A A

Was ist Wahrscheinlichkeit?
Konstruktivistische Überlegungen

Christian Hennig

Preprint–No. 98-04 März 1998

INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK

BUNDESSTR. 55, D – 20146 HAMBURG

Was ist Wahrscheinlichkeit? Konstruktivistische Überlegungen

Christian Hennig - Universität Hamburg - Institut für Mathematische Stochastik

13. März 1998

Zusammenfassung: Texte von von Mises (1951), de Finetti (1981), Walley (1991) und Davies (1995) zum Thema „Was ist Wahrscheinlichkeit?“ werden aus konstruktivistischer Sicht (siehe dazu z.B. von Foerster, 1993) diskutiert. Schwerpunkte sind: Herausarbeitung der Annahmen über die Wirklichkeit, die ein Mensch mitakzeptiert, wenn er eines der diskutierten Konzepte akzeptiert; verschiedene Wirklichkeitsebenen, die von den Wahrscheinlichkeitsbegriffen modelliert werden; Diskussion der Gründe für die Annahmen, die die Autoren über den Menschen und die Wirklichkeit machen; Erzeugung von Wirklichkeiten durch modellierende Begriffsbildung.

Ein neues Wahrscheinlichkeitskonzept („diskursive Wahrscheinlichkeiten“) wird entwickelt, das konsensuelle Ansichten von Gruppen modelliert. Diskursive Wahrscheinlichkeiten rekurrieren nicht auf unbeobachtbare Einstellungen oder Phänomene, sondern sind operational definiert. Es wird gezeigt, dass die Annahme der Operationalität bei de Finetti problematisch ist. Es wird bewiesen, dass diskursive Wahrscheinlichkeiten einer Gruppe verträglich sind mit subjektivistischen Wahrscheinlichkeiten bei Mitgliedern der Gruppe.

1 Einführung

Dieser Text ist entstanden anlässlich der Textauswahl zum Seminar „Was ist Wahrscheinlichkeit?“ an der Universität Hamburg im Sommersemester 1998. Da er im Seminar auch gelesen wird, habe ich mich bei der zitierten Literatur[1] beschränkt und gehe auf weitere bedeutsame Autoren wie Carnap, Jeffreys, Good, Koopman oder Savage nicht ein.

Die Zielgruppe des Textes ist nicht klar umrissen; der Text richtet sich an Menschen, die hauptsächlich an mathematischer Statistik, konstruktivistischer Philosophie oder Modellierung menschlicher Denkweisen interessiert sind. Das meiste Vorwissen ist aus dem Bereich der Stochastik erforderlich. Die folgende Übersicht soll das Verständnis für die LeserInnen erleichtern, die die behandelten Texte nicht kennen. Die vier behandelten Autoren sollen für verschiedene Richtungen des Umgangs mit Wahrscheinlichkeiten stellvertretend sein:

Richard von Mises vertritt einen *frequentistischen* Standpunkt. Für ihn ist eine Wahrscheinlichkeit eine physikalische Eigenschaft, nämlich der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses bei unbegrenzter gleichartiger Wiederholung eines Experimentes.

Bruno de Finetti steht für den *personalen Subjektivismus* (manchmal *Bayesianismus* genannt). Für ihn ist eine Wahrscheinlichkeit der Grad des Vertrauens eines Subjekts in das

[1] Die ohne Jahreszahl zitierten Texte sind Seminartexte; dafür siehe den ersten Teil der Literaturliste.

Eintreffen eines Ereignisses bei Unsicherheit. Um diesen Grad in Zahlen auszudrücken, schlägt de Finetti konkrete Operationen (Wettspiele über den Eintritt des Ereignisses, die im Abschnitt 3.2 genauer erläutert werden) vor.

Peter Walley vertritt den Begriff der *unpräzisen Wahrscheinlichkeit.* Auch bei ihm ist die Wahrscheinlichkeit ein Maß für den Glauben eines Subjekts an ein bestimmtes Ereignis, aber er modelliert zusätzlich den Grad der Sicherheit, den diese Wahrscheinlichkeitszuweisung für das Subjekt hat. Auch sein Begriff hat mit Wetten zu tun: Die *theoretische Bereitschaft* des Individuums zu bestimmten Wettspielen ist ausschlaggebend: Die *untere Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses A ist der höchste Einsatz, den das Subjekt *auf jeden Fall* zu bringen bereit ist für eine Auszahlung von 1 im Falle des Eintreffens von A. Die *obere Wahrscheinlichkeit* ist 1−untere Wahrscheinlichkeit von A^c. Im Unterschied zu den vorherigen Konstruktionen ist damit Walleys Wahrscheinlichkeit nicht eine präzise Zahl zwischen 0 und 1, sondern eine untere und eine obere Schranke eines Intervalls.

P. Laurie Davies steht für eine *datenanalytische* Sichtweise. Bei ihm sind Wahrscheinlichkeiten nicht in der Wirklichkeit oder im Subjekt real vorhanden, sondern liefern künstliche Mechanismen zur Datenerzeugung, die zur Beschreibung realer Daten verwendet werden können.

Nicht alle Gedanken meines Textes in der Diskussion der Konzepte sind neu. Es sei darauf hingewiesen, dass die zitierten Autoren selber die Konzepte der anderen (und häufig sogar ihre eigenen) ausführlich diskutieren. Zum Beispiel werden viele der hier gebrachten kritischen Anmerkungen zu de Finetti und auch zu Walley schon in Walleys Buch genannt. Die konstruktivistische Sichtweise ist dabei allerdings ein neuer Aspekt, so dass ich die Einwände aus einer ganz anderen Denkrichtung heraus entwickle, und sie daher eine ganz andere Bedeutung bekommen.

Charakteristisch für meine Herangehensweise sind dabei die Orientierungen an der Erkenntnistheorie und am beobachtbaren Verhalten von Menschen und Phänomenen im Kontrast zu vermuteten, aber unbeobachtbaren „Naturgesetzen". Die Wahrscheinlichkeitsbegriffe von von Mises, de Finetti und Walley enthalten starke Idealisierungen, die sie von den Beobachtungen trennen. Die Autoren sind sich dessen bewusst, finden das offenbar aber nicht weiter problematisch, da es in ihren Wirklichkeiten anscheinend bereits vor der Beobachtung ideale Wahrscheinlichkeiten gibt, die man nur nicht genau kennen kann. Ich werde herausarbeiten, dass die Begriffe der Autoren, wenn man diese Annahme weglässt, sogar vereinbar sind, abgesehen davon, dass sie alle den Terminus „Wahrscheinlichkeit" belegen.

Der Anspruch einer *operationalen* (de Finetti) oder *behaviouristischen* (Walley) Begriffsbildung wird für mich nicht überzeugend eingelöst. Ich werde Gründe nennen, die angegebenen Operationen oder Vehaltensweisen für kaum realisierbar zu halten[2].

Die starke Idealisierung scheint mir unter anderem dadurch begründet zu sein, dass die von den Autoren getroffenen Annahmen mathematisch bequeme Axiome (z.B. Additivität) ermöglichen, während sich das alltägliche Leben dieser Axiomatisierung widersetzt. Die Vorgehensweise der Autoren mag sinnvoll sein, wenn man mathematische Axiomatisierung des tatsächlichen oder kohärenten[3] Verhaltens oder bestimmter Naturphänomene als wünschenswert voraussetzt. Die konstruktivistische Diskussion setzt jedoch früher ein: Ich möchte untersuchen, was Axiomatisierung bedeutet und was sie für Folgen hat. Die Entscheidung, ob man Axiomatisierung will, welche und wofür, soll freigehalten werden.

Der in Abschnitt 4 eingeführte Begriff der *diskursiven Wahrscheinlichkeit* beansprucht daher nicht, eine den anderen Konzepten in irgendeiner Weise überlegene Axiomatisierungsgrundlage

[2] Walley spricht daher auch nur von *Verhaltensdispositionen.*

[3] De Finettis Begriffsbildung ist nicht *deskriptiv,* sondern *normativ.*

zu liefern. Der Akzent liegt bei mir viel stärker als bei de Finetti auf der Operationalität. Es soll eine praktikable Konstruktionsvorschrift für eine Wahrscheinlichkeit gegeben werden, die beim Subjekt vorhandene Wahrscheinlichkeitsvorstellungen, die z.B. einem der anderen Autoren folgen, in keiner Weise ausschließt. Es werden einige mathematische Betrachtungen über den Fall gemacht, dass de Finetti-subjektivistische Individuen diese Vorschrift anwenden. Dabei zeigt sich, dass es für die Individuen sinnvolle Strategien gibt, nach denen die erzeugten diskursiven Wahrscheinlichkeiten de Finettis Axiomen folgen. Eine Gruppe, die das möchte, kann sich auf solche Strategien *einigen*. In bestimmten Situationen gibt es ebenso sinnvolle Vorgehensweisen, für die z.B. die Additivität nicht gilt. Dadurch wird deutlich, inwiefern die Annahme von Axiomensystemen auf *freien Entscheidungen* beruht.

2 Das konstruktivistische Wirklichkeitskonzept

Was trägt eine konstruktivistische Betrachtungsweise zum Thema „Was ist Wahrscheinlichkeit" bei? Der erste Ansatzpunkt liegt im Verhältnis des Konstruktivismus zur Objektivität. Der Mensch hat keinen direkten Zugang zu einer wie auch immer gearteten *wirklichen Wirklichkeit* . Der Terminus „wirkliche Wirklichkeit" stammt von der Bochumer Arbeitsgruppe für Konstruktivismus und Wirklichkeitsprüfung. Er wird im Unterschied zu „Wirklichkeit" verwendet, wobei „Wirklichkeit" auch die personale, also subjektive Konstruktion einer Wirklichkeit, die sich die Einzelperson macht, bedeuten kann. „Wirkliche Wirklichkeit" ist dagegen der Bezeichner für eine objektiv vorhandene „Realität als solches" außerhalb der Einzelperson und unabhängig von BeobachterInnen. Dazu schreibt die Arbeitsgruppe (1992):
Realität kommt nicht einfach durch unsere Sinnesorgane in unseren Kopf hinein und repräsentiert sich dort (Abbildtheorie oder naiver Realismus), sondern sie wird als Wirklichkeit konstruiert. Alle konstruktivistischen Richtungen gehen davon aus, dass es keine Erkenntnis ohne Erkennende gibt und geben kann. Es gibt keine Beobachtungen ohne BeobachterInnen: Alles, was gesagt wird, wird von jemandem gesagt. Da somit jede Erkenntnisaussage über die Welt niemals zu trennen ist von der Person, die die „erkennende" Aussage über die Realität macht, ist klar, dass die Realität als solche nicht erkennbar ist. Dies nennen wir, Glasersfeld folgend, den epistemologischen Solipsismus.
KonstruktivistInnen wird oft zu Unrecht vorgeworfen, sie würden keine außerhalb von ihnen existierende Welt anerkennen (*ontologischer Solipsismus*). Tatsächlich ist eine außerhalb des Individuums existierende Welt Bestandteil der Wirklichkeit, wenn das Individuum sie konstruiert. Eine solche Konstruktion ist auch bei KonstruktivistInnen normalerweise anzutreffen. Insbesondere beobachten KonstruktivistInnen gerne, wie mittels Kommunikation Wirklichkeit konstruiert wird, wozu sie natürlich Kommunikation und Gemeinschaft konstruieren und beobachten müssen. Heinz von Förster formuliert sogar *Wirklichkeit = Gemeinschaft.* Entsprechend kann man auch von der Wirklichkeit sozialer Systeme sprechen.

Die wirkliche Wirklichkeit ist also unbeobachtbar. Aus ihrer Beschaffenheit kann nichts gefolgert werden und sie ist daher ein uninteressantes Konzept. Das ist unabhängig von der Frage nach ihrer tatsächlichen Existenz, die allerdings ebenfalls uninteressant ist[4].

