1}{\gamma - 1} p^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \overset{\text{Satz 3.2.1}}{=} \frac{1}{\gamma - 1} P^{(1)}(\underline{\xi}, t), \tag{3.55}$$

so daß wir unter Verwendung der Eigenschaften (3.23) und (3.48) mit einer Mittelung der Energiegleichung (3.31) gemäß (3.52) die Darstellung

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{\int_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \left(\partial_t (\rho E)^{(1)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho H \underline{v})^{(1)} + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho H \underline{v})^{(0)}\right)(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \, d\underline{\eta}}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \\
&\overset{(3.55)}{=} \partial_t P^{(1)}(\underline{\xi}, t) + \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \left(\gamma p^{(0)} \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{v}^{(0)}\right)(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \, d\underline{\eta} \\
&= \partial_t P^{(1)}(\underline{\xi}, t) + \gamma P_c^{(0)} \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{v}^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \, d\underline{\eta}
\end{aligned}$$

erhalten. Aus der Definition des Mittelwertes (3.52) ergibt sich somit die Behauptung. □

Satz 3.2.10
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset I\!R^d$ *mit* $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$ *gegeben und gelte*

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \tilde{\varrho}^{(0)}(\underline{\xi}, t), \tag{3.56}$$

dann folgt

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \varrho^{(0)}(\underline{\xi}) \tag{3.57}$$

und

$$\overline{\partial_t \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) + \frac{1}{\varrho^{(0)}(\underline{\xi})} \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi}, t) = \underline{0}. \tag{3.58}$$

Beweis:

Durch Mittelung der führenden Kontinuitätsgleichung (3.24) erhalten wir mit der Bedingung (3.56) unter Verwendung der aus (3.22) folgenden Abschätzung

$$\left(\rho^{(0)} v_i^{(0)}\right)(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = o(\mathrm{M}_\infty^{-\alpha}),\ \forall \underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0,\ i = 1, \ldots, d$$

die Darstellung

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) &= \partial_t \tilde{\varrho}^{(0)}(\underline{\xi}, t) \\
&= \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \partial_t \tilde{\varrho}^{(0)}(\underline{\xi}, t)\, d\underline{\eta} \\
&= -\frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\rho^{(0)} \underline{v}^{(0)}\right)(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t)\, d\underline{\eta} \\
&= o\left(\mathrm{M}_\infty^{1-\alpha}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0
\end{aligned} \tag{3.59}$$

mit beliebigem aber festem $\alpha > 0$. Somit folgt durch Grenzübergang $\mathrm{M}_\infty \to 0$

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \varrho^{(0)}(\underline{\xi})$$

und wir erhalten die zweite Aussage des Satzes durch Einsetzen von

$$\begin{aligned}
\overline{\partial_t \underline{m}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) &= \overline{\underline{v}^{(0)} \underbrace{\partial_t \rho^{(0)}}_{=0}}(\underline{\xi}, t) + \overline{\rho^{(0)} \partial_t \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) \\
&= \varrho^{(0)}(\underline{\xi}) \overline{\partial_t \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t)
\end{aligned}$$

in die Gleichung (3.53) unter Berücksichtigung der Positivität des führenden Dichteterms. □

Betrachten wir innerhalb der Gleichung (3.59) den Differenzenquotienten anstelle des Differentialquotienten, so erhalten wir bei beliebigem aber festem $\alpha > 0$

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t+\Delta t) - \rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \Delta t \; o\left(\mathrm{M}_\infty^{1-\alpha}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$$

und folglich

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t+\widetilde{\Delta t}) - \rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \Delta t \; o\,(1)\,, \mathrm{M}_\infty \to 0$$

mit $\widetilde{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\mathrm{M}_\infty^{1-\alpha}}$. Dichtevariationen der Größenordnung $O_s(1)$ können somit nicht auf Zeitskalen der Größenordnung $O\left(\mathrm{M}_\infty^{1-\alpha}\right)$ auftreten. Um $O_s(1)$-Veränderungen der Dichte erwarten zu dürfen, müssen daher längere Zeitabschnitte $\left(\text{zum Beispiel in der Größenordnung } O_s\left(\frac{\hat{L}}{|\underline{\hat{v}}_\infty|\mathrm{M}_\infty}\right)\right)$ betrachtet werden.