Aus diesen Vorstellungen ergibt sich eine grundsätzliche Kritik an jeder Art von Wissenschaft, die behauptet, „objektive" Aussagen zu machen. Solche Aussagen sind ohne Bedeutung

[4]Der Autor schreibt über *seine* Wirklichkeit. Das sollte beim Lesen eines konstruktivistischen Textes immer beachtet werden, wenn scheinbar absolut klingende Formulierungen auftauchen. Er wird sogar später noch weiter gehen und behaupten, dass es bestimmte Dinge *nicht gibt.* Damit meint er nur, dass er keinen Grund sieht, sie sich zu konstruieren. Um keine Missverständnisse aufkommen zu lassen: Die meisten konstruktivistischen AutorInnen betrachten die meisten soliden materiellen Erscheinungen als Bestandteile der (ihrer) Wirklichkeit. Wir müssen nicht darüber streiten, ob es Würfel gibt. Problematischer wird die Sache bei abstrakteren Konzepten wie „nationaler Identität", „unterdrückten Trieben" etc.

- jedenfalls ohne Bedeutung bezüglich dessen, was vorgeblich ihr Inhalt ist, nämlich der wirklichen Wirklichkeit. Allerdings haben derlei Aussagen offenbar Einfluss. Wirkliche Wirklichkeit ist immer normativ. Falls in einem sozialen System ein Faktum[5] als bekannte wirkliche Wirklichkeit behandelt wird, sind alle Konsequenzen daraus zwingend. Das heißt:

- Wer die wirkliche Wirklichkeit nicht anerkennt, wird sozial sanktioniert (z.B. für verrückt erklärt, entlassen etc.).
- Wirkliche Wirklichkeiten schränken Handlungsspielräume ein, denn wenn die Voraussetzungen einer Handlung als „wahr" gelten, glaubt man schnell auch, die Folgen zu kennen[6] und Handlungen mit unangenehmen Folgen verbieten sich von selbst. Die Verantwortung für die Auswahl von Handlungen wird dann den „Sachzwängen" zugeschoben.

Die angesprochenen Folgen verändern sich nur marginal, wenn eine wissenschaftliche Aussage mit dem Hinweis auf die dafür vorgenommenen notwendigen Vereinfachungen und Idealisierungen als „nur approximativ gültig" bezeichnet wird. Eine solche Bezeichnung setzt immer eine wirkliche Wirklichkeit voraus („approximativ relativ wozu?"), und der Umgang mit solchen Aussagen ist kaum zu unterscheiden vom Umgang mit angeblich objektiv gültigen Aussagen.

Im übrigen besteht eine Nachfrage nach wirklicher Wirklichkeit, die von der Wissenschaft bedient wird. Ihre wesentlichen Gründe:

- Wirkliche Wirklichkeit ist ein allgemein anerkanntes Rechtfertigungsinstrument. Zum Beispiel lässt sich Rationalisierung viel schöner mit den Gesetzen des Marktes rechtfertigen als mit persönlicher Gewinnsucht.
- Aus wirklicher Wirklichkeit lassen sich Handlungsanweisungen gewinnen, die anscheinend von der Willkür der Handelnden unabhängig sind. Das heisst, dass man Entscheidungen treffen kann, ohne dass man selber dafür verantwortlich gemacht werden kann. Der Gedanke, dass sich die Willkür damit nur in die Auswahl der „gültigen" wirklichen Wirklichkeit verschiebt, wird außerhalb konstruktivistischer Kreise selten geäußert. Gute Beispiele dafür finden sich zuhauf in der unkritischen Anwendung statistischer Verfahren in den Wissenschaften, Wirtschaft und Politik. Das Problem liegt dabei weniger in der Anwendung selber, als darin, dass die willkürlichen Entscheidungen der AkteurInnen der Diskutierbarkeit entzogen werden.

In neuerer Zeit wird im Zusammenhang mit wissenschaftlichen Aussagen, die früher „objektiv" hießen, häufiger der Terminus „intersubjektiv gültig" verwendet. Dass wissenschaftliche Aussagen gültig und sinnvoll sein können, wenn man die Regeln des wissenschaftlichen Systems akzeptiert, soll nicht bestritten werden. Zur Begründung einer solchen Entscheidung ist die wirkliche Wirklichkeit jedoch untauglich. Eine Entscheidung gegen diese Regeln, oder einzelne davon, ist immer möglich und nicht notwendig irrational. Feyerabend (1986) zeigt, dass die Missachtung vorhandener Regeln wissenschaftlichen Arbeitens innerhalb der Wissenschaft selbst für den wissenschaftlichen Fortschritt in der Vergangenheit notwendig gewesen ist.

Der zweite Ansatzpunkt einer konstruktivistischen Sichtweise liegt im Begriff „Konstruktion". Wirklichkeiten werden als konstruiert betrachtet. Aus konstruktivistischer Sicht sind folgende Fragen interessant: „Wer konstruiert was, wie, warum und mit welchen Folgen?" Es geht bei der Kritik der Vorstellungen von der wirklichen Wirklichkeit nicht darum, die wissenschaftliche Konstruktion von Wirklichkeiten grundsätzlich zu verdammen. Menschen müssen konstruieren, und es gibt keine Einwände dagegen, das wissenschaftlich zu tun. Das soll in

[5] D.h. etwas *Gemachtes*.

[6] Die Mathematik macht normalerweise Aussagen vom Typ „Wenn Voraussetzung, dann folgt zwingend ...". Nimmt man also wirkliche Wirklichkeit und mathematische Logik zusammen, bekommt man zwingende Folgen.

diesem Zusammenhang heißen: Mit Bezug auf beobachtbare Wirklichkeit und auf begründete und systematische Weise. Dabei entscheidet das sich ständig verändernde soziale System Wissenschaft, was „begründet und systematisch“ ist. Diese Entscheidung wird normalerweise weder einig, noch stabil sein, obwohl viele Kriterien der Wissenschaftlichkeit offenbar auf Verständigung und Einigkeit ausgerichtet sind. Dazu gehört die Empirie, d.h. die Bezugnahme auf Beobachtbares. Obwohl jede Beobachtung von der BeobachterIn abhängt, lässt sich offenbar über Beobachtungen vergleichsweise einfach Einigung herstellen.

Trotz aller Kritik ist daher auch dieser Text ein wissenschaftlicher; es soll auf wissenschaftliche Weise am Diskurs über den Wahrscheinlichkeitsbegriff mitgewirkt werden. Besonders unterstützt werden sollen dabei Konstruktionen, die ohne Rückgriff auf wirkliche Wirklichkeiten auskommen (Davies) oder operationale Konzepte, die Konstruktionsanweisungen geben (de Finetti) und daher dem Subjekt die verantwortliche Arbeit nicht abzunehmen trachten, sondern vereinfachen[7]. Modellvorstellungen über die Wirklichkeit werde ich im Hinblick auf ihre Anbindung an Beobachtbares diskutieren. Dabei soll auch die Frage interessant sein, welche Art von Beobachtungen von den Modellen erst geschaffen werden.

3 Die Wirklichkeit der Wahrscheinlichkeitserfinder

Prinzipiell soll anerkannt werden, dass unterschiedliche Konzepte von „Wahrscheinlichkeit“ - d.h. unterschiedliche personale Wirklichkeiten - im Umlauf sind und es keine objektive Entscheidung über „richtig“ und „falsch“ und auch nicht über „sinnvoll“, „weniger sinnvoll“ und „unsinnig“ gibt[8]. Das gilt nicht nur für die philosophischen oder mathematischen Vorstellungen, sondern auch für die Konstruktionen aus der Alltagswelt. Die Frage „Was ist Wahrscheinlichkeit?“ kann daher keine einfache Antwort haben. Wir können uns aber Vorstellungen über die Wirklichkeit der Wahrscheinlichkeitserfinder[9] machen. Die Frage, ob es in der wirklichen Wirklichkeit tatsächlich Grenzwerte von relativen Häufigkeiten, quantifizierbare Grade subjektiver Ungewissheit oder gar „untere subjektive Wahrscheinlichkeiten“ gibt, ist kein interessantes Diskussionsthema. Die Konzepte sollen als Erfindungen betrachtet werden, die insofern „wirklich“ sind, als dass sie in unsere Wahrnehmung gelangt sind. Da ihr Abstraktionsgrad relativ hoch ist, fällt diese Sichtweise vermutlich bei Wahrscheinlichkeiten - insbesondere bei Begriffen wie „untere Wahrscheinlichkeit“, die sich noch nicht im Alltag etabliert haben - leichter als bei der Frage, ob die Erde sich um die Sonne dreht. Grundsätzlich ist die Problematik dieselbe.

3.1 Richard von Mises und der Frequentismus

Richard von Mises versucht eine *synthetische Begriffsbildung* und räumt die *Unzulänglichkeit der gedanklichen Nachbildung der empirischen Tatsachen* ein. Damit ist bereits klar, dass seine Begriffe keine rein abstrakten Konzepte sein sollen: Er referiert auf *physikalische Eigenschaften* der untersuchten Phänomene. Von Mises rechtfertigt seine Begriffe mit einer Vorstellung von *Wirklichkeitstreue im wesentlichen.* Offenbar vertritt er die Idee „objektiver Realität“. Er erkennt alternative Wahrscheinlichkeitsbegriffe nicht als „wissenschaftlich“ - und damit rational - an. Dieser Umgang mit Begrifflichkeiten wurde bereits in Abschnitt 2 diskutiert. Im Folgenden untersuche ich die Tauglichkeit der von Mises'schen Begriffe als Modellvorstellungen von

[7] *„Es gibt keinen Schlüssel zu einem Wundergarten, in dem zwischen Zaubergräsern und Wunderbäumen die „Probabilitis realis“ blüht. Diese Wunderblumen, die Meinungen ersetzen sollten, würden die Schaffung derselben durch den Verstand erübrigen und damit jene Belastung über unserem Hals, nämlich den Kopf, überflüssig machen“*, schreibt de Finetti.

[8] Natürlich bleibt es jedem Individuum überlassen, sich von eigenen, nach eigenem Dafürhalten schlecht begründeten Vorstellungen zugunsten anderer (z.B. „wissenschaftlicher“) Vorstellungen zu trennen.

[9] Unter den Autoren des Seminars leider keine „-innen“.

beobachtbarer Wirklichkeit.

Der Begriff des *Kollektives* macht die wenigsten Probleme, denn er ist offenbar künstlich und braucht keinerlei Objektivität: Ein Mensch fasst eine Menge von Dingen aus seiner Vorstellungswelt zusammen.

Anders sieht es aus mit der *unendlichen Wiederholbarkeit* und dem *Grenzwert*, gegen den eine relative Häufigkeit streben soll. Ich bezeichne derartige Konstruktionen als „freie Erfindungen“, denn es gibt keinerlei materielle Tatsachen in der Wirklichkeit[10], die mit diesen Begriffen zu tun haben. De Finetti weist darauf hin, dass identische Wiederholungen - und von solchen schreibt von Mises - logisch unmöglich sind, denn schon die Tatsache der Wiederholung stellt eine Veränderung her - abgesehen von solideren Veränderungen wie der Abnutzung eines Würfels. Weiterhin ist das Konzept des Grenzwertes einer Folge bekanntlich unabhängig von der Abänderung beliebig langer endlicher Anfangsstücke der Folge. Ob man also eine Stabilisierung einer relativen Häufigkeit nach 5, 100 oder 100000000 Versuchen feststellt, trägt zur Möglichkeit einer Aussage über einen Grenzwert nichts bei[11].

Ähnlich problematisch ist der Begriff der *Regellosigkeit*, denn offensichtlich muss der Begriff der „Regel“ eingeschränkt werden, um Regellosigkeit wenigstens bei endlichen Ereignisfolgen beobachten zu können. Beliebig phantasievolle Regeln können beliebige endliche Ereinisfolgen determinieren. Von Mises' Einschränkung ist aber offenbar ganz willkürlich. Selbstverständlich gibt es neben der Auswahl jeder k-ten Stelle bei von Mises viele andere Regeln, die man ebenfalls als „nicht zufällig“ empfinden würde, und es dürfte problemlos möglich sein, zu jeder fertig formulierten Menge von Regeln eine Ereignisfolge zu konstruieren, die dem Regellosigkeitsaxiom genügt und offensichtlich nicht regellos ist[12].

Für von Mises sind *Ordnung und Übersicht* die Ziele wissenschaftlicher Begriffsbildung. Dazu trägt er meines Erachtens durch die sehr präzise Formulierung einer weitverbreiteten Konstruktion und die Offenlegung ihrer Konsequenzen bei. Unabhängig von der Objektivitätsfrage wird man viele Subjekte beobachten können, die sich verhalten, *als ob* es bei zufälligen Phänomenen einen wahren Grenzwert der relativen Häufigkeiten gäbe[13]. Mit von Mises ist zu sehen, welche Auslegung des Grenzwertbegriffs die Vorstellung von Wahrscheinlichkeit als relativer Häufigkeit erfordert, dass man eine Idee von Regellosigkeit und der prinzipiellen Möglichkeit von „ungefährer“ unendlicher identischer Wiederholung braucht. Wenn man also ein frequentistisches Argument beurteilen will, muss man sich entscheiden, ob man diese Erfindungen - allgemein oder für den speziellen Sachverhalt - akzeptieren möchte.

3.2 Bruno de Finetti und der Subjektivismus

Der Grundgedanke des Subjektivismus scheint dem des Konstruktivismus ähnlich zu sein. Bei de Finetti gibt es keine Wahrscheinlichkeit außerhalb des Individuums. Er benötigt keinerlei Annahmen über die wirkliche Wirklichkeit irgendwelcher Erscheinungen außerhalb des Subjektes, und seine Argumente zielen offenbar darauf ab, die Verantwortung des Subjektes zu betonen. Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie ist dann, das Subjekt auf *kohärente* Weise zu den Konsequenzen seiner subjektiven Wahrscheinlichkeitsbewertungen zu führen. Allerdings verwendet de Finetti durchaus ein Konzept von *Objektivität*. Objektivität hat bei ihm etwas mit *wahren und falschen Aussagen* zu tun. Mir scheint, dass für sein Objektivitätskonzept kei-

[10] Siehe Fußnote 4.

[11] Der in diesem Zusammenhang auch von Behnen und Neuhaus (1995) verwendete Begriff der „Erfahrungstatsache“ wird in Abschnitt 5 behandelt.

[12] Dieser Einwand ist fast so alt wie von Mises Begriffsbildung, siehe z.B. de Finetti (1993), engl. Übers. eines Textes von 1936.

[13] Interessant wäre, ob von Mises' oder Bernoullis Theorie die Beobachtung solcher Subjekte erst möglich gemacht haben.

nerlei Einigkeit zwischen Individuen über Wahrheit nötig ist. Es genügt, dass *ein* Subjekt für sich entscheidet, dass etwas wahr ist. In diesem Moment begibt es sich allerdings in den Einflussbereich der *Aussagenlogik*. Aus konstruierten Wahrheiten folgen weitere Wahrheiten auf zwingende Weise. Die Gültigkeit der Aussagenlogik wird von de Finetti so wenig bezweifelt wie der Sinn der Kohärenzforderung. Man kann annehmen, was man will, aber was daraus folgt, ist für de Finetti *objektiv*. Die Aussagenlogik wird behandelt, als gehöre sie in den Bereich der wirklichen Wirklichkeit. Dabei ist auch an den Konstruktionen der formalen Aussagenlogik verschiedenerlei Kritik möglich. Problematisch ist vor allem der Bereich der Selbstbezüglichkeit von Aussagen, der die Logik in interne Widersprüche verwickeln kann. Weiterhin kann man gut begründet annehmen, dass die Implikationen fast jeden Satzes, der im täglichen Leben geäußert wird, so komplex und vage sind, dass die formale Logik strenggenommen[14] auf keine auch nur halbwegs interessante Aussage anwendbar ist. Ein Individuum, das de Finettis Wahrscheinlichkeitskonstruktion für sich persönlich übernehmen will, muss also sowohl die Gültigkeit als auch die Anwendbarkeit der formalen Logik akzeptieren. Um zu sehen, wozu die Annahme der Anwendbarkeit führt, mache man sich klar, dass Aussagen, nachdem sie „verrechnet“ wurden, nicht mehr veränderbar sind. Jede Folgerung, die ich aus „Wenn es morgen regnet, gehe ich nicht in den Park“ gezogen habe, wird ungültig, wenn mich eine irgendwie geartete Ausnahme dazu bringt, meine Meinung zu ändern. Formuliere ich „Wenn es morgen regnet, gehe ich in nicht den Park, abgesehen von nicht näher bestimmten Ausnahmen“, ist die Aussagenlogik nicht anwendbar. Ich wäre also gezwungen, alle möglichen Ausnahmen anzugeben! Mir scheint, dass man auch die Anwendbarkeit der Aussagenlogik allenfalls „approximativ“ akzeptieren sollte. In Abschnitt 5 wird gezeigt werden, wie vereinfachende Annahmen im Rahmen der subjektivistischen Formalisierungen die Wahrnehmung einschränken können.

Interessant bei de Finetti ist der *operationale Ansatz*. Bei seiner Definition von Wahrscheinlichkeit gibt er ein Verfahren an, nach dem ein Subjekt einem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuteilen kann. De Finetti beschreibt dieses Verfahren als *Messinstrument*; das lässt darauf schließen, dass er sich die Wahrscheinlichkeit bereits vor dem Verfahren des Messens im Individuum als vorhanden vorstellt. Aus meiner Sicht beschreibt er jedoch einen Konstruktionsvorgang. Dieser Vorgang findet statt, wenn ein Individuum Ereignissen subjektive Wahrscheinlichkeiten zuteilen will. Dann stellt es sich eine GegenspielerIn vor[15] und wählt einen Einsatz. De Finetti (S. 111) beschreibt die Prozedur wie folgt[16]:

Gegeben ist eine Zufallszahl X und Du musst einen Wert $\bar{x}$ wählen, wobei feststeht, dass Du nach dieser Wahl jede Wette mit dem Gewinn $c(X - \bar{x})$ annehmen musst, wobei c (positiv oder negativ) durch einen Gegner frei gewählt werden kann[17].

$\bar{x}$ wird als *Erwartung von X* bezeichnet. Wählt man X als den Indikator eines Ereignisses A, so wird $P(A) := \bar{x}$ als Wahrscheinlichkeit von A bezeichnet. Die Kohärenzforderung gibt de Finetti so an:

Es wird vorausgesetzt, dass Du nicht den Wunsch hast, Wetten abzuschließen, die für Dich einen sicheren Verlust bedeuten, daher ist eine Menge Deiner Erwartungen kohärent, wenn unter den Wettkombinationen, zu deren Annahme Du Dich verpflichtet hast, keine sind, welche

[14] Die Verwendung formaler Systeme erfordert es, die Dinge streng zu sehen.

[15] Eine echte Operation hätte man erst, wenn das Spiel tatsächlich stattfände. De Finetti schlägt entsprechend an anderer Stelle seines Buches vor, einen Teil des Gehaltes einer ExpertIn variabel entsprechend der operationalen Definition relativ zum Ausgang von Ereignissen auszuzahlen, für die die ExpertIn als Teil ihrer Arbeit subjektive Wahrscheinlichkeiten festlegen muss.

[16] Es handelt sich um das erste von mehreren Kriterien, die in seinem Buch angegeben werden und äquivalent sein sollen.

[17] Auf den ersten Blick mutet dieses Kriterium etwas eigenartig an. De Finetti führt zur Verdeutlichung das Prinzip „Der eine teilt den Kuchen, der andere sucht aus“ an. Der Gegner kann sich für die vorteilhaftere Seite entscheiden und für Dich ist es am besten, wenn beide Seiten gleich attraktiv sind. Dabei kann man sehen, dass das Spiel für Dich in jedem Fall schlecht ist, wenn der Gegner mehr weiß als Du.

Gewinne ergeben, die all uniform negativ sind. Die für $\bar{x}_i$ im Voraus gewählten Werte müssen derart sein, dass sich für keine Linearkombination $Y = c_1(X_1 - \bar{x}_1) + \ldots + c_n(X_n - \bar{x}_n)$ ergibt, dass $\sup Y$ *negativ ist.*
Dadurch wird eine Wahrscheinlichkeit hergestellt, die über den Kohärenzbegriff den Wahrscheinlichkeitsaxiomen (mit endlicher Additivität) genügt. Eine eventuell vorher vorhandene, aber unbekannte Wahrscheinlichkeit fällt nicht in den Bereich irgendeiner personalen Wirklichkeit. Der Vorteil eines operationalen Ansatzes besteht gerade darin, dass man keine Annahmen über unbeobachtbare Vorgänge braucht, sondern sich über subjektive Wahrscheinlichkeiten anhand klar definierter Handlungen verständigen kann. Werden mathematische Begriffe auf operationale Weise mit der Wirklichkeit verbunden, heißt das, dass nicht auf eine wirkliche Wirklichkeit referiert wird, sondern auf Konstruktionsanweisungen. Solche Erfindungen scheinen mir vertrauenswürdiger zu sein.

Bei näherem Hinsehen sind die Handlungen allerdings keinesfalls so klar definiert. Die Erwartungszuweisung gemäß de Finetti hängt von der GegnerIn und deren Wahrscheinlichkeitsbewertungen ab.

Betrachten wir folgende Situation: Gegeben seien die Personen P_1, P_2, P_3. Die Erwartung der Person P_i für X sei p_{ij}, wobei Person P_j ihre GegnerIn ist. De Finettis Kohärenzforderung bezieht sich nur auf die Wahl der p_{ij}, weil das Verhalten der GegnerIn bei ihm nicht vorkommt. Für die folgende Argumentation wende ich diese Forderung jedoch auch auf die Wahl von c durch die WettgegnerIn an.

Dann folgt aus der Kohärenzforderung an P_1 und P_2 folgender Satz:

Satz 3.1 *Für P_1 ist es uniform besser, die Erwartung für X gegenüber P_2 und P_3 unterschiedlich zu wählen als gleich, falls P_1 weiß*[18]*, dass $p_{13} \neq p_{23}$.*

Beweis: Nach Definition nimmt P_1 jede Wette mit dem Gewinn $c_{13}(X - p_{13})$ und P_2 jede Wette mit $c_{23}(X - p_{23})$ an. Sei nun $p_{12} > p_{23}$. Dann kann P_2 c_{12} beliebig wählen, und P_1 muss die Wette zu $c_{12}(X - p_{12})$ annehmen. Für $c_{12} < 0$ ist jedoch mit $c_{23} = c_{12}$ der Gewinn für P_2 gleich $c_{12}(X - p_{23} - X + p_{12}) < 0$ mit sicherem Verlust (c_{23} kann ja von P_3 beliebig gewählt werden). Daraus folgt $c_{12} \geq 0$. Aus $p_{12} < p_{23}$ folgt auf analoge Weise $c_{12} \leq 0$.

Sei oBdA $p_{13} > p_{23}$. Wählt P_1 nun $p_{12} = p_{13}$, so erhält sie den Gewinn $G_1 = (c_{12} + c_{13})(X - p_{13})$. Sei andererseits $p_{13} > p_{12} > p_{23}$, so ist der Gewinn

$$G_2 = c_{13}(X - p_{13}) + c_{12}(X - p_{12}) = G_1 + c_{12}(p_{13} - p_{12}) \geq G_1 \qquad (3.1)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $c_{12} = 0$. Damit ist aber die zweitere Wahl von p_{12} gleichmäßig besser als die Wahl $p_{12} = p_{13}$. $\diamond$

De Finetti hat offenbar stattdessen eine allgemeine, optimal informierte GegnerIn im Sinn, die das Subjekt zwingt, die eigenen Informationen bestmöglich auszunutzen. Diese GegnerIn müsste dann allerdings so etwas wie eine „wahre Wahrscheinlichkeit" kennen - und auf diese Weise kommen die sorgsam vermiedenen Annahmen über die wirkliche Wirklichkeit - und möglicherweise eine frequentistische Wahrscheinlichkeitsvorstellung - durch die Hintertür wieder herein. Weiterhin ist das Spiel dann für unser Individuum von Nachteil[19]. Eine andere Möglichkeit wäre es, sich eine symmetrische GegnerIn vorzustellen, die dieselben Wahrscheinlichkeitsvorstellungen im Sinn hat wie unser Subjekt. Leider wird „personale Wahrscheinlichkeit" damit zu einem Konzept der unbeobachtbaren wirklichen Wirklichkeit, denn in dem Moment, in dem ich mir bei de Finetti meine GegnerIn vorstellen muss, habe ich meinen

[18] Dasselbe kann auf kompliziertere Weise auch gefolgert werden, wenn P_1 über p_{23} nur unsichere Vorstellungen - in Form einer subjektiven Verteilung - hat.

[19] Siehe Fußnote 17. Das lässt sich mit Walley (siehe Abschnitt 3.3) umgehen.