Bemerkung 1
Setzen wir innerhalb der Gleichungen (3.54) und (3.58) für den Geschwindigkeitsvektor die Vertauschbarkeit der Mittelwertbildung mit der Differenzierbarkeit nach der Zeit respektive aller partiellen Ableitungen bezüglich der langwelligen Sakla voraus, so erhalten wir mit

$$\partial_t P^{(1)}(\underline{\xi},t) + \gamma P_c^{(0)} \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi},t) = 0 \tag{3.60}$$

$$\partial_t \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi},t) + \frac{1}{\varrho^{(0)}(\underline{\xi})} \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi},t) = \underline{0} \tag{3.61}$$

ein System partieller Differentialgleichungen. Hiermit kann bei gegebener räumlicher Verteilung der führenden asymptotischen Druck- und Dichteterme die zeitliche Veränderung des Terms $P^{(1)}$ ermittelt werden.

Fordern wir zudem $\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \partial_t \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi},t) = \partial_t \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi},t)$, so erhalten wir durch Kombination von (3.60) und (3.61) die Wellengleichung

$$\partial_t^2 P^{(1)}(\underline{\xi},t) - \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \left(c(\underline{\xi}) \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi},t)\right) = 0$$

mit

$$c(\underline{\xi}) = \frac{\gamma P_c^{(0)}}{\varrho^{(0)}(\underline{\xi})},$$

wodurch deutlich wird, daß der asymptotische Term $P^{(1)}$ langwellige akustische Phänomene beschreibt.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Mit der vorliegenden Arbeit liegt eine detaillierte Herleitung und mathematische Absicherung der Kleinschen Mehrskalenasymptotik der Euler-Gleichungen für den Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen vor.

Durch das einführende erste Kapitel wird dem mit diesem Gebiet noch nicht vertrauten Leser ein erster Einstieg gegeben und zudem die für die asymptotische Analyse der Euler-Gleichungen benötigten Grundlagen geliefert.

Die durch das zweite Kapitel mathematisch fundierten Eigenschaften der asymptotischen Funktionen innerhalb des verwendeten Mehrskalenansatzes können als Grundlage zur Erweiterung numerischer Verfahren im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen genutzt werden. Als einen nächsten Schritt in Richtung einer praxisorientierten Methode zur Simulation von Strömungen in Bereichen sehr unterschiedlicher Mach-Zahlen stellt die Entwicklung und Untersuchung geeigneter Indikatoren zum Nachweis der Frequenzen einzelner asymptotischer Funktionen ein wichtiges zukunftiges Aufgabengebiet dar.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des Projektes *„Asymptotisch adaptive Verfahren zur Simulation von Mehrskalenproblemen in der Strömungsmechanik“* von der DFG *So 363/3-1* gefördert.

Ich möchte mich an dieser Stelle sehr herzlich bei den Professoren R. Klein und Th. Sonar und Dr. N. Botta für die vielen hilfreichen Diskussionen bedanken.

Literaturverzeichnis

[1] J. Kevorkian, J. D. Cole. *Multiple Scale and Singular Pertubation Methods*, volume 114 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.

[2] R. Klein. Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Scheme Based on Low Mach Number Asymptotics I: One-Dimensional Flow. *J. Comput. Phys.*, 121: 213–237, 1995.

[3] A. Meister, Th. Sonar. Asymptotische Entwicklungen und ihre Anwendungen in technischen Problemstellungen. Vorlesungsausarbeitung (in Vorbereitung), Universität Hamburg, 1997.

[4] W. Schneider. *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig, 1987.