Wahrscheinlichkeitswert noch nicht konstruiert und damit ist noch gar nicht definiert, was „dasselbe“ ist.

Man könnte annehmen, dass es für das Subjekt am praktikabelsten wäre, nichts über die GegnerIn zu wissen, außer, dass sie auch auf den eigenen Vorteil bedacht ist. Auch dann gibt es jedoch keinen Grund, warum das Subjekt keine formalisierte subjektive Meinung über die GegnerIn haben sollte. Tatsächlich führt de Finettis Verfahren nur dann zu von der GegnerIn unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, wenn es dem Subjekt verboten ist, über die GegnerIn nachzudenken.

De Finetti ist sich dieser Probleme durchaus bewusst (S. 118) und bevorzugt daher sein zweites operationales Kriterium, bei dem das Subjekt für die Abweichung seiner Erwartung vom Ereignis Strafe zahlt. Dabei handelt es sich jedoch nicht um ein Nullsummenspiel. Es gibt dann auch wieder eine problematische GegnerIn, wenn festgelegt wird, wer die Strafe bekommt. Ich diskutiere das Beispiel aus Fußnote 15. Die ExpertIn bekommt vom Unternehmen ein höheres Gehalt, als man ihr eigentlich zahlen will, und sie muss davon wieder eine Strafe im Falle der Abweichung ihrer Erwartung von dem, was tatsächlich passiert, zurückzahlen. Wieviel höher als die im Mittel gewünschte Gehaltszahlung G soll das Unternehmen das *Gehalt vor Strafe* $G + x$ wählen? Man kann zeigen, dass die Beantwortung dieser Frage, wenn das Unternehmen in der Erwartung G bezahlen will, sowohl von seiner eigenen als auch von der subjektiven Wahrscheinlichkeitszuschreibung der ExpertIn abhängt. Die ExpertIn kann wiederum versucht sein, ihre Zuschreibung so zu machen, dass das Unternehmen x möglichst groß wählt[20]. Das Problem der GegnerInnenabhängigkeit taucht also - besser versteckt - mit dem Strafkriterium auch auf.

Es gibt weitere Argumente dagegen, de Finettis Kriterien als „Messinstrument“ für etwas bereits Vorhandenes zu betrachten. Tatsächlich gibt es keinen Grund, warum sich das Individuum unbedingt auf die von de Finetti vorgeschlagenen Spiele einlassen sollte - außer dem, dass es eine subjektivistische Wahrscheinlichkeit konstruieren möchte. Wenn eine Münze geworfen werden soll, wird man zunächst vermutlich 50 Pfennig für 1 Mark Gewinn als geeigneten Kurs annehmen. Das ist unabhängig davon, ob man vorher eine Chance hat, die Münze zu begutachten oder nicht. Im zweiteren Fall würde man aber seltener überhaupt die Wette annehmen. De Finetti *verbietet* dem Individuum aber, das Spiel abzulehnen, sofern es eine Wahrscheinlichkeit konstruieren will. Das Subjekt hat keine Chance, seine Informationslosigkeit mit dem Konzept zu vereinbaren[21]. An dieser Stelle - wie schon vorher beim Einwand gegen die Anwendbarkeit der Aussagenlogik - wird ein ganz grundsätzliches Problem der formalen Beschreibung von Gedankenvorgängen deutlich: Entscheidungsmöglichkeiten werden reduziert[22]! In dem Moment, in dem ein Mensch auf eine klar umrissene Menge von Optionen festgelegt wird, verliert er Möglichkeiten, die er vorher hatte.

De Finetti präzisiert eine andere Wahrscheinlichkeitsvorstellung als von Mises, der aber auch von Mises (S. 87 ff.) zugesteht, dass sie im täglichen Leben beobachtbar ist. De Finettis Wahrscheinlichkeitsbegriff wird gültig, wenn sich eine Person dafür entscheidet. Die Erfindungen, die die Person dafür akzeptieren muss, scheinen mir weniger frei - da operationaler - zu sein als bei von Mises. Dafür erfordern sie eine starke Disziplinierung, also Einschränkung, der

[20] Man könnte einwenden, dass zumindest eines dieser Probleme nicht auftaucht, wenn die Reihenfolge der Aktionen festliegt. Da Gehälter aber Verhandlungssache sind, ist die Annahme, dass beide Seiten gegenseitig ihre subjektiven Bewertungen der Gegenseite beeinflussen, durchaus realistisch.

[21] Dieses ist einer von Walleys wesentlichen Einwänden. Für seine oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten kann das Individuum zu bestimmten Kursen sowohl die Wette auf ein Ereignis als auch auf das Gegenereignis ablehnen.

[22] Das gilt auch für die formale Beschreibung anderer, z.B. physikalischer Sachverhalte. Allerdings werden dort nicht direkt Handlungsmöglichkeiten eingeschränkt, sondern Wahrnehmungsmöglichkeiten. Das kann freilich dieselben Konsequenzen haben.

Gedanken. Natürlich bleibt es dem Individuum überlassen, die daraus folgenden Konstruktionen im Notfall nicht mehr ernst zu nehmen. Es ist freilich zu befürchten, dass von dieser Option selten bewusst Gebrauch gemacht wird.

3.3 Peter Walley: Unpräzise Information und Evidenz

Walleys Konzept von unpräziser Wahrscheinlichkeit baut in gewisser Weise auf de Finetti auf. Walley versucht, das *Bayesian dogma of precision* zu entschärfen. Seine Begriffsbildung kann ebenso operational wie de Finettis interpretiert werden, ist aber weniger restriktiv: Die Sachkenntnis des Subjekts geht als Grad der Präzision in die Wahrscheinlichkeitskonstruktion ein. Das Individuum hat die Möglichkeit, sich nicht festzulegen.

Walley legt Wert darauf, seine Begriffsbildung von einer operationalen Herangehensweise zu unterscheiden. Die von ihm gelieferte Wettpreis-Interpretation liefert keine wohldefinierte Operation: Walleys Individuum akzeptiert - bei weit auseinander liegender Wahl der oberen und unteren Wahrscheinlichkeit - nur Wettspiele, die für eine GegnerIn, die sich mit unserem Subjekt einigermaßen einig wäre, auf jeden Fall nachteilig sind. Daher wird die vorgeschlagene Wette kaum stattfinden. Man kann jedes konkrete Wettspiel ablehnen, ohne sich damit außerhalb von Walleys Modell zu begeben. Das Subjekt hat also im Grunde keine Motivation, seinen Preis präzise festzulegen[23]. Entscheidend für die Begriffsbildung ist die Konstruktion der *Verhaltensdisposition*, die in Walleys Aufbau vorhanden ist, ohne dass es zu einem konkreten Verhalten kommen muss. Aus konstruktivistischer Sicht macht das nicht viel Sinn: Man müsste sich Verhalten unabhängig von der konkreten Situation, die immer einzigartig ist, vorstellen können, um eine allgemeine Verhaltensdisposition („Ich würde für 1 Mark Gewinn bei Eintritt von *A in jedem Fall* 20 Pfennig Einsatz zahlen“) herzustellen. Abgesehen von der Konstruktion der unteren Wahrscheinlichkeit gibt es für das Individuum keinerlei Grund, seine Flexibilität auf diese Weise einzuschränken, zumal die so triviale wie unproduktive Wahl „untere Wahrscheinlichkeit 0, obere 1“ immer möglich ist und Walley (S. 62) ausdrücklich dem Subjekt die Möglichkeit zugesteht, flexibel höhere Einsätze als den Wert der eigenen unteren Wahrscheinlichkeit zu bringen.

Prinzipiell gelten die Anmerkungen zu de Finetti auch für Walleys Begriffsbildung. Erneut wird die Gedankenwelt des Subjekts formalisiert. Walleys Vorgehensweise ist sehr charakteristisch für eine an „Approximation der Wirklichkeit“ ausgerichtete Wissenschaft: Ein sehr vereinfachendes Konzept ist vorhanden (nämlich das von de Finetti); Kritikpunkte im Detail tauchen auf; ein weniger einfaches Konzept wird erfunden, das diese Kritikpunkte verarbeitet. Daran, dass sich ein Individuum, das sich den Walleyschen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu eigen machen möchte, stark einschränkende Annahmen über seine Gedanken gefallen lassen muss, wird aber nichts Grundsätzliches geändert. Auch die Walleyschen Erfindungen sind stark einschränkend. Zum Beispiel lässt sich das Verbot der *Intransitivität von Präferenzen* (S. 28) zwar anhand dreier Werte suggestiv darstellen, wenn man sich alles in Geld umgerechnet vorstellt. Geld folgt aber bereits einer linearen Ordnung und allgemeine menschliche Werte tun das nicht unbedingt[24]. Grundlage der Herleitung des Intransitivitätsverbots aus dem *avoiding sure loss*-Prinzip ist die Annahme, dass der Wert von *something You desire* konstant ist und nicht von der konkreten Alternative abhängt, für die es gerade vertauscht werden soll[25]. Letzteres ist

[23] Das Verfahren aus Fußnote 15 funktioniert hier nicht, da die ExpertIn mit einer unteren Wahrscheinlichkeit von 0 auf keinen Fall verlieren kann.

[24] McCulloch (1945); auch beim Geld sind Zweifel angebracht. Zum Beispiel ist mir der Gewinn von einer Million DM vermutlich weniger wert, nachdem ich bereits in der Vorwoche eine Million gewonnen habe, als wenn ich bisher immer verloren hätte. Und Millionen von Menschen kaufen sich Lotterielose, obwohl sie wissen, dass sie in der Erwartung Verlust machen.

[25] Dass das so ist, und dass das eine restriktive Annahme ist, lässt sich bei Walley auch nachlesen, z.B. auf S.

aber im realen Leben der Fall. Mein einziger Fernseher ist zum Beispiel sinnvoller im Tausch gegen einen besseren Fernseher angelegt als im Tausch gegen einen Videorecorder; es sei denn, man ginge davon aus, dass man den Videorecorder *ohne jeden Aufwand* beliebig weitervertauschen kann. Tatsächlich nimmt Walley offenbar an, dass alles immer beliebig verfügbar und rücktauschbar ist, wenn man den (festen) Preis dafür aufbringen kann. Seine Konstruktionen enthalten keinen Raum und keine Zeit[26].

Weiterhin tendiert Walleys Konzept dazu, den Raum für Willkürlichkeit, der bei de Finetti besteht, wieder einzuschränken. Walley gibt für *Rationalität* wesentlich weitergehende Kriterien an als die Befolgung der Aussagenlogik. Diese Kriterien sind nicht formalisiert. Es ist bleibt völlig unklar, wie sich Walley ihre Überprüfung vorstellt und sie enthalten Begriffe wie *care* und *imagination*, für die keinerlei Messbarkeitsmöglichkeit besteht. Diese Begriffsbildung zielt offenbar darauf ab, den Wahrscheinlichkeitsbildungsprozess intersubjektiv diskutierbar zu machen. Damit wird ein flexibles Instrument geschaffen, mit dem potentielle GegnerInnen als unwissenschaftlich denunziert werden können.

Walley zielt darauf ab, Wahrscheinlichkeitsbewertungen zu vermeiden, die sich im Widerspruch zur *Evidenz* befinden (S. 32), die später auf ähnliche Weise eingeführt wird wie die Rationalität. Es ist nicht ganz klar, ob sich hinter der Evidenz ein Konzept von wirklicher Wirklichkeit verbirgt. Er behandelt die Evidenz, als sei sie vom Individuum unabhängig, womit sie prinzipiell unbeobachtbar wird. Offensichtlich sind im Beispiel auf S. 32 persönliche Dispositionen, Informationen oder Erfahrungen denkbar, aufgrund derer Walleys *You* auf sinnvolle Weise zu der als *irrational* bezeichneten Zuschreibung kommen kann. Walley meint vermutlich, dass die Zuschreibung irrational ist, wenn es solche Gründe nicht gibt. Anscheinend will er das Individuum auf eine Angabe „rationaler" Gründe für seine Wahrscheinlichkeitsbewertungen verpflichten. Da nicht klar ist, was rational ist, muss sich das Individuum also einer diffusen Autorität unterwerfen, auf die eine WissenschaftlerIn, die Wahrscheinlichkeitszuschreibungen aus beliebigen Gründen nicht akzeptieren will, sich berufen kann.

Vor allem scheint es Walley um Einigkeit im wissenschaftlichen sozialen System zu gehen. Er versucht, Kriterien bereitzustellen, die verschiedene WissenschaftlerInnen nicht zu freien, sondern zu ähnlichen oder zumindest nicht widersprüchlichen Bewertungen führen. Das lässt Rückschlüsse auf sein Wissenschaftsbild zu. Auf jeden Fall dient es der Verständigung. Andererseits ist wissenschaftliche Einigkeit notwendig, um den Anschein von Objektivität in der Wissenschaft aufrecht zu erhalten. Der Verdacht ist nicht ganz abwegig, dass es Walley auch darum geht.

3.4 Laurie Davies: Distanzierte Gedankenmodelle

Davies grenzt sich ab gegenüber einer Vorstellung von *revealed truth*, die es zu enthüllen gelte. Er versucht, die Datenanalyse unabhängig von Annahmen über wirkliche Wirklichkeit zu machen. Er betont ausdrücklich, dass die Daten, die es zu untersuchen gilt, nicht notwendig aus einem Zufallsvorgang stammen müssen. Der Begriff von „Rationalität", den er verwendet, ist weniger ausformuliert als der von Walley. Wichtig ist, dass Rationalität *distanziert* sein soll: Man soll sich nicht so verhalten, als hätte man Einblick in irgendeine interne Logik des zu untersuchenden Sachverhaltes. Davies formuliert keinen Wahrscheinlichkeitsbegriff, sondern er definiert die *Angemessenheit* eines Wahrscheinlichkeitsmodells. Dabei wird das Modell verwendet, um künstliche Zufallsereignisse zu erzeugen und es wird eine operationale Beschreibung gegeben, aufgrund derer eine StatistikerIn „Angemessenheit" konstruieren kann. Diese Beschreibung ist wenig restriktiv. Sie setzt lediglich einen Ähnlichkeitsbegriff voraus, der relativ

62.

[26] Das gilt auch für de Finetti.

frei vom Individuum definiert werden kann. Das führt dazu, dass dem Individuum, das Davies folgt, normalerweise viele unterschiedliche Modelle angemessen erscheinen werden. Wenn die Person nun aufgrund eines solchen Ergebnisses eine Entscheidung treffen soll, bleiben ihr viele Alternativen und damit viel Raum für Willkür.

Es gibt bei Davies keine feste Zuschreibung von Wahrscheinlichkeiten zu Ereignissen der „Welt da draußen". Eine wesentliche Aufgabe der statistischen Theorie besteht für ihn darin, Kenngrößen oder Aussagen zu finden, die für die Vielzahl der angemessenen Modelle relativ stabil sind (*Robustheit*). Auch bei Davies geht es also letztlich darum, Entscheidungshilfen zu geben und Willkür einzuschränken. Mit Davies lässt sich zeigen, wie stabil Entscheidungen auf der Grundlage der Annahme approximativer Gültigkeit der Modelle sind.

Davies liefert eine Theorie der *Approximativität*. Einer seiner wesentlichen Kritikpunkte an seinen Vorläufern ist, dass sie sich auf „approximative Erkenntnis" der Wirklichkeit berufen, ohne den Begriff der Approximativität zu erklären. Er demonstriert, dass man mit sehr „nahen" Modellvorstellungen zu sehr unterschiedlichen Folgerungen kommen kann. In diesen Fällen ist ein Verweis auf „approximative Nähe" zur wirklichen Wirklichkeit selbst dann sinnlos, wenn man an die prinzipielle Erreichbarkeit dieser Nähe glaubt. In Davies' Terminologie ist für „approximative Wirklichkeitsbeschreibung" die Nähe eines Modells zum Datensatz bzw. dessen empirischer Verteilung nötig. Man muss also keine weitergehende Wirklichkeit dafür akzeptieren als die der vorhandenen Daten.

Die Modelle selber werden als Gedankenmodelle behandelt, sie referieren auf keinerlei wirkliche Wirklichkeit. Man beobachtet etwas aus der Wirklichkeit, stellt ein artifizielles Gedankenmodell daneben und entscheidet, ob das, was dabei herauskommt, ähnlich ist. Ein ganz anderes Gedankenmodell kann dieselbe Qualität haben. Ein Wahrscheinlichkeitsmodell ist also etwas künstliches, aus dem man Daten gewinnen kann[27], die mit den Erscheinungen vergleichbar sind. Die Schlussweisen bei Neyman und Pearson[28] sind ganz ähnlich, nur scheinen sie sich die Modelle als in der wirklichen Wirklichkeit existent vorzustellen.

Davies' Vorstellungen stimmen offenbar am ehesten mit konstruktivistischen überein. Er betont die Verantwortlichkeit der StatistikerIn und die Künstlichkeit jeder Modellwahl. Er umgeht sorgfältig jede Referenz auf wirkliche Wirklichkeit. Insbesondere kommt bei ihm die Modellbildung nicht *vor* der Beobachtung, im Gegensatz zur subjektivistischen und frequentistischen Auffassung[29]. Die Übereinstimmung des Modells mit intuitiven Vorstellungen der StatistikerIn über die zu modellierenden Mechanismen (Unabhängigkeit, Wirkungsrichtungen zwischen Variablen etc.) nennt er als Kriterium der Modellwahl nicht. Allerdings schließt er es auch nicht explizit aus. In seinen Beispielen kann die StatistikerIn sich vor Beginn der Angemessenheitstheorie durchaus auf bestimmte Modellklassen beschränken. Der Vorgang der Modellierung im Zusammenspiel mit der Planung von Experimenten wie bei Neyman und Pearson ist nicht Davies' Thema.

Sein Akzent auf Robustheit und damit Stabilität der Schlüsse weist in eine ähnliche Richtung wie die Vereinheitlichungsbestrebungen bei Walley. Auch Davies' Version der Datenanalyse fördert ähnliche Folgerungen bei unterschiedlichen WissenschaftlerInnen, wobei jedoch die willkürliche Wahl der Ähnlichkeitskriterien für Differenzierung sorgen kann. Davies arbeitet dabei rein formal, seine Einigkeitsbestrebungen äußern sich nicht in schwammigen Begriffsbildungen wie Walleys „Evidenz". Er verhält sich somit als konformes Mitglied des mathematischen

[27] Diese Vorstellung scheint erst mit einer bestimmten Stufe der Computertechnik möglich zu sein, die es ermöglicht, künstlich viele Daten aus einem formalen Modell zu gewinnen. Da es nur Pseudo-Zufallszahlengeneratoren gibt, geht allerdings auch das nur approximativ.

[28] Diese Autoren werden hier nicht behandelt, da zumindest Neyman bezüglich des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ausdrücklich auf von Mises verweist.

[29] *„Data peeping is at best non-scientific and at worst cheating"*, zitiert Davies die subjektivistischen und frequentistischen statistischen BeraterInnen, die er in seinen Szenen auftreten lässt.

sozialen Systems, in dem theorie-intern den Gesetzen der Logik gefolgt wird. Die Individuen, die seinen Begriff von angemessenen Modellen übernehmen wollen, müssen die formale Logik bezüglich ihres Rechnens mit Modellen, also Mathematik-intern, akzeptieren. Über ihr eigenes Denken bezüglich der Erscheinungen wird nichts Explizites gefordert.

Die Modelle selbst sind allerdings Wahrscheinlichkeitsmodelle, die den Kolmogorowschen Axiomen gehorchen. Sie beruhen also auf den entsprechenden Kohärenzforderungen, die durch den subjektivistischen oder frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff motiviert sind. Unser Subjekt, das Davies folgen will, sollte also diese Art von Modellen angemessen finden[30]. Die Gründe dazu bleiben ihm frei überlassen. Jedenfalls kritisiert Davies weniger eine subjektivistische oder frequentistische Wahrscheinlichkeitsvorstellung - die darf unser Individuum durchaus haben - als ihre typische Anwendung in der Datenanalyse-Praxis.

3.5 Gegenüberstellung

Ich fasse zusammen: Ein Subjekt kann sich dafür entscheiden, einen der diskutierten Wahrscheinlichkeitsbegriffe zu übernehmen. Die Konzepte sind in gewisser Weise kompatibel, denn der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ bezeichnet Sachverhalte auf **unterschiedlichen Ebenen**:

- Von Mises' Wahrscheinlichkeit bezeichnet eine Idealvorstellung über Phänomene der Wirklichkeit[31]. Die Übernahme seines Begriffes impliziert eine Vorstellung über **Gesetzmäßigkeiten, denen materielle Phänomene folgen.**[32] Dabei muss man sich weiterhin entscheiden, wann man es mit einem *regellosen Kollektiv* bzw. *Zufallsexperiment* zu tun hat.

- De Finettis Wahrscheinlichkeit bezeichnet operativ den Ausgang eines Wettspieles und ideell eine Vorstellung einer **Denkstruktur des Individuums**. Mit de Finettis Begriffsbildung lassen sich die *kohärenten* Konsequenzen aus Vorannahmen des Individuums auswerten, über deren Motivation nichts vorausgesetzt wird. Das Individuum muss die Kohärenzforderungen akzeptieren. Es darf also durchaus an frequentistische Wahrscheinlichkeiten glauben, wäre aber aus Verständlichkeitsgründen schlecht beraten, diese ebenfalls als „Wahrscheinlichkeiten“ zu bezeichnen.

- Walley versucht, die Modellierung *epistemischer* Wahrscheinlichkeiten, also von Denkstrukturen des Individuums, mit einer beobachteten Wirklichkeit zu verbinden. Zu diesem Zweck setzt seine Diskussion bereits an, bevor das Individuum seine Vorannahmen getroffen hat und liefert (meist informelle) Regeln zur *rationalen* Konstruktion von unteren Wahrscheinlichkeiten, die im Einklang mit der *Evidenz* stehen. Später in seinem Text wird deutlich, dass ein wesentlicher Teil dieser Evidenzeinklangs-Forderungen darin bestehen, bereits bekannte Ergebnisse mit den Regeln der frequentistischen[33] Wahrscheinlichkeitstheorie auszuwerten. Die Forderungen, die Walley an das Individuum stellt, gehen also am weitesten: Es muss sowohl die Modellvorstellungen für seine Denkweise, die freilich weniger restriktiv als bei de Finetti sind, als auch Vorstellungen über Gesetze der beobachtbaren Wirklichkeit akzeptieren, die Walley nicht vollständig präzisiert. **Sowohl die materielle Welt als auch die Innenwelt** des Individuums werden von seiner Konstruktion erfasst.

[30] Allerdings ließe sich das Davies'sche Konzept vermutlich auch auf andere Modellklassen, z.B. die Walleyschen, übertragen.

[31] Diese muss nicht „wirklich“ sein. Insofern steht das Konzept nicht in Opposition zum Konstruktivismus. Von Mises und seine NachfolgerInnen stellen sich aber vermutlich eine wirkliche Wirklichkeit vor. Daher wird häufig auch die Bezeichnung *Objektivismus* verwendet.

[32] Kurz zusammengefasst wird diese Forderung als *Existenzpostulat* von Behnen und Neuhaus (1995).

[33] Bei Walley: *aleatorisch*.

- Davies behandelt Wahrscheinlichkeiten als **Modelle für beobachtete Daten**. Diese Vorstellung scheint mir der frequentistischen sehr ähnlich zu sein. Das Individuum wird aufgefordert, sich einen zufälligen Mechanismus zur Erzeugung der vorliegenden Daten vorzustellen. Der prinzipielle Unterschied besteht darin, dass dieser Mechanismus keinerlei Wirklichkeitsanspruch bekommt. Dem „Zufall" wird keine Objektivität zugesprochen - auch nicht innerhalb des Individuums -, sondern er wird über die Zuschreibung hergestellt, und zwar auch für deterministisch entstandene Daten. Daher bleibt es dem Individuum auch überlassen, sich ganz unterschiedliche Modelle für dieselben Daten als *angemessen* vorzustellen. „Wahrscheinlichkeit" ist also hier ein Werkzeug zur Erzeugung einer Wahrnehmung der Daten. Die anderen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen können allerdings zur Begründung verwendet werden, warum man die Anwendung dieses Werkzeugs für sinnvoll hält.

Der von mir im nächsten Abschnitt eingeführte Wahrscheinlichkeitsbegriff ergänzt die bisherigen Konzepte insofern, als dass er ist auf einer weiteren Ebene angesiedelt ist: Den **konsensuellen Vorstellungen einer Gruppe** bzw. eines sozialen Systems.

4 Diskursive Wahrscheinlichkeiten

Wie ich bereits erwähnt habe, geht es mir nicht primär darum, die Wirklichkeiten der Wahrscheinlichkeitserfinder zu beurteilen, sondern ich versuche darzustellen, was ein Subjekt mitakzeptiert[34], wenn es diese Vorstellungen akzeptiert. Wenn ich also nun ein weiteres Konzept vorschlage, geht es nicht darum, die anderen Vorstellungen zu ersetzen, sondern sie im Sinne des vorhergehenden Abschnitts zu ergänzen.

Meine Ansatzpunkte sind meine Kritik zum Begriff des *Gegners* bei de Finetti und Heinz von Försters *Wirklichkeit = Gemeinschaft*. Ich werde eine operationale Definition geben, die keinerlei idealisierte (z.B. die „perfekte GegnerIn") oder restriktive (z.B. formale Kohärenz) Vorstellungen von den Individuen verlangt. Wie bei Davies soll jede Referenz auf „Evidenzen" vermieden werden, die außerhalb des Beobachtungshorizontes der Individuen liegen.

Zunächst gehe ich davon aus, dass eine *diskursive Wahrscheinlichkeit* etwas sein soll, das von einer *Gruppe* von Individuen zugeschrieben wird, d.h. n Personen mit $n \geq 2$. Damit zielt auch dieser Begriff, wie die Konzepte von von Mises, Walley und Davies, auf Einigkeit ab, jedoch nur innerhalb der bewertenden Gruppe. Wahrscheinlichkeitszuschreibungen, die einzelne Individuen unabhängig von einer solchen Gruppe machen, bleiben unberührt. Es ist allerdings unsinnig zu glauben, ein Individuum könnte unabhängig von den Diskursen, an denen es teilnimmt, auf irgendeine Weise Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuschreiben. Daher halte ich die Gruppe für ein geeignetes Bezugssubjekt.

Der Umgang mit den von der Gruppe vergebenen Wahrscheinlichkeitsbewertungen (z.B. entsprechend der formalen Logik oder einem formalen Kohärenzprinzip) muss unter den Gruppenmitgliedern Konsens sein; das heißt, dass ich von den Individuen verlange, die Regeln ihrer Gruppe zu akzeptieren, so lange sie als Gruppenmitglieder handeln. Es ist weniger restriktiv[35], von einer *in Konsens befindlichen* Gruppe z.B. die Befolgung der Aussagenlogik zu verlangen, als von einer Einzelperson, denn es ist für die Gruppe schwieriger, flexibel von einer einmal gemachten Aussage abzugehen, da das einen Einigungsprozess erfordert (siehe die entsprechende Diskussion in Abschnitt 3.2).

[34] Gemäß den hierfür durchaus angemessenen „approximativen" Regeln einer informell angewendeten Aussagenlogik; auch der Autor dieses Textes bemüht sich, die Regeln des mathematischen sozialen Systems einzuhalten.

[35] Damit meine ich: Es ist immer noch restriktiv, aber man wird seltener Ausnahmen beobachten und diese scheinen weniger schwerwiegend zu sein.

Wie de Finetti benötige ich einen Möglichkeitsraum, d.h. zu einem Ereignis A muss das Komplement definiert sein. Die Gruppe soll sich folgendermaßen verhalten: Jedes Mitglied hat 1 Geldeinheit, die beliebig teilbar ist. Mitglied i, $i = 1, \ldots, n$, wettet nun den Betrag $1 \geq x_i \geq 0$ auf das Eintreffen von A und den Betrag $1 \geq y_i \geq 0$ auf A^c. Dabei soll zunächst $x_i + y_i = 1$ gelten. Nun definiere ich

$$P(A) := \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad P(A^c) := \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \tag{4.1}$$

Nachdem A oder A^c eingetroffen sind, wird Mitglied i folgendermaßen ausgezahlt:

$$z_i := 1_A \frac{x_i \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)}{\sum_{j=1}^{n} x_j} + 1_{A^c} \frac{y_i \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)}{\sum_{j=1}^{n} y_j}, \tag{4.2}$$

d.h. der Topf $\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)$ (hier noch $= n$) wird proportional nach den Einsätzen auf das eingetroffene Ereignis ausgezahlt; Terme mit $\frac{0}{0}$ werden als 0 behandelt. Damit sind automatisch $0 \leq P(A)$ und $P(A) + P(A^c) = 1$ erfüllt. Weitergehende Additivitätseigenschaften folgen direkt aus (4.1), wenn die Wettstrategien aller Gruppenmitglieder diese Eigenschaften haben. Z.B. könnten sie alle AnhängerInnen einer subjektivistischen oder frequentistischen Wahrscheinlichkeitsauffassung - nicht notwendig derselben - sein. Eine andere Möglichkeit wäre eine Einigung der Gruppenmitglieder auf additive Wettstrategien. Das könnte den pragmatischen Sinn haben, die Anwendbarkeit der herkömmlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung zu sichern. Entscheidend ist, dass die Erfüllung der mathematischen Axiomatik hier nicht aus Kohärenz- oder Evidenzforderungen folgt, sondern durch Entscheidung der einzelnen Mitglieder oder eine Einigung.

Ich werde nun zeigen, in welchem Sinne diskursive Wahrscheinlichkeiten einer Gruppe mit subjektivistischen Wahrscheinlichkeiten ihrer Mitglieder kompatibel sind: Nur wenn der Einsatz x_i der subjektiven Wahrscheinlichkeit p_i entspricht, hat Mitglied i gleichmäßig nichtnegativen Erwartungsgewinn[36]. Insbesondere folgt aus Teil a) des folgenden Satzes zusammen mit (4.1), dass die diskursive Wahrscheinlichkeit der subjektiven entspricht, wenn alle Mitglieder dieselbe haben und erwartungsoptimal spielen.

Satz 4.1 *Gegeben sei eine Gruppe mit n Mitgliedern $M_1, \ldots, M_n$. M_1 habe im Rahmen eines Zufallsexperimentes die kohärente subjektivistische Wahrscheinlichkeit p_1 für Ereignis A, d.h. $p_1 = E1_A$. Es soll nun eine diskursive Wahrscheinlichkeit $P(A)$ erzeugt werden. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen:*

a) *Im Falle $x_0 := \sum_{i=2}^{n} x_i = (n-1)p_1$, also insbesondere, falls $x_2 = \ldots = x_n = p_1$, gilt $x_1 = p_1 \Rightarrow Ez_1 = 1 = \max_{x_1}$.*

b) *$x_1 = p_1$ ist äquivalent dazu, dass $Ez_1 \geq 1$ für beliebige zulässige Wahlen von $x_2, \ldots, x_n$.*

Beweis: Mit (4.2):

$$Ez_1 = \frac{x_1 p_1}{\left(\frac{x_1 + x_0}{n}\right)} + \frac{(1 - x_1)(1 - p_1)}{1 - \left(\frac{x_1 + x_0}{n}\right)}. \tag{4.3}$$

Nach Definition ist $P(A) = \frac{x_1 + x_0}{n}$. $Ez_1 = 1$ ist also äquivalent zu

$$x_1 p_1 (1 - P(A)) + (1 - x_1)(1 - p_1)P(A) - P(A)(1 - P(A)) = 0, \tag{4.4}$$

[36]Man beachte, dass de Finetti den Begriff *Wahrscheinlichkeit* auf den Begriff der *Erwartung* zurückführt, siehe Abschnitt 3.2. Der *Erwartungsgewinn* für Gruppenmitglied i ist in meinen Bezeichnungen $Ez_i - 1$, d.h. Erwartungsauszahlung minus Gesamteinsatz 1.

entsprechend für „>“ und „<“. Sei nun zunächst für Teil a) $x_0 = (n-1)p_1$. Mit $x_1 = p_1$ ist $P(A) = p_1$ und mit (4.4)

$$p_1^2(1-p_1) + (1-p_1)^2 p_1 - p_1(1-p_1) = 0 \Leftrightarrow Ez_1 = 1.$$

Sei nun weiterhin $x_0 = (n-1)p_1$, aber $x_1 \neq p_1$. Nach Definition liegt $P(A)$ dann zwischen x_1 und p_1, also

$$\begin{aligned} P(A)^2 + x_1p_1 - P(A)(x_1+p_1) = (P(A)-x_1)(P(A)-p_1) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow P(A) - P(A)(1-P(A)) + x_1p_1 - x_1p_1P(A) - P(A)x_1 + P(A)p_1 + x_1p_1P(A) < 0 \Rightarrow \\ x_1p_1(1-P(A)) + (1-x_1)(1-p_1)P(A) - P(A)(1-P(A)) < 0, \end{aligned}$$

also $Ez_1 < 1$ mit (4.4) im (zulässigen) Fall $x_0 = (n-1)p_1$. Damit ist Teil a) gezeigt und für b) ist nur noch $Ez_1 \geq 1$ für $x_1 = p_1$ und beliebige zulässige x_0 zu zeigen. Sei nun $x_0 \neq (n-1)p_1$. Dann gilt mit

$$\begin{aligned} (p_1 - P(A))^2 > 0 \Rightarrow p_1^2 - 2p_1P(A) + P(A)^2 > 0 \Rightarrow \\ p_1^2(1-P(A)) + (1-p_1)^2P(A) - P(A)(1-P(A)) > 0 \end{aligned}$$

sogar $Ez_1 > 1$ mit (4.4). ⋄

Bemerkung 4.2 *Bei erwartungsoptimalem Spiel jedes Gruppenmitglieds muss die diskursive Wahrscheinlichkeit der Gruppe im allgemeinen auch dann nicht additiv sein, wenn die Gruppe ausschließlich aus kohärenten subjektivistischen Mitgliedern besteht. Das zeigt sich an folgendem Gegenbeispiel: Sei $n = 2$. Gegeben seien disjunkte Ereignisse A_1 und A_2 mit $A_3 := A_1 + A_2$. p_{1i} sei die subjektive Wahrscheinlichkeit von M_1 für A_i, x_{ij} sei der Einsatz von M_i für A_j und z_{ij} die Auszahlung für M_i in der Wette um Ereignis A_i. Ich nehme an, dass M_1 weiß, dass M_2 additiv spielen wird*[37] *und darüber hinaus $x_{21} = x_{22} = \frac{1}{2}$ kennt. $p_{11} = p_{12} = \frac{1}{4}$ soll gelten. Nun gilt*

$$Ez_{11} = \frac{2p_{11}x_{11}}{x_{11}+x_{21}} + \frac{2(1-p_{11})(1-x_{11})}{2-(x_{11}+x_{21})} = \frac{x_{11}}{2x_{11}+1} + \frac{3-3x_{11}}{4-(2x_{11}+1)},$$

also

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx_{11}}Ez_{11} = \tfrac{(2x_{11}+1)-2x_{11}}{(2x_{11}+1)^2} + \tfrac{-3(4-[2x_{11}+1])+2(3-3x_{11})}{(4-[2x_{11}+1])^2} = \tfrac{1}{(2x_{11}+1)^2} - \tfrac{3}{(4-[2x_{11}+1])^2}, \\ \tfrac{d}{dx_{11}}Ez_{11} = 0 \Leftrightarrow 16 - 16x_{11} - 8 - 2(2x_{11}+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_{11}^2 + \tfrac{3}{2}x_{11} - \tfrac{3}{4} = 0. \end{aligned}$$

Ez_{11} erreicht sein Maximum im Bereich $0 < x_{11} < 1$ daher für $x_{11} = \frac{\sqrt{21}-3}{4}$. Entsprechend $x_{12} = x_{11}$. Bei additiver Wettstrategie müsste also $x_{13} = x_{11} + x_{12} \approx \frac{3.16}{4}$ gelten. Stattdessen mit $p_{13} = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{2}$ und $x_{23} = x_{21} + x_{22} = 1$:

$$Ez_{13} = \frac{2p_{13}x_{13}}{x_{13}+x_{23}} + \frac{2(1-p_{13})(1-x_{13})}{2-(x_{13}+x_{23})} = \frac{x_{13}}{x_{13}+1} + \frac{1-x_{13}}{1-x_{13}}.$$

Ez_{13} wird offenbar maximal für $x_{13} = 1-\epsilon$, ϵ beliebig klein, aber $\epsilon \neq 0$, so dass es für M_1 vorteilhaft ist, $x_{13} > x_{11} + x_{12}$ zu wählen. Damit gilt aber, falls die Annahmen von M_1 über M_2 stimmen, $P(A_3) > P(A_1) + P(A_2)$.

[37] Das wäre z.B. sinnvoll, wenn M_1 weiß, dass M_2 SubjektivistIn ist und nichts über M_1 weiß; die Argumentation wird viel komplizierter, hätte aber dieselben Folgerungen, wenn M_1 subjektivistisch unsichere Vorstellungen über M_2 hätte.

Gegen der Anspruch der Operationalität bei de Finetti und hier kann eingewandt werden, dass es häufig nicht praktikabel ist, die vorgeschlagenen Spiele wirklich mit Geldeinsätzen durchzuführen. Insbesondere sollen manchmal unendlich viele Ereignisse bewertet werden, um einen Vorgang vollständig zu modellieren. De Finetti weist darauf hin (S. 145), dass kohärente Zuweisungen von Wahrscheinlichkeiten an unendlich viele Ereignisse problemlos möglich sind, und zwar unter der Nebenbedingung einer vorab festgelegten kohärenten Bewertung endlich vieler Ereignisse. Er stellt sich offenbar vor, dass man nach seinem operationalen Verfahren eine gewisse Zahl von Ereignissen bewertet und dann den Rest entweder unbewertet lässt oder irgendwie[38] kohärent bewertet. Damit ist klar, dass keine vollständige Konstruktion einer Verteilung gemäß des operativen Verfahrens angestrebt wird, und man kann sich fragen, warum das Subjekt dann überhaupt operational beginnen sollte und nicht gleich eine vollständig definierte kohärente Verteilung als seine subjektive angeben kann[39]. Tatsächlich dürfte der Fall einer Wahrscheinlichkeitskonstruktion per Wettspiel in der subjektivistischen Statistik recht selten sein.

Es sei daher anerkannt, dass der Operationalitätsanspruch nur dann einzulösen ist, wenn der Raum der zu bewertenden Ereignisse sehr eingeschränkt ist. Das muss nicht heißen, dass der Raum der möglichen Ereignisse eingeschränkt ist. Auf jeden Fall wären aber für die nicht bewerteten Ereignisse nur sehr eingeschränkte wahrscheinlichkeitstheoretische Schlüsse möglich. Die Operationalitätsforderung ist aber auch darüber hinaus sinnvoll. Sie betont den Konstruktionscharakter der Begriffsbildung. Die Durchführung der konkreten Konstruktionsmethode, subjektiv oder diskursiv, kann verwendet werden, um eine vollständige Verteilung anhand ausgewählter Ereignis-Beispiele zu „verankern" und im Nachhinein zu überprüfen. Hilfreich können die Konstruktionsverfahren auch als Gedankenexperiment sein. Anders als das subjektivistische Experiment muss das diskursive Expermiment auch dann offen im Diskurs stattfinden, wenn auf das konkrete Geldspiel verzichtet wird, da die Gruppe sich gemäß der Definition verständigen muss.

Die Walleysche Kritik gegen de Finetti gilt für die bisherige diskursive Konstruktion auch: Es wird nicht zwischen verschiedenen Informationsniveaus unterschieden. Man bekommt aber auf kanonische Weise eine *untere diskursive Wahrscheinlichkeit* $\underline{P}$, indem das „=" in „$x_i + y_i = 1$" durch ein „$\leq$" ersetzt wird. Damit sind die Gruppenmitglieder nicht mehr gezwungen, ihr ganzes Geld zu verwetten, und es gilt nur noch $\underline{P}(A) + \underline{P}(A^c) \leq 1$, da bei der Definition weiterhin durch n geteilt werden soll. Diese Definition sorgt für eine Differenzierung der Mitglieder *innerhalb* der Gruppe nach selbst zugeschriebener Kompetenz, denn es ist für ein Mitglied vorteilhaft, höhere Beträge einzusetzen, wenn es sich für kompetent *relativ* zu den anderen Mitgliedern hält. Wenn sich alle Mitglieder für gleich informiert halten, gibt es keinen Grund für einzelne Mitglieder mehr, Geld übrig zu behalten, außer einem vorsichtigen Temperament. Aus diesem Grund ist $1 - \underline{P}(A) - \underline{P}(A^c)$ auch kein Maß für die selbst zugeschriebene Inkompetenz der Gesamtgruppe[40]. Wollte man die Informiertheit einer Gruppe im Vergleich zu einer anderen modellieren, müsste man eine Supergruppe aus Subgruppen bilden.

Das Konzept - wie auch die anderen - steht unter dem Vorbehalt, dass man dafür die formale Modellierung von Einstellungen - hier die der Gruppe - gutheißen muss. Alle Einwände der Art, dass es sich dabei um Freiheit einschränkende Erfindungen handelt, sind gerechtfertigt. Andererseits schaffen diskursive Wahrscheinlichkeiten - wie auch die anderen Konzepte - die Vereinfachung und die Verständigungsmöglichkeiten, die der Sinn mathematische Modellierung sind.

[38] Eindeutigkeit ist nicht garantiert.

[39] Das ist strenggenommen auch operational, aber einer wissenschaftlichen Beschreibung nicht mehr zugänglich.

[40] Bei Walley ist das ein Maß der *Unentschlossenheit*, die man auf diese Weise interpretieren kann.

5 Herstellung von Wirklichkeit durch Begriffsbildungen

Bisher habe ich mich vor allem auf die Wirklichkeiten konzentriert, die sich in den Konstruktionen der Wahrscheinlichkeitserfinder äußern, d.h. die nötigen *Vorannahmen*. Eine weitere interessante konstruktivistische Frage ist: „Was für Wirklichkeiten erzeugen die Konstruktionen, *nachdem* sie vorgenommen wurden?“

Die allgemeine Wirkung der Formalisierung von Gedankenstrukturen und Sachverhalten wurde bereits andiskutiert. Vor allem schafft Formalisierung Vereinheitlichung. Der Anspruch der „mathematischen Sprache“ besteht darin, Zusammenhänge ohne Referenz auf Hintergrundwissen ausdrücken zu können, abgesehen von der Kenntnis der Aussagenlogik und der Sprache, d.h. den benötigten Definitionen. Darüber, ob ein Beweis richtig ist oder nicht, soll kulturunabhängig Konsens bestehen. Es ist zu beobachten, dass die Vorstellung sehr verbreitet ist, die Mathematik leiste genau das. Anscheinend schafft Mathematik tatsächlich hohe Einigkeit. Insbesondere legen viele Menschen großes Vertrauen in die Gültigkeit von mathematischen Beweisen, selbst wenn sie diese Beweise nicht oder nicht vollständig verstehen. Das führt dazu, dass eine MathematikerIn normalerweise zuverlässig mehr oder weniger schwerwiegende Fehler findet, wenn sie einigermaßen komplexe Beweise von Sätzen durcharbeitet, die anderswo bereits fleißig zitiert und für neue Beweise verwendet wurden. Ein anderes Beispiel ist die unkritische Anwendung statistischer Verfahren in diversen Wissenschaften. Es wird anscheinend geglaubt, dass die Stochastik für die unterschiedlichsten inhaltlichen Situationen Verfahren bereitstellt, die eine objektive Entscheidung z.B. zwischen Hypothese und Alternative ermöglichen und dass die Rechtfertigung dafür in der Mathematik und ihren Beweisen läge. Unabhängig von der Korrektheit der dafür benötigten mathematischen Theorie muss festgestellt werden, dass diese sich mit idealisierten Situationen beschäftigt, die es real nicht gibt (z.B. stochastische Unabhängigkeit[41], Normalverteilung) und dass jede Vorstellung von „Approximation an die Realität“ problematisch ist, wie Davies zeigt. Häufig wird nicht einmal der Versuch gemacht, zu begründen, warum Modellvoraussetzungen auch nur approximativ erfüllt sein sollen - zum Teil, weil sie gar nicht bekannt sind. Aus stochastischer Sicht stehen viele wissenschaftliche Erkenntnisse (z.B. in der Genetik) auf erstaunlich schwachen Füßen.

Die Mathematik wird also offenbar als Autorität anerkannt[42], man spricht ihr eine Art interner Objektivität zu, d.h. sie soll „stimmen bezüglich ihrer eigenen Regeln“, und mathematische Begründungen werden allenthalben anerkannt. Letzteres ist für die Vermarktung der Mathematik und damit die Konstruktion eines Mathematik-Bedarfes wichtig. Auch ein von Mises, Neyman oder Walley müssen bezahlt werden. *Der Missbrauch der Mathematik fördert die Mathematik*[43]!

Das tendenziöse Wort „Missbrauch“ bezieht sich dabei auf die im mathematischen sozialen System verbreitete Wahrnehmung. Tatsächlich gibt es keinerlei Einigkeit über irgendwelche Kriterien, wann ein Gebrauch ein Missbrauch ist. Es gibt genügend Beispiele dafür, wie „falsche“ oder „falsch verstandene“ Mathematik ihren Beitrag zu bahnbrechenden Erfindungen leistete. Das gilt auch für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, z.B. in Physik und Wirtschaftswissenschaften. Die Entscheidungs- und Verantwortungsfunktion, die Mathematik dem Menschen abnimmt, macht die Menschen in ihren Entscheidungen mutiger. Man kann freilich geteilter Meinung darüber sein, ob das der Menschheit so gut tut.

[41] Die Beispiele, mit denen Walley auf S. 444 zeigen will, dass es evidentes, d.h. nicht subjektgebundenes, *Wissen* über die Unabhängigkeit von Ereignissen (z.B. ein spezieller Würfelwurf und die Arbeitslosigkeitsquote des nächsten Monats) gäbe, scheinen mir völlig unzureichend zu sein. Auch Walley macht an anderer Stelle einen Unterschied zwischen Unabhängigkeit und der Nichtkenntnis von Abhängigkeiten.

[42] Im Zuge der Postmoderne in abnehmendem Maße, wie man an den Etats der Mathematik-Fachbereiche sehen kann.

[43] Außer in krassen Fällen, die zur Diskreditierung beitragen, siehe z.B. Krämer (1991).

Weitere bereits diskutierte Stichworte zum Themenkomplex „Vereinheitlichung“ sind *Verständigung*, *Vereinfachung* und *Prüfbarkeit*. Quantifizierung von Sachverhalten führt zu *Hierarchisierung* und *Klassifikation*, d.h. der Bündelung von Phänomenen mit Gemeinsamkeiten zu neuen Begriffen. Aus dem Bereich der Stochastik kommen zum Beispiel Verfahren zur Gruppierung von Kunden eines Marktes[44]. Damit sind viele „Zielgruppen“-Erfindungen durch den Wahrscheinlichkeitsbegriff motiviert. Ein schönes Beispiel für mathematisierte Begriffsbildung ist auch die „Regenwahrscheinlichkeit“. Eine solche Angabe wird allgemein verstanden[45] und benutzt, weil die groben Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung[46] inzwischen Allgemeingut sind. Dabei ist völlig unklar, welches Ereignis „Regen“ überhaupt bezeichnet[47]. Es besteht begründeter Verdacht, dass die entsprechenden Zahlen von NichtmeteorologInnen unter nichtformalisierter Verwendung der Wetterkarte frei erfunden werden.

Einer der interessantesten Aspekte der Wirklichkeitskonstruktion ist die Erzeugung von selektiver Wahrnehmung und die damit vorhandene Konstruktion von *Erfahrungstatsachen*. Als Beispiel diskutiere ich die „empirische Existenz eines Grenzwertes relativer Häufigkeiten“. Offenbar wird die Annahme „objektiver Wahrscheinlichkeiten“ allenthalben motiviert durch die Erfahrungstatsache, dass die relative Häufigkeit für das Ergebnis „gerade Augenzahl“ sich bei großer Anzahl der Würfelwürfe um $\frac{1}{2}$ stabilisiert. Mir scheint der Sachverhalt aber eher umgekehrt zu liegen: Die Behauptung von der „Erfahrungstatsache“ ist ein akzeptierter Text und wird allgemein nachgebetet. Die korrespondierende „Erfahrung“ ist dagegen fragwürdig:

- Nur ein kleiner Anteil der Menschen, die solche „Tatsachen“ kolportieren, haben eine entsprechend große Zahl von Würfelwürfen überhaupt beobachtet, ein noch kleinerer Anteil hat die *Entwicklung* relativer Häufigkeiten ausgewertet. Diese Entwicklung ist aber zur Konstruktion der „Erfahrungstatsache“ unverzichtbar. Die relative Häufigkeit 0.486 nach 1200 Würfelwürfen sagt nichts aus, erst die *Stabilisierung* der Häufigkeiten zwischen Wurf 1 und 1200 begründet suggestiv die Grenzwertvorstellung. Von Wurf 1200 aus muss also *in die Vergangenheit gesehen* werden, um sich *in der Zukunft* einen Grenzwert vorzustellen.

- Man kann die Gleichmäßigkeit der Wahrscheinlichkeit der sechs Würfelseiten akzeptieren ohne irgendeine Referenz auf relative Häufigkeiten. Bei Bernoulli und Laplace geht es noch um ein Verhältnis zwischen *günstigen* und *vorhandenen* Fällen unter *gleichmöglichen*. Die Begründung der Gleichmöglichkeit liegt für Bernoulli in der physikalischen Beschaffenheit des Würfels.

- Die Beobachtung der „Stabilisierung um $\frac{1}{2}$“ setzt eine bestimmte Blickrichtung voraus. Die Beobachtung wird offenbar stark erleichtert dadurch, dass man bereits vorher an die Stabilisierung glaubt. Dieser Glaube wird normalerweise vor allem durch die Rezeption von sprachlichen Äußerungen, die bereits auf einer dahingehenden Vorstellung beruhen, hergestellt[48]. Geht man nicht von diesem Glauben aus, so besteht keinerlei Grund, die Theorie der „Stabilisierung um $\frac{1}{2}$“ für die Daten auf Bild 4, S. 16 in Behnen und Neuhaus (1995) für plausibler zu halten als eine Stabilisierung um eine monoton fallende Asymptote ab Wurf 750 mit einem beliebig niedrigen Grenzwert.

[44] Das kann man sich z.B. anhand von Mises' Ausführungen zur Versicherungsstatistik vorstellen.

[45] Gemäß der Selbstzuschreibung von Verständnis durch die RadiohörerInnen.

[46] „Sicheres Ereignis 100 %, Gegenereignis dazu 0 %, je höher, desto sicherer“; das ist noch unterhalb der Bernoullischen Begriffsbildung.

[47] D.h. wo in der Stadt, wann und wieviel Niederschlag.

[48] Obwohl Würfelspiele zu seiner Zeit alltäglich waren, vermutet Bernoulli, daß vor ihm niemand auf die Idee der sich stabilisierenden relativen Häufigkeit gekommen sei (S. 90). Diese Vermutung wäre ziemlich eigenartig, würde man annehmen, dass sich eine solche Wahrnehmung bei der Betrachtung einer großen Menge von Experimenten von selber einstellt. Ich vermute, dass auch Bernoulli erst auf formal-theoretischem Wege zu diesem Verdacht gekommen ist.

- Die mathematischen Idealbedingungen für ein Häufigkeitsexperiment sind nie erfüllt (Abnutzung des Würfels etc.). Das ist natürlich bekannt und dieser Umstand wird verwendet, um zuwiderlaufende Beobachtungen *wegzuerklären*. „Der scheinbare Grenzwert weicht deutlich von $\frac{1}{2}$ ab“ wird zu „Der Würfel ist gefälscht“. „Die relative Häufigkeit konvergiert (noch) nicht, sondern scheint langsam zu steigen“ wird zu „Der Würfel hat sich verändert, weil er am Anfang zu häufig auf dieselbe Seite gefallen ist“. Notfalls bleibt bei endlichen Folgen von Würfelwürfen noch die Möglichkeit, zu erklären, dass etwas *sehr Unwahrscheinliches* passiert sei. Das wäre gemäß der Theorie, die durch die Erfahrung bestätigt werden soll, immerhin *möglich*.

  Gegenläufige Experimente verschwinden also, indem sie für ungültig erklärt werden, sofern man sich - aus welchen Gründen auch immer - für eine Realität entschieden hat. Auf diese Weise lässt sich die Falsifizierbarkeit von Theorien, die z.B. für Popper zentrale Bedeutung hat, vermeiden.

- Im Alltag, der nicht in wissenschaftlicher Weise protokolliert wird, können den Vorstellungen zuwiderlaufende Erscheinungen nicht einmal gesehen werden. Personen, die ihre ihnen selbst als abnormal auffallenden Würfelergebnisse mit irgendwelchen mystischen Vorstellungen begründen, wird allenthalben eine *verzerrte Wahrnehmung* unterstellt, üblicherweise ohne jeden Versuch einer Überprüfung. Derlei Phänomene sind auch nicht überprüfbar, denn die Herstellung eines experimentellen Raumes verändert die Bedeutung des Würfelns. Eine Person, die glaubt, dass die Würfel gegen sie sind, wird darin sogar noch bestätigt, wenn sie daraufhin versuchsweise in 36 Würfen ohne jede weitere Bedeutung genau 18 gerade Augenzahlen erzielt. Solcherlei mystische Vorstellungen sind keineswegs abwegig oder gar unnatürlich. Schließlich dürfte die Verwendung von Würfeln, Spielkarten u.ä. zur Ermittlung von Orakeln, aber auch von konkreten (Gottes-)Entscheidungen mindestens so alt sein wie das Glücksspiel.

Dieses alles gilt für das Würfelexperiment, das in wesentlicher Weise zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes beigetragen hat. Die ersten mathematischen Beschreibungen sind fast direkt davon abgeschaut. Es ist also quasi materialisierte Wahrscheinlichkeitstheorie[49]. In anderen Zusammenhängen lässt sich auch beobachten, dass die Ergebnisse weniger Datenerhebungen ungewisser Qualität genügen, um unter Verweis auf die Gesetze der großen Zahlen allgemeine Wahrscheinlichkeitsaussagen zu machen, z.B. bei der Konstruktion von „Normalität“ in der Psychologie und Medizin. Die von solchen Aussagen geschaffenen Wirklichkeiten haben dann ähnliche Hartnäckigkeit und selbstbestätigende Qualität. Unabhängig von den Chancen eines Menschen, die ihm einmal aufgedrückte Etikettierung „nicht normal“ loszuwerden, ist die Veränderung der Wahrnehmung seiner Umwelt in Bezug auf ihn kaum zu übersehen.

Anhand des Würfelbeispiels kann auch gezeigt werden, wie subjektivistische Formalisierung Wahrnehmung (und damit Wirklichkeit) verändern kann. Der *Satz von de Finetti* (in seinem Buch diskutiert in Kapitel XI.3/4) besagt, dass sich jede kohärente Zuschreibung von Wahrscheinlichkeiten an Folgen von Erfolgs-/Misserfolgsereignissen darstellen lässt als bedingt stochastisch unabhängige Folge von Bernoulli-Experimenten. Die Unabhängigkeit soll dabei gelten gegeben einen unbekannten Parameter p, für den eine beliebige *a priori-Verteilung* auf $[0, 1]$ gewählt sein kann. Der Satz gilt unter der Voraussetzung der *Vertauschbarkeit* der Ereignisse, d.h. wenn das Subjekt sich eine (endliche, aber beliebig lange) Folge mit bestimmte Anzahl von Erfolgen vorstellt, soll es bezüglich seiner Wahrscheinlichkeitszuschreibung egal sein, an welchen Stellen die Erfolge auftreten.

[49] Immerhin war der Glaube an die Aussagekraft des Experimentes bei Chevalier de Méré (noch) stärker als der Drang, die eigene - freilich nichtmathematische - Theorie aufrecht zu erhalten; siehe die Beschreibung bei Neyman.

Diese Formulierung ist mathematisch sehr praktisch, da alle Information in der a priori-Verteilung auf $[0, 1]$ steckt. In der subjektivistischen Statistik werden solche Zuschreibungen daher aus pragmatischen Gründen gerne gemacht. Die subjektivistische Theorie beansprucht, den Lernprozess des kohärenten Subjektes unter hinzugewonnener Erfahrung zu beschreiben. Wenn das Subjekt sich nun tatsächlich bei seiner subjektiven Bewertung für Vertauschbarkeit entschieden hat, *muss* nach der Beobachtung einer Teilfolge von Experimenten seine kohärente Wahrscheinlichkeitszuschreibung für den Fortgang der Ereignisse immer vertauschbar bleiben. Das folgt zwingend aus den Kohärenz erhaltenden Rechenregeln. Das Subjekt nimmt also Abläufe, die die Gültigkeit der Vertauschbarkeitsvoraussetzung in Frage stellen, gar nicht mehr wahr, d.h. sie haben keinerlei Einfluss auf seine künftige subjektive Wahrscheinlichkeitszuschreibung. Selbst wenn 600 Würfe immer abwechselnd „gerade“ und „ungerade“ brachten, ist für das subjektivistische Individuum die zukünftige Verteilung immer noch allein durch die subjektive Verteilung des Parameters p definiert. Die einzelnen Würfe müssen weiterhin als unabhängig gegeben den Parameter behandelt werden.

Der einzige Ausweg bestünde darin, bei der Wahl der *ursprünglichen* Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Raum aller Erfolgs-/Misserfolgsfolgen diesen Fall bereits vorzusehen, d.h. bereits vor Beginn des Experimentes zu wissen, dass man es nach 600 alternierenden Würfen für ziemlich wahrscheinlich halten wird, dass es alternierend weitergeht. Damit hätte man aber die Vertauschbarkeit schon für die Ausgangsverteilung verloren. Entsprechend müssten *alle* Sonderfälle, auf die man später reagieren möchte, bereits vorher in die Bewertung einbezogen werden, praktisch vermutlich ein undurchführbares Unterfangen[50]. Anhand dieses Beispiels wird sehr schön die (grob vereinfachende) konstruktivistische Behauptung deutlich, dass man *nur sehen kann, was man bereits zu sehen erwartet.* Statistische Annahmen wirken selbstbestätigend.

6 Literatur

6.1 Literatur aus dem Seminar „Was ist Wahrscheinlichkeit“?

(Im Text ohne Jahreszahl zitiert und Grundlage für die Unterabschnitte von Abschnitt 3.)

Bernoulli, J. (1899): *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi), 4. Teil*, dt. Übersetzung, Engelmann, Leipzig

Davies, P. L. (1995): Data Features, *Statistica Neerlandica 49*, S. 185-245

de Finetti, B. (1981): *Wahrscheinlichkeitstheorie*, dt. Übersetzung, Oldenbourg, Wien

von Foerster, H. (1993): Über das Konstruieren von Wirklichkeiten, dt. Übersetzung in *Wissen und Gewissen*, hg. von S. J. Schmidt, Suhrkamp, Frankfurt, S. 25-49

de Laplace, P. S. (1951): *A Philosophical Essay on Probabilities*, engl. Übersetzung, Dover, New York

von Mises, R. (1951): *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, 3. Auflage, Springer, Wien

Neyman, J. (1950): *First Course in Probability and Statistics*, Holt, New York

Pearson, E. S. (1966): Some thoughts on statistical inference, *Selected Papers of E. S. Pearson*, University of California, Berkeley, S. 276-283

Walley, P. (1991): *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman & Hall, London

[50] Vgl. die Diskussion in Abschnitt 3.2 über die Anwendbarkeit der Aussagenlogik.

6.2 Sonstige Literaturangaben

Behnen, K. und Neuhaus, G. (1995): *Grundkurs Stochastik,* Teubner, Stuttgart

Bochumer Arbeitsgruppe für Sozialen Konstruktivismus und Wirklichkeitsprüfung (1992): *Wirklichkeitsprüfung: Eine sozial-konstruktivistische Forschungsperspektive für die Psychologie,* Arbeitspapier Nr. 10, Fakultät für Psychologie, Ruhr-Universität Bochum

de Finetti, B. (1993): Statistics and probability in R. von Mises' conception in *Probabilità e Induzione*, CLUEB, Bologna

Feyerabend, P. (1986): *Wider den Methodenzwang,* Suhrkamp, Frankfurt

Krämer, W. (1991): *So lügt man mit Statistik,* Campus, Frankfurt

McCulloch, W. S. (1945): A Heterarchy of Values Determined by the Topology of Nervous Nets, *Bulletin of Mathematical Biophysics 7,* S. 89-